Дополнение самонакручивающейся плоской кривой

Н. Н. Константинов (Москва)

1. Пусть $r(t)$ — непрерывное отображение в плоскость полупрямой $t \geqslant 0$. Если отображение $r(t)$ устанавливает взаимнооднозначное соответствие между полупрямой $t \geqslant 0$ и её образом, то образ полупрямой в настоящей заметке называется *кривой* (плоской, несамопересекающейся). На кривой выберем положительное направление в сторону роста параметра.

2. Определение. Кривая L называется *самонакручивающейся*, если для всякой точки $x \in L$, всякого положительного числа ε и всякой точки $y \in L$ найдётся точка $z \in L$, следующая за y и лежащая в ε-окрестности точки x.

Это требование эквивалентно тому, чтобы кривая в каждой своей точке была локально-несвязной.

Термин „самонакручивающаяся“ предложен А. Лелеком (Вроцлав).

3. В моей работе [2] построен пример гладкой кривой, лежащей в ограниченном куске плоскости, самонакручивающейся и обладающей ограниченной кривизной. Дополнение к замыканию этой кривой есть сумма четырёх попарно непересекающихся областей (одна из которых неограничена). А. Лелек предложил следующую задачу:

4. Доказать, что *дополнение к замыканию ограниченной самонакручивающейся гладкой кривой ограниченной кривизны состоит по меньшей мере из четырёх компонент.*

Настоящая заметка посвящена доказательству этой теоремы (см. пункт 42).

5. Пусть L — самонакручивающаяся кривая, лежащая в квадрате I на плоскости (заданная отображением $r(t)$). Будем предполагать, что вектор касательной $r'(t)$ в каждой точке существует, непрерывен и не равен 0, и, следовательно, касательная к L существует и непрерывно вращается. Через $l(t)$ будем обозначать прямую, касающуюся L в точке $r(t)$. Через $L(t_0 \leqslant t < t_1)$ обозначается множество точек $r(t)$, где t удовлетворяет условиям: $t_0 \leqslant t < t_1$. Аналогичный смысл имеют обозначения: $L(t > a)$, $L(t$ лежит между a и $b)$ и т. п.

6. Предположим, что выполняется

Условие А. *Для каждого $t_0 > 0$ найдётся положительное число $\delta < t_0$ такое, что $L(t_0 - \delta < t < t_0 + \delta)$ лежит вне суммы двух открытых кругов радиуса 1, касающихся с разных сторон кривой L в точке $r(t_0)$.*

Про кривую, удовлетворяющую условию А, будем говорить, что она обладает *ограниченной кривизной* (не превышающей 1) *в обобщённом смысле.* Легко видеть, что, если кривизна в обычном смысле существует и всюду меньше 1, то условие А выполнено.

7. Пусть r_1 и r_2 — два ненулевых вектора на плоскости, не противоположные по направлению. Через $\sphericalangle(r_1, r_2)$ обозначим угол, на который нужно повернуть r_1, чтобы совместить его направление с направлением r_2; угол считается положительным, если поворот совершается против часовой стрелки, и отрицательным в противном случае, при этом всегда выбирается значение угла, по модулю меньшее π. $\sphericalangle(r_1, r_2)$ называется *углом от вектора* r_1 *к вектору* r_2.

Пусть A и B — две различные точки плоскости. Через $[A, B]$ обозначим направленный отрезок, соединяющий точки A и B и ориентированный от A к B.

Пусть A, B и C — три попарно различные точки, причём $B \notin [A, C]$. Через $\sphericalangle(A, B, C)$ обозначим $\sphericalangle([B, A], [B, C])$.

Пусть l_1 и l_2 — две прямые, не взаимно-перпендикулярные. Через $\sphericalangle(l_1, l_2)$ обозначим угол, на который нужно повернуть l_1, чтобы совместить её направление с направлением l_2; угол считается положительным, если поворот происходит против часовой стрелки, и отрицательным в противном случае, при этом выбирается значение угла, по модулю меньшее $\pi/2$.

8. Определение. Пусть $t_0 > 0$. Пусть ω_1 и ω_2 — два открытых круга радиуса 1, касающихся L в точке $r(t_0)$. Рассмотрим окружность λ радиуса a

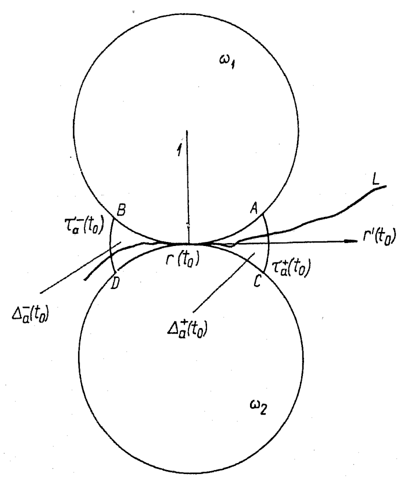

Рис. 1

$(0 < a \leqslant 1)$ с центром в точке $r(t_0)$ (см. рис. 1). A, C, B и D — точки пересечения λ с ω_1 и ω_2. Рассмотрим фигуру, ограниченную дугами $\cup AC$ и $\cup BD$ окружности λ и дугами $\cup Ar(t_0)B$ и $\cup Cr(t_0)D$ окружностей ω_1 и ω_2. Эта фигура обозначается через $B_a(t_0)$ (она считается замкнутым множеством). Две компоненты множества $B_a(t_0) \setminus r(t_0)$ обозначаются через $\Delta_a^+(t_0)$ и $\Delta_a^-(t_0)$ (через $\Delta_a^+(t_0)$ обозначается та из частей, в сторону которой смотрит вектор $r'(t_0)$). $\Delta_a^+(t_0) \cap \lambda$ обозначается через $\tau_a^+(t_0)$; $\Delta_a^-(t_0) \cap \lambda$ обозначается через $\tau_a^-(t_0)$.

9. Лемма. *Пусть* $t_0 > 0$, $t_1 > 0$, $L(t$ *лежит между* t_0 *и* $t_1) \subset B_a(t_0)$. *Тогда*

$$\left|\sphericalangle\big(r'(t_0), r'(t_1)\big)\right| \leqslant 2\arcsin\tfrac{1}{2}a.$$

($2\arcsin\frac{1}{2}a$ — это угол между $l(t_0)$ и касательной к кругу ω_1 в точке A, см. рис. 1).

10. Доказательство. Для определённости рассмотрим случай $t_1 > t_0$ и $0 < \sphericalangle\big(r'(t_0), r'(t_1)\big)$. Достаточно привести к противоречию неравенство $\sphericalangle\big(r'(t_0), r'(t_1)\big) > 2\arcsin\frac{1}{2}a$. Пусть это неравенство имеет место. Тогда, вследствие непрерывности вращения касательной, найдётся точка $t^* \in [t_0, t_1]$ такая, что

$$(=) \qquad \sphericalangle\big(r'(t_0), r'(t^*)\big) = 2\arcsin\tfrac{1}{2}a.$$

Пусть $B_a(t_0)$ образована границами кругов ω_1 и ω_2 и окружностью λ (в дальнейшем употребляем обозначения пункта 8, рис. 1). $r(t^*)$ не есть A; иначе всякая следующая точка L, достаточно близкая к $r(t^*)$, не лежала бы в $B_a(t_0)$. Через O_1 обозначим центр круга ω_1. Пусть $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{2}\pi$. Обозначим через $\omega(\alpha)$ круг радиуса 1, граница которого проходит через точку $r(t_0)$ и такой, что $\sphericalangle\big(O_\alpha, r(t_0), O_1\big) = \alpha$ (через O_α обозначен центр круга $\omega(\alpha)$). Рассмотрим такое α_0, чтобы граница круга $\omega(\alpha_0)$ проходила через точку $r(t^*)$. К множеству S отнесём всякое такое $\alpha \in [\alpha_0, \frac{1}{2}\pi]$, что граница круга $\omega(\alpha)$ пересекается с $L(t_0 < t \leqslant t^*)$. Из условия $(=)$ и из того, что $r(t^*) \neq A$ следует, что $r'(t^*)$ пересекается с границей $\omega(\alpha_0)$ под ненулевым углом, причём $r'(t^*)$ направлен внутрь круга $\omega(\alpha_0)$. Из этого следует, что существует $\alpha > \alpha_0$, которое входит в S. $\frac{1}{2}\pi \notin S$. Действительно, круг $\omega(\frac{1}{2}\pi)$ содержит всё $\Delta_a^+(t_0)$, следовательно, $L(t_0 < t \leqslant t^*)$ лежит внутри $\omega(\frac{1}{2}\pi)$. Пусть $\bar{\alpha}$ есть точная верхняя грань множества S.

Утверждение (+). *Всякое* $x \in [\alpha_0, \bar{\alpha}]$ *входит в* S.

Доказательство. По определению точной верхней грани множества, найдётся ${}^1\alpha > x$, входящее в S. Пусть $\omega({}^1\alpha)$ пересекается с $L(t_0 < t \leqslant t^*)$ в точке $r({}^1t)$. $\omega(x)$ разбивает $\Delta_a^+(t_0)$ на два множества (рис. 2), причём $L({}^1t \leqslant t \leqslant t^*)$ есть континуум, соединяющий точки $r({}^1t)$ и $r(t^*)$, принадлежащие разным множествам. Поэтому на $\omega(x)$ найдётся точка из $L({}^1t \leqslant t \leqslant t^*) \subset L(t_0 < t \leqslant t^*)$. Утверждение доказано.

Утверждение (++). $\overline{\alpha} \in S$.

Доказательство. Пусть $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ — монотонно возрастающая последовательность положительных чисел, сходящаяся к $\overline{\alpha}$. Каждому α_i поставим в соответствие t^i такое, что $r(t^i)$ принадлежит пересечению границы круга $\omega(\alpha_i)$ с $L(t_0 < t \leqslant t^*)$. Из последовательности $\{\alpha_i\}$ выберем такую подпо-

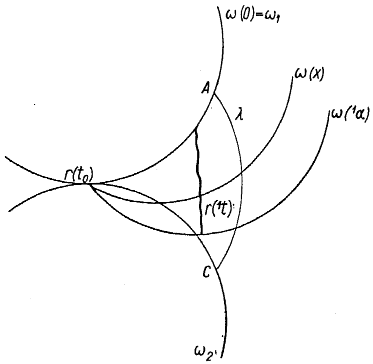

Рис. 2

следовательность $\{\alpha_{i_n}\}$, чтобы последовательность t_{i_n} имела предел; обозначим этот предел через $\bar{t}$. Очевидно, что $\bar{t} > t_0$. Поэтому $r(\bar{t}) \neq r(t_0)$, и $r(\bar{t})$ принадлежит границе круга $\omega(\overline{\alpha})$ и $L(t_0 < t < t^*)$. Утверждение доказано.

Утверждение (+++). *Дуга* $L(t_0 < t \leqslant t^*)$ *не содержит ни одной точки, лежащей на положительном расстоянии от круга* $\omega(\overline{\alpha})$.

Доказательство. Допустим, что такая точка найдётся. Пусть эта точка есть $r(\tilde{t})$, и через эту точку проходит контур круга $\omega(\tilde{\alpha})$. Тогда $\tilde{\alpha} \in S$. Но $\tilde{\alpha} > \overline{\alpha}$, что противоречит определению $\overline{\alpha}$ как точной верхней грани S. Утверждение доказано.

Рассмотрим 2 случая: 1) круг $\omega(\overline{\alpha})$ касается L в точке $r(\bar{t})$; 2) касание не имеет места.

Покажем, что в обоих случаях получается противоречие.

1) Случай касания. Из условия А, утверждения (+++) и того, что $t_0 < \bar{t} < t^*$, следует, что существуют числа t^1 и t^2 такие, что $t^1 < \bar{t} < t^2$, и $L(t^1 < t < t^2)$ идёт в точности по границе круга $\omega(\overline{\alpha})$. Но тогда точки $r(t_{i_k})$, где t_{i_k} принадлежат интервалу (t^1, t^2), не могут лежать на границах кругов $\omega(\alpha_{i_k})$, так как $\alpha_{i_k} < \alpha^*$.

2) Случай отсутствия касания. $r'(\bar{t})$ пересекается с границей круга $\omega(\overline{\alpha})$ под отличным от нуля углом. Тогда из свойств касательного вектора следует, что в любой окрестности числа $\bar{t}$ найдутся такие t, что $r(t)$ нахо-

дится на положительном расстоянии от круга $\omega(\overline{\alpha})$. Но это противоречит утверждению (+++).

Лемма доказана.

11. Следствия. 1. Пусть $t_0 > 0$. Через $\Sigma(t_0)$ обозначим декартову прямоугольную правую систему координат (ξ, η), начало которой есть точка $r(t_0)$, а ось ξ идёт по вектору $r'(t_0)$, так что вектор указывает положительное направление оси. Единицу масштаба в системе $\Sigma(t_0)$ возьмём ту же, которая принята на плоскости.

Через $L_a(t_0)$ обозначим максимальную связную часть L, содержащую $r(t_0)$ и содержащуюся в $B_a(t_0)$.

Пусть $r(t_1)$ и $r(t_2)$ — концы дуги $L_a(t_0)$; $t_1 < t_2$; ξ_{t_1} и ξ_{t_2} — проекции точек $r(t_1)$ и $r(t_2)$ на ось ξ системы координат $\Sigma(t_0)$. Тогда $L_a(t_0)$ есть график однозначной функции $\eta = f(\xi)$, определённой на $[\xi_{t_1}, \xi_{t_2}]$. $f(\xi)$ непрерывна и дифференцируема, причём

$$|f'(\xi)| \leqslant \operatorname{tg}(2\arcsin\tfrac{1}{2}a) = \frac{2a/\sqrt{4-a^2}}{1-a^2/(4-a^2)} = \frac{a\sqrt{4-a^2}}{2-a^2} < 2a\,.$$

2. $r(t_2) \in \tau_a^+(t_0)$. Если $t_1 \neq 0$, то $r(t_1) \in \tau_a^-(t_0)$ (¹).

Число t_2 — обозначим через $s_a^+(t_0)$. Число t_1, если $t_1 \neq 0$, обозначим через $s_a^-(t_0)$. Если же $t_1 = 0$, то $s_a^-(t_0)$ не существует.

3. Если $s_a^-(t_0)$ существует, то $L_a(t_0)$ есть график функции $\eta = f(\xi)$, определённой на отрезке, содержащем отрезок $\left[-a\sqrt{1-\frac{1}{4}a^2},\ a\sqrt{1-\frac{1}{4}a^2}\right]$. Если $a \leqslant \frac{1}{4}$, то $|f'(\xi)| \leqslant \frac{1}{2}$, откуда угол между касательной к графику и осью ξ не превосходит по модулю $\frac{1}{6}\pi$.

Рассмотрим систему координат (ξ', η'), полученную из системы (ξ, η) поворотом на угол, по модулю не превышающий $\frac{1}{6}\pi$. В этой системе $L_a(t_0)$ есть график функции $\eta' = \varphi(\xi')$, для которой $|\varphi'(\xi')| < \sqrt{3}$ всюду на области её задания, причём эта область содержит отрезок $[-\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a]$ $(a \leqslant \frac{1}{4})$.

12. Определение. Пусть $0 < a \leqslant 1$. Говорят, что число $t_0 > 0$ *принадлежит классу* a, если $s_a^-(t_0)$ существует.

Очевидно, что всякое число $t_0 > 0$ принадлежит некоторому положительному классу. Если t_0 принадлежит классу a, и $b < a$, то t_0 принадлежит классу b.

13. Лемма. *Число класса* 1 *существует.*

14. Доказательство. Пусть $t_0 > 0$. $s_1^+(t_0)$ обозначим через $t_1 \cdot \varrho\big(r(t_0), r(t_1)\big) = 1$; $\varrho\big(r(t_2), r(t_1)\big) < 1$, если $t_2 \in (t_0, t_1)$. Отсюда $s_1^-(t_1) = t_0$, то-есть существует.

15. Лемма. *Всякое* $t^* > t_1$ $\big(t_0 > 0,\ t_1 = s_1^+(t_0)\big)$ *принадлежит классу* 1.

16. Доказательство. Диаметр $L(t_0 \leqslant t < t^*)$ больше диаметра $L(t_0 \leqslant t \leqslant t_1)$, который равен 1, откуда следует, что $L(t_0 \leqslant t < t^*)$ не помещается в $\Delta_1^-(t^*)$, но это означает, что $s_1^-(t^*)$ существует.

(¹) Если $t_1 = 0$, $r(t_1)$ может лежать строго внутри $\Delta_a^-(t_0)$.

17. Определение. Числа $t_0 > 0$ и $t_1 > 0$ называются *несмежными*, если $L_1(t_0)$ и $L_1(t_1)$ не имеют общих точек, кроме, быть может, общего конца.

18. Замечание. Для всякого $t_0 > 0$ найдётся t_1 такое, что всякое $t_2 > t_1$ есть число, несмежное с t_0. Действительно, положим $t_1 = s_1^+\big(s_1^+(t_0)\big)$. Оно удовлетворяет поставленному требованию, что видно из тех же соображений, которые изложены в п. 16.

19. Лемма. *Если $t_0 > 0$ и $t_1 > 0$ — числа класса a, несмежные, и $a < \frac{1}{4}$, $\delta < \frac{1}{8}a$, $\varrho\big(r(t_0), r(t_1)\big) < \delta$, то*

$$\big|\sphericalangle\big(l(t_0), l(t_1)\big)\big| < 3a + 2\frac{\delta}{a}.$$

20. Доказательство. В системе координат $\Sigma(t_0)$ рассмотрим полосу $|\xi| \leqslant \frac{15}{16}a$. $\tau_a^-(t_0)$ и $\tau_a^+(t_0)$ лежат вне полосы, так как $a\sqrt{1-\frac{1}{4}a^2} > \frac{15}{16}a$. $L_a(t_0)$ дотягивается от левой стороны полосы до правой. Часть этой кривой, лежащая в полосе, есть график функции $\eta = f(\xi)$, определённой на $[-\frac{15}{16}a, \frac{15}{16}a]$ (по следствию 11,3). Точка $r(t_1)$ принадлежит полосе и не принадлежит графику; предположим для определённости, что $r(t_1)$ лежит выше графика. График лежит выше ломаной

$$\eta = \tilde{f}(\xi) = \begin{cases} 2a\xi, & \text{если} \quad \xi < 0, \\ -2a\xi, & \text{если} \quad \xi \geqslant 0, \end{cases}$$

так как $|f'(\xi)| \leqslant 2a$. Положим $b = \frac{15}{16}a - \delta$. $L_b(t_1)$ дотягивается внутри $\Delta_b^-(t_1)$ от $\tau_b^-(t_1)$ до $r(t_1)$, так как $b < a$, а t_1 — число класса a. Так же

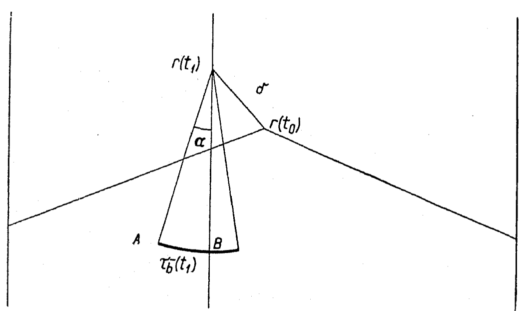

Рис. 3

верно, что $L_b(t_1)$ дотягивается в $\Delta_b^+(t_1)$ от $r(t_1)$ до $\tau_b^+(t_1)$. $\Delta_b^-(t_1)$ и $\Delta_b^+(t_1)$ целиком принадлежат полосе. Если бы $\tau_b^-(t_1)$ или $\tau_b^+(t_1)$ целиком лежала ниже ломаной $\tilde{f}(\xi)$, то $L_a(t_0)$ и $L_b(t_1)$ пересекались бы.

Утверждение (+). *Вертикальная прямая, проходящая через точку $r(t_1)$, не пересекает дуг $\tau_b^-(t_1)$ и $\tau_b^+(t_1)$.*

Доказательство. Допустим противное. Пусть, например, дуга $\tau_b^-(t_1)$ лежит ниже точки $r(t_1)$ (см. рис. 3). Подсчитаем координату η конца A дуги $\tau_b^-(t_1)$. $\alpha = \big|\sphericalangle\big(A, r(t_1), B\big)\big| < \frac{1}{6}\pi$, так как $b < a$, $a < \frac{1}{4}$, и $2\arcsin\frac{1}{2}a < \frac{1}{6}\pi$.

$$\eta_A < \delta - b\cdot\cos\alpha < \delta - \tfrac{1}{2}b\sqrt{3} < \tfrac{1}{8}a - (\tfrac{15}{16}a - \tfrac{1}{8}a)\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{3} < -a\cdot\tfrac{18}{32}.$$

$\tilde{f}(\xi)$ всюду больше, чем $-2a\cdot\frac{15}{16}a = -\frac{15}{8}a^2 > -\frac{15}{32}a$. Но $-\frac{15}{32}a > -\frac{18}{32}a$. Утверждение доказано.

Предположим для определённости, что $0 < \sphericalangle\big(r'(t_0), r'(t_1)\big) < \frac{1}{2}\pi$. Пусть A — верхний конец дуги $\tau_b^-(t_1)$.

$$\sphericalangle\big(r'(t_0), [A, r(t_1)]\big) < \operatorname{arctg}2a + \arcsin\frac{\delta}{b} < 2a + \operatorname{tg}\arcsin\frac{\delta}{b} =$$

$$= 2a + \frac{\delta}{\sqrt{b^2-\delta^2}} = 2a + \frac{\delta}{\sqrt{b-\delta}\cdot\sqrt{\frac{15}{16}a}} < 2a + \frac{2\delta}{a}$$

$$\big(b - \delta = \tfrac{15}{16}a - 2\delta > \tfrac{15}{16}a - \tfrac{1}{4}a = \tfrac{11}{16}a\big).$$

$$\big|\sphericalangle\big(r'(t_1), [A, r(t_1)]\big)\big| = \arcsin\tfrac{1}{2}b < \arcsin\tfrac{1}{2}a < a.$$

Отсюда

$$\sphericalangle\big(r'(t_0), r'(t_1)\big) < 2a + \frac{2\delta}{a} + a = 3a + 2\frac{\delta}{a}.$$

Аналогично рассматривается случай, когда $0 > \sphericalangle\big(r'(t_0), r'(t_1)\big) > -\frac{1}{2}\pi$, а также когда этот угол по модулю превышает $\frac{1}{2}\pi$. Лемма доказана.

21. Лемма. *Пусть $t_0 > 0$, $t_1 > 0$. Если $\varrho\big(r(t_0), r(t_1)\big) < 1/100$, то*

$$\big|\sphericalangle\big(l(t_0), l(t_1)\big)\big| < \tfrac{1}{6}\pi.$$

22. Доказательство. Пусть t_0 — класса a, t_1 — класса b, $\varrho\big(r(t_0), r(t_1)\big) = \delta < 1/100$. Положим $c = \min(a, b, 1/1000)$; $c > 0$. Существует число t_2, несмежное с t_0, класса 1 и такое, что

$$\varrho\big(r(t_0), r(t_2)\big) < \min\big(\tfrac{1}{2}(1/100 - \delta), c/1000\big).$$

Так как t_2 — число класса c, то, применяя лемму 19, имеем $\big|\sphericalangle\big(l(t_0), l(t_2)\big)\big| < 1/200$. Существует число t_3, несмежное с t_1 и t_2, класса 1 и такое, что

$$\varrho\big(r(t_1), r(t_3)\big) < \min\big(\tfrac{1}{2}(1/100 - \delta), c/1000\big).$$

Тогда

$$\big|\sphericalangle\big(l(t_1), l(t_3)\big)\big| < 1/200. \qquad \varrho\big(r(t_2), r(t_3)\big) < 1/100,$$

и t_2 и t_3 — числа класса $\frac{1}{12}$. Поэтому

$$\big|\sphericalangle\big(l(t_2), l(t_3)\big)\big| < \tfrac{1}{4} + 2\cdot\tfrac{12}{100} = \tfrac{49}{100}.$$

Отсюда $\big|\sphericalangle\big(l(t_0), l(t_1)\big)\big| < \frac{1}{2} < \frac{1}{6}\pi$. Лемма доказана.

23. Пусть $t_0 > 0$, $t_1 > t_0$. Определим число $U(t_0, t_1)$ — „вращение кривой“. Определять будем так:

Рассмотрим числа $t_0 = t^0 < t^1 < \ldots < t^k = t_1$ такие, что для любого i $(0 \leqslant i < k)$ и любых x и y, принадлежащих отрезку $[t^i, t^{i+1}]$, векторы $r'(x)$ и $r'(y)$ не противоположно направлены. Положим $\Delta U_i = \sphericalangle\big(r'(t^i), r'(t^{i+1})\big)$. Положим $U(t_0, t_1) = \sum_{i=0}^{k-1} \Delta U_i$. Легко видеть, что $U(t_0, t_1)$ не зависит от выбора точек $t^1, \ldots, t^{k-1}$, удовлетворяющих перечисленным условиям.

(Если l — ориентированная простая дуга с непрерывно вращающейся касательной, то аналогично определим $U(l)$ — вращение этой дуги).

Пусть Ω — ориентированный гомеоморф окружности, являющийся суммой двух плоских простых дуг l_1 и l_2 (ориентированных в соответствии с ориентацией окружности), имеющих общие концы A и B (A — первый конец l_1) и обладающих непрерывной касательной (в концах односторонней). Вектор касательной к l_i $(i = 1, 2)$ в точке x обозначим через $l_i'(x)$. Пусть $l_1'(A)$ и $l_2'(A)$ не противоположно направлены, и $l_1'(B)$ и $l_2'(B)$ не противоположно направлены. Положим $\Delta U_A = \sphericalangle\big(l_2'(A), l_1'(A)\big)$, $\Delta U_B = \sphericalangle\big(l_1'(B), l_2'(B)\big)$. Положим $U(\Omega) = U(l_1) + U(l_2) + \Delta U_A + \Delta U_B$. Известно, что $U(\Omega) = \pm 2\pi$.

24. Определение. Дуга $L(t_0 \leqslant t \leqslant t_1)$ называется *ε-петлёй*, если точки t_0 и t_1 несмежные, $\varrho\big(r(t_0), r(t_1)\big) < \min(1/100, \varepsilon)$, она пересекается с отрезком $[r(t_1), r(t_0)]$ только по его концам (обозначим через Ω гомеоморф окружности $L(t_0 \leqslant t \leqslant t_1) \cup [r(t_0), r(t_1)]$; в соответствии с п. 23 приобретают смысл обозначения $\Delta U_{r(t_0)}$, $\Delta U_{r(t_1)}$) и

$$\big||\Delta U_{r(t_0)}| - \tfrac{1}{2}\pi\big| < \tfrac{1}{6}\pi, \quad \big||\Delta U_{r(t_1)}| - \tfrac{1}{2}\pi\big| < \tfrac{1}{6}\pi .$$

ε-петлёй 1-го типа называется ε-петля $L(t_0 \leqslant t \leqslant t_1)$, для которой $\big||U(t_0, t_1)| - \pi\big| < \frac{1}{6}\pi$;

ε-петлёй 2-го типа называется ε-петля $L(t_0 \leqslant t \leqslant t_1)$, для которой $\big||U(t_0, t_1)| - 2\pi\big| < \frac{1}{6}\pi$;

ε-петлёй 3-го типа называется ε-петля $L(t_0 \leqslant t \leqslant t_1)$, для которой $\big||U(t_0, t_1)| - 3\pi\big| < \frac{1}{6}\pi$.

25. Лемма. *Всякая ε-петля есть ε-петля одного из трёх типов.*

26. Доказательство. Угол между $l(t_0)$ и $l(t_1)$, взятый по модулю, не превышает $\frac{1}{6}\pi$ (см. п. 21). Отсюда, $|\Delta U_{r(t_0)} + \Delta U_{r(t_1)}|$ либо отличается от 0 не больше, чем на $\frac{1}{6}\pi$, либо от π. $U(\Omega) = \pm 2\pi$, где $\Omega = L(t_0 \leqslant t \leqslant t_1) \cup$ $\cup [r(t_1), r(t_0)]$. Комбинируя все эти случаи, получаем каждый раз ε-петлю одного из типов.

27. Замечание. Пусть $L(t_0 \leqslant t \leqslant t_1)$ — ε-петля 1-го типа, причём $U(\Omega) = -2\pi$, и, следовательно,

$$|U(t_0, t_1) + \pi| < \tfrac{1}{6}\pi, \quad |\Delta U_{r(t_1)} + \tfrac{1}{2}\pi| < \tfrac{1}{6}\pi, \quad |\Delta U_{r(t_0)} + \tfrac{1}{2}\pi| < \tfrac{1}{6}\pi .$$

Тогда точки плоскости, достаточно близкие к середине отрезка $[r(t_1), r(t_0)]$ и лежащие справа от него, принадлежат внутренней области гомеоморфа окружности Ω.

Это легко доказывается сопоставлением функции вращения касательной и угловой функции кривой относительно точки, с помощью которой доказывается теорема Жордана [1].

Аналогичные утверждения можно сделать для ε-петель других типов.

28. Определение. Пусть G — открытое множество, $\alpha \in G$, $\beta \in G$. Говорят, что точки α и β *ε-связаны* в G, если существует ломаная, соединяющая точки α и β и принадлежащая G вместе со своей ε-окрестностью.

Две области M_1 и M_2, принадлежащие G, ε-связаны в G, если найдутся точки $\alpha \in M_1$ и $\beta \in M_2$, такие что α и β ε-связаны.

29. Обозначим через $\bar{L}$ замыкание множества L (вообще если X — множество, то $\bar{X}$ — замыкание X). Через I^* обозначим 2-окрестность квадрата I; через $\mathfrak{J}$ обозначим дополнение к $\bar{L}$ в I^*.

Лемма. *Если при всяком положительном $\varepsilon < 1/800$ найдётся четвёрка открытых кругов радиуса $1/5000$, принадлежащих $\mathfrak{J}$, любые два из которых не являются ε-связанными в $\mathfrak{J}$, то дополнение к $\bar{L}$ содержит по крайней мере 4 компоненты.*

30. Доказательство. Пусть условия леммы имеют место. Рассмотрим числовую последовательность

$$\varepsilon_i = \frac{1}{2^i} \cdot \frac{1}{5000} \qquad (i = 1, 2, \ldots) .$$

Для каждого ε_i $(i \geqslant 1)$ определим четвёрку кругов ω_i^1, ω_i^2, ω_i^3, ω_i^4, о которых говорится в условии; центры их обозначим через C_i^1, C_i^2, C_i^3, C_i^4 соответственно. Выберем такую растущую последовательность натуральных чисел $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$, чтобы сходились последовательности:

(1) $C_{n_1}^1, C_{n_2}^1, \ldots, C_{n_k}^1, \ldots$

(2) $C_{n_1}^2, C_{n_2}^2, \ldots, C_{n_k}^2, \ldots$

(3) $C_{n_1}^3, C_{n_2}^3, \ldots, C_{n_k}^3, \ldots$

(4) $C_{n_1}^4, C_{n_2}^4, \ldots, C_{n_k}^4, \ldots$

Пределы их обозначим соответственно через C^1, C^2, C^3, C^4. Открытый круг радиуса $1/5000$ с центром в точке C^i $(i = 1, 2, 3, 4)$ обозначим через ω^i. Очевидно, что каждый круг ω^i принадлежит $\mathfrak{J}$. Докажем, что круги ω^1 и ω^2 принадлежат различным компонентам $\mathfrak{J}$ (этим всё будет доказано). Допустим противное. Тогда, в силу открытости $\mathfrak{J}$, точки C^1 и C^2 можно соединить ломаной l, целиком принадлежащей $\mathfrak{J}$. Положим $\varrho^* = \varrho(l, \bar{L} \cup I^{*\prime})$ (через $I^{*\prime}$ обозначена граница I^*; вообще, если X — множество на плоскости, то через X' обозначается граница X); $\varrho^* > 0$. ϱ^*-окрестность ломаной l входит в $\mathfrak{J}$. Рассмотрим столь большое N, чтобы:

(1) точка C^1_{nN} лежала в $\frac{1}{2}\varrho^*$-окрестности точки C^1,

(2) точка C^2_{nN} лежала в $\frac{1}{2}\varrho^*$-окрестности точки C^2,

(3) круги ω^1_{nN} и ω^2_{nN} не были $\frac{1}{2}\varrho^*$-связанными в $\mathfrak{I}$.

Образуем ломаную $\bar{l}$, которая есть сумма ломаной l и отрезков $[C^1, C^1_{nN}]$ и $[C^2, C^2_{nN}]$. $\bar{l}$ целиком принадлежит $\mathfrak{I}$, $\frac{1}{2}\varrho^*$-окрестность $\bar{l}$ тоже целиком принадлежит $\mathfrak{I}$, так как она принадлежит ϱ^*-окрестности l. Таким образом, круги ω^1_{nN} и ω^2_{nN} оказались $\frac{1}{2}\varrho^*$-связанными, что противоречит определению N. Лемма доказана.

31. Лемма. *Пусть* $\varepsilon < 1/400$, $L(t_0 \leqslant t \leqslant t_1)$ — *ε-петля* 1-*го типа. Тогда в области, внутренней по отношению к* $L(t_0 \leqslant t \leqslant t_1) \cup [r(t_1), r(t_0)]$, *найдётся круг радиуса* 1/3200.

Замечание. В работе Г. Пестова и В. Ионина ([3]) доказана теорема: Если кривизна гладкой замкнутой несамопересекающейся кривой не превышает 1, то в область, ограниченную этой кривой, можно вложить круг радиуса 1. Следуя методу авторов, можно усилить лемму 31, именно доказать, что в нашей области найдётся круг радиуса 1. Такое утверждение является усилением теоремы Г. Пестова. Это усиление, однако, не необходимо для наших целей.

32. Доказательство леммы. 1. Так как $L(t_0 \leqslant t \leqslant t_1)$ есть ε-петля первого типа, то $U(t_0, t_1)$ и $\Delta U_{r(t_1)} + \Delta U_{r(t_0)}$ имеют одинаковый знак, и каждая из этих величин, взятая по модулю, близка к π. Допустим для определённости, что они отрицательны. Тогда

$$|U(t_0, t_1) + \pi| < \tfrac{1}{6}\pi; \qquad |\Delta U_{r(t_1)} + \Delta U_{r(t_0)} + \pi| < \tfrac{1}{6}\pi;$$

$$|\Delta U_{r(t_1)} + \tfrac{1}{2}\pi| < \tfrac{1}{6}\pi; \qquad |\Delta U_{r(t_0)} + \tfrac{1}{2}\pi| < \tfrac{1}{6}\pi\,.$$

Через $\sigma(t)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant t_1)$ обозначим отрезок длины 1/100, один конец которого есть точка $r(t)$, а сам отрезок перпендикулярен к L в этой точке и лежит справа от вектора касательной (ориентируем этот отрезок от точки $r(t)$). Отрезок $\sigma(t_0)$ отходит от касательной в точке $r(t_0)$ в ту же сторону от неё, что и отрезок $[r(t_0), r(t_1)]$.

Пусть $\bar{t} \in [t_0, t_1]$. Обозначим $L\big(\bar{t} < t \leqslant s^+_{1/4}(t_1)\big)$ через $L^*(\bar{t})$.

Замечание (+). Отрезок $[r(t_1), r(t_0)]$ и дуга $L\big(t_1 < t \leqslant s^+_{1/4}(t_1)\big)$ не пересекаются, так как в системе координат $\Sigma(t_1)$ $L_{1/4}(t_1)$ есть график функции, производная которой не превышает $\frac{1}{2}$, а $\big|\sphericalangle\big([r(t_1), r(t_0)], r'(t_1)\big)\big|$ отличается от $\frac{1}{2}\pi$ не больше, чем на $\frac{1}{6}\pi$.

2. К множеству E отнесём всякое такое $t \in [t_0, t_1]$, что выполняются два условия:

а) отрезок $\sigma(t)$ имеет общую внутреннюю точку с $L^*(t)$ (обозначим точку их пересечения, ближайшую по плоскости к $r(t)$, через $p(t)$; такое x, что $r(x) = p(t)$, обозначим через $q(t)$), и

б) $\sphericalangle\big(r'\big(q(t)\big), \sigma(t)\big) > 0$.

3. Утверждение (+). $t_0 \in E$.

4. Доказательство. Пусть ξ, η — координаты в системе $\Sigma(t_0)$. Систем $\Sigma(t_1)$ может быть получена из системы $\Sigma(t_0)$ изменением ориентации осей, поворотом на угол, не превышающий $\frac{1}{6}\pi$, и сдвигом. Поэтому (см. следствие 11, 3) $L_{1/4}(t_1)$ есть график функции $\eta = \varphi(\xi)$. Обозначим через ξ_{t_1} и η_{t_1} ξ-координату и η-координату точки $r(t_1)$. $|\xi_{t_1}| > 1/800$, так как $\varrho\big(r(t_0), r(t_1)\big) < 1/400$, а $\sphericalangle\big([r(t_1), r(t_0)], r'(t_0)\big)$ отличается от прямого не больше, чем на $\frac{1}{6}\pi$. Область определения функции $\eta = \varphi(\xi)$ содержит отрезок $[\xi_{t_1} - \frac{1}{8}, \xi_{t_1} + \frac{1}{8}]$, так что точка $\xi = 0$ входит в эту область. $|\eta_{t_1}| < 1/400$. $|\varphi'(\xi)| < \sqrt{3}$ всюду на отрезке $[\xi_{t_1} - \frac{1}{8}, \xi_{t_1} + \frac{1}{8}]$. Отсюда $|\varphi(0)| < 1/100$, но это и означает, что отрезок $\sigma(t_0)$ пересекает (и притом в единственной точке) кривую $L_{1/4}(t_1) \subset L^*(t_0)$. Эту точку пересечения обозначим через $p^*(t_0)$; x такое, что $r(x) = p^*(t_0)$, обозначим через $q^*(t_0)$. Очевидно, что $\sphericalangle\big(r'\big(q^*(t_0)\big), \sigma(t_0)\big) > 0$. Внутри отрезка $[r(t_0), p^*(t_0)]$ нет точек из $L^*(t_0)$. Действительно, допустим, что точка $r(t^*)$ из $L^*(t_0)$ принадлежит этому отрезку. $\varrho\big(r(t^*), r(t_0)\big) < 1/100$, следовательно $L_{1/4}(t^*)$ есть график функции в системе $\Sigma(t_0)$ (см п. 21). Легко видеть, что точка ξ_{t_1} входит в её область задания. Тогда $L_{1/4}(t^*)$ пересекает $[r(t_1), r(t_0)]$ во внутренней точке, что противоречит определению ε-петли и замечанию (+). Утверждение (+) доказано.

5. Утверждение (++). *Всякое* $t \in [s^-_{1/4}(t_1), t_1]$ *не входит в* E.

6. Доказательство. Система $\Sigma(t)$ повёрнута по отношению к системе $\Sigma(t_1)$ не больше, чем на $\frac{1}{6}\pi$, и в системе $\Sigma(t)$ $L_{1/4}(t_1)$ есть график функции. $L^*(t) \subset L_{1/4}(t_1)$. Следовательно, $\sigma(t)$ и $L^*(t)$ не имеют общих точек. Утверждение доказано.

7. Утверждение (+++). *Если* $t^{(1)}$ *и* $t^{(2)}$ *входят в* $[t_0, t_1]$, *и* $s^+_{1/2000}(t^{(1)}) > t^{(2)} > t^{(1)}$, *то*

(а) $\sigma(t^{(2)})$ *не пересекается с прямой, содержащей* $\sigma(t^{(1)})$, *и лежит от этой прямой по ту сторону, в которую направлен вектор* $r'(t^{(1)})$,

(б) *теоретико-множественное отклонение* $\sigma(t^{(1)})$ *и* $\sigma(t^{(2)})$ *меньше* 1/1970.

8. Доказательство. Пусть ξ, η — координаты в системе $\Sigma(t^{(1)})$. Координаты второго конца отрезка $\sigma(t^{(1)})$ суть: $(0, -1/100)$. $\varrho\big(r(t^{(1)}), r(t^{(2)})\big) = \delta < 1/2000$. Положим $\sphericalangle\big(\sigma(t^{(1)}), \sigma(t^{(2)})\big) = \alpha$. $|\sin\alpha| < \delta$, $|\sin\frac{1}{2}\alpha| \leqslant \frac{1}{2}\delta$ (по лемме 9). Координаты первого конца $\sigma(t^{(2)})$ обозначим через $\xi^{(1)}_{t^{(2)}}$, $\eta^{(1)}_{t^{(2)}}$; координаты второго конца $\sigma(t^{(2)})$ — через $\xi^{(2)}_{t^{(2)}}$, $\eta^{(2)}_{t^{(2)}}$.

$$\delta \cdot \sqrt{1 - \tfrac{1}{4}\delta^2} \leqslant \xi^{(1)}_{t^{(2)}} \leqslant \delta; \qquad |\eta^{(1)}_{t^{(2)}}| \leqslant \tfrac{1}{2}\delta^2; \qquad \xi^{(2)}_{t^{(2)}} = \xi^{(1)}_{t^{(2)}} + \tfrac{1}{100}\sin\alpha;$$

$$\eta^{(2)}_{t^{(2)}} = \eta^{(1)}_{t^{(2)}} - \tfrac{1}{100}(\cos\alpha).$$

$$\xi^{(1)}_{t^{(2)}} > 0, \qquad \xi^{(2)}_{t^{(2)}} \geqslant \delta\sqrt{1 - \tfrac{1}{4}\delta^2} - \delta/100 = \delta\big(\sqrt{1 - \tfrac{1}{4}\delta^2} - 1/100\big) > 0.$$

Отсюда следует пункт а) нашего утверждения.

$$\xi^{(1)}_{t^{(2)}} \leqslant \frac{1}{2000}\,; \qquad \eta^{(1)}_{t^{(2)}} \leqslant \frac{1}{8\cdot 10^6}\,; \qquad \xi^{(2)}_{t^{(2)}} \leqslant \frac{1}{1980}\,;$$

$$\left|\eta^{(2)}_{t^{(2)}} + \frac{1}{100}\right| \leqslant \frac{1}{8\cdot 10^6} + \frac{1}{100}(1-\cos\alpha) = \frac{1}{8\cdot 10^6} + \frac{2\cdot \sin^2 \frac{1}{2}\alpha}{100} \leqslant \frac{1}{8\cdot 10^6} + \frac{\delta^2}{200} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{8\cdot 10^6} + \frac{1}{4\cdot 10^6\cdot 200} \leqslant \frac{1}{10^6}.$$

Отсюда расстояние между вторыми концами $\sigma(t^{(1)})$ и $\sigma(t^{(2)})$ меньше 1/1970. Утверждение доказано.

9. Пусть $\bar{t} \in E$. Рассмотрим гомеоморф окружности $[p(\bar{t}), r(\bar{t})] \cup L(\bar{t} < t < q(\bar{t}))$; его дополнение на плоскости есть сумма двух компонент, из которых одна ограничена; обозначим её через $\omega(\bar{t})$ (про такую область будем в дальнейшем говорить, что она ограничена данной кривой). Определим подмножество E^* множества E следующим образом: число $t \in E$ принадлежит E^*, если $\omega(t) \subset \omega(t_0)$.

Из этого условия и из пункта б) определения множества E следует, в частности, что $q(t) \leqslant q(t_0)$.

Очевидно, что область $\omega(t)$ лежит по левую сторону от отрезка $[r(t), p(t)]$. $t_0 \in E^*$.

10. Утверждение $\left(\begin{smallmatrix}+&+\\+&+\end{smallmatrix}\right)$. *Если* $t^{(1)} \in E^*$, *и* $\varrho\big(r(t^{(1)}), p(t^{(1)})\big) < 1/120$, *то всякое* $t^{(2)}$, *удовлетворяющее неравенствам* $t^{(1)} < t^{(2)} < \min\big(t_1, s^{+}_{1/2000}(t^{(1)})\big)$, *входит в* E^*.

11. Доказательство. Пусть ξ, η — координаты в системе $\Sigma(t^{(1)})$. Дуга $l = L\Big(s^{-}_{1/4}\big(q(t^{(1)})\big) \leqslant t \leqslant q(t^{(1)})\Big)$ есть график функции $\eta = \varphi(\xi)$ в системе $\Sigma(t^{(1)})$, причём $|\varphi'(\xi)| \leqslant \sqrt{3}$, а область её определения содержит отрезок $[0, \frac{1}{8}]$. Заметим, что $s^{-}_{1/4}\big(q(t^{(1)})\big)$ существует, так как в противном случае оказалось бы, что $r(0) \in L_{1/4}\big(q(t^{(1)})\big)$, что возможно лишь если $r(t^{(1)}) \in L_{1/4}\big(q(t^{(1)})\big)$, так как $0 < t^{(1)} < q(t^{(1)})$; но $r(t^{(1)}) \notin L_{1/4}\big(q(t^{(1)})\big)$ в силу того, что $L_{1/4}\big(q(t^{(1)})\big)$ есть график функции в системе $\Sigma(t^{(1)})$.

Рассмотрим на отрезке $[0, \frac{1}{8}]$ линейную функцию $f(\xi) = -1/120 - \xi\cdot\sqrt{3}$. На этом отрезке имеет место неравенство: $f(\xi) \leqslant \varphi(\xi)$. Но из утверждения $(+++)$, второй конец $\sigma(t^{(2)})$ проектируется на этот отрезок и лежит ниже $f(\xi)$. Следовательно, $\sigma(t^{(2)})$ имеет неконцевую точку на $l \subset L^*(t^{(2)})$. (Точку пересечения $\sigma(t^{(2)})$ с l обозначим через $\bar{p}(t^{(2)})$; соответствующее t — через $\bar{q}(t^{(2)})$). Очевидно, что $\measuredangle\Big(r'\big(\bar{q}(t^{(2)})\big), \sigma(t^{(2)})\Big) > 0$.

Докажем, что на отрезке $[r(t^{(2)}), \bar{p}(t^{(2)})]$ нет других точек $L^*(t^{(2)})$. Сначала докажем, что на этом отрезке нет точек из $L\big(t^{(2)} < t < \bar{q}(t^{(2)})\big)$. Допустим противное; пусть $r(t^{(3)})$ — такая точка. Так как $\varrho\big(r(t^{(3)}), r(t^{(2)})\big) < 1/100$, и $\varrho\big(r(t^{(2)}), p(t^{(1)})\big) < 1/100$ то $L_{1/4}(t^{(3)})$, $L_{1/4}\big(q(t^{(1)})\big)$ и $L_{1/4}(t^{(2)})$ суть графики некоторых функций в системе $\Sigma(t^{(2)})$ (следствие 11,3 и 11,1 и лемма 21). Обозначим эти функции соответственно через $\eta' = \psi^3(\xi')$, $\eta' = \psi^1(\xi')$ и $\eta' = \psi^2(\xi')$. $\psi^2(0) > \psi^3(0) > \psi^1(0)$, поэтому $L_{1/4}(t^{(3)})$, $L_{1/4}\big(q(t^{(1)})\big)$ и $L_{1/4}(t^{(2)})$ не имеют общих точек. Отсюда

$$t^{(2)} < s^{-}_{1/4}(t^{(3)}) < t^{(3)} < s^{+}_{1/4}(t^{(3)}) < q(t^{(1)}),$$

то-есть во всяком случае $s^{-}_{1/4}(t^{(3)})$ существует, и $L_{1/4}(t^{(3)})$ целиком принадлежит $L^*(t^{(2)})$. Область определения функции ψ^3 содержит отрезок $[-\frac{1}{8}, \frac{1}{8}]$, откуда следует, что $L_{1/4}(t^{(3)})$ пересекает $\sigma(t^{(1)})$ между точками $r(t^{(1)})$ и $p(t^{(1)})$, что противоречит определению точки $p(t^{(1)})$. Область, ограниченную кривой $L\big(t^{(2)} < t < \bar{q}(t^{(2)})\big) \cup [\bar{p}(t^{(2)}), r(t^{(2)})]$, обозначим через $\omega(t^{(2)})$. Из утверждения $(+++)$, (а) следует, что $\omega(t^{(2)}) \subset \omega(t^{(1)})$. Поэтому дуга $l = L^*(t^{(2)}) \setminus L\big(t^{(2)} < t \leqslant \bar{q}(t^{(2)})\big)$ не пересекает отрезка $[r(t^{(2)}), \bar{p}(t^{(2)})]$. Действительно, положим

$$l_1 = L\big(\bar{q}(t^{(2)}) < t \leqslant q(t^{(1)})\big), \qquad l_2 = L^*(t^{(2)}) \setminus L\big(t^{(2)} < t \leqslant q(t^{(1)})\big).$$

$l = l_1 \cup l_2$. l_1 не пересекает отрезка $[r(t^{(2)}), \bar{p}(t^{(2)})]$, так как является частью графика функции $\psi^1(\xi')$. l_2 не пересекает этого отрезка, так как в противном случае она должна была бы пересечь отрезок $[r(t^{(1)}), p(t^{(1)})]$, что противоречит определению точки $p(t^{(1)})$. Следовательно, $\bar{p}(t^{(2)}) = p(t^{(2)})$, $\bar{q}(t^{(2)}) = q(t^{(2)})$. $t^{(2)} \in E$, и $t^{(2)} \in E^*$. Утверждение доказано.

12. Рассмотрим компоненту $\tilde{E}$ множества E^*, содержащую точку t_0. Положим $\bar{t} = \sup \tilde{E}$. Рассмотрим число $t^{(1)} \in \tilde{E}$, удовлетворяющее неравенствам: $t_0 \leqslant t^{(1)}$, $s^{-}_{1/2000}(\bar{t}) < t^{(1)} \leqslant \bar{t}$.

Замечание $(++)$. $1/120 \leqslant \varrho\big(r(t^{(1)}), p(t^{(1)})\big) < 1/100$.

Первое из этих неравенств следует из утверждения $\left(\begin{smallmatrix}+&+\\+&+\end{smallmatrix}\right)$ и того, что существует $t^{(3)} > \bar{t}$ такое, что $t^{(3)} < s^{+}_{1/2000}(t^{(1)})$.

13. Утверждение $\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{++}{+++}\right)$. *Пусть* C — *точка отрезка* $\sigma(t^{(1)})$, *расстояние которой от* $r(t^{(1)})$ *равно* 1/400. *Отрезок* $[r(t^{(1)}), C]$ *не пересекается с отрезком* $[r(t_0), r(t_1)]$.

14. Доказательство. Допустим противное; пусть A — точка пересечения.

$$\varrho\big(r(t^{(1)}), r(t_1)\big) < \tfrac{1}{400} + \tfrac{1}{400} = \tfrac{1}{200},$$

следовательно, $L_{1/4}(t_1)$ есть график некоторой функции $\eta = f(\xi)$ в системе $\Sigma(t^{(1)})$. Пусть ξ_{t_1} — ξ-координата точки $r(t_1)$. $|\xi_{t_1}| < 1/400$. Область определения функции $f(\xi)$ содержит отрезок $[\xi_{t_1} - \frac{1}{8}, \xi_{t_1} + \frac{1}{8}]$, то-есть содержит точку $\xi = 0$. $t^{(1)} < s^{-}_{1/4}(t_1)$, по утверждению $(++)$.

Рассмотрим два случая: (а) $t^{(1)} > s^{+}_{1/4}(t_0)$ и (б) $t^{(1)} \leqslant s^{+}_{1/4}(t_0)$.

(а) Дуга $L_{1/4}(t^{(1)})$ входит в $L(t_0 < t < t_1)$. Она есть график некоторой функции $\eta = \varphi(\xi)$ в системе $\Sigma(t^{(1)})$; область определения $\varphi(\xi)$ содержит точку ξ_{t_1}. $L_{1/4}(t^{(1)})$ не пересекает отрезка $[r(t_0), r(t_1)]$, так как дуга $L(t_0 < < t < t_1)$ не пересекает этого отрезка. Но отрезок $[r(t_0), r(t_1)]$ лежит в полосе $|\xi| < 1/400$ и имеет точку Δ внутри $\sigma(t^{(1)})$. Следовательно, $r(t_1)$ лежит ниже графика функции $\varphi(\xi)$ (так как $\varphi(0) = 0$), и $f(\xi_{t_1}) < \varphi(\xi_{t_1})$. Отсюда $f(0) < 0$. Рассмотрим функцию

$$\eta = g(\xi) = \begin{cases} -3/400 - \sqrt{3}\cdot\xi & \text{при} \quad \xi < 0\,, \\ -3/400 + \sqrt{3}\cdot\xi & \text{при} \quad \xi \geqslant 0\,. \end{cases}$$

График $g(\xi)$ при $\xi \leqslant 0$ есть отрезок прямой, касающейся окружности Q радиуса $1/400$ с центром в точке C. Аналогично, при $\xi \geqslant 0$. Так как $r(t_1)$ лежит выше нижней полуокружности Q, и $|f'(\xi)| < \sqrt{3}$, то имеем $r(t_1)$ лежит выше ... $L_{1/4}(t_1)$ пересекает отрезок $\sigma(t^{(1)})$ с другой стороны $f(0) > -1/120$, то-есть $L_{1/4}(t_1)$ пересекает отрезок $\sigma(t^{(1)})$ в точке, отстоящей от $r(t^{(1)})$ меньше, чем на $1/120$. $L_{1/4}(t_1) \subset L^*(t^{(1)})$; следовательно, $\varrho\big(r(t^{(1)}), p(t^{(1)})\big) < 1/120$, что противоречит замечанию (++).

(б) $\big|\measuredangle\big(\sigma(t^{(1)}), \sigma(t_0)\big)\big| < \frac{1}{6}\pi$; $\big|\measuredangle\big(\sigma(t_0), [r(t_0), r(t_1)]\big)\big| < \frac{1}{6}\pi$; отсюда $\big|\measuredangle\big(\sigma(t^{(1)}), [r(t_0), r(t_1)]\big)\big| < \frac{1}{3}\pi$. Рассмотрим область ω, ограниченную суммой $L(t_0 < t < t_1) \cup [r(t_1), r(t_0)]$. Точки отрезка $\sigma(t^{(1)})$, достаточно близкие к $r(t^{(1)})$, лежат в ω. В точке Δ отрезок $\sigma(t^{(1)})$ переходит из области ω в её дополнение. Из этого и из замечания 27 следует, что $r(t_1)$ лежит левее отрезка $\sigma(t^{(1)})$ (в смысле его направления), то-есть правее оси ξ системе $\Sigma(t^{(1)})$. Это значит, что ось $-\xi'$ в системе $\Sigma(t_1)$ повёрнута по отношению к оси ξ в системе $\Sigma(t^{(1)})$ против часовой стрелки (не больше, чем на $\frac{1}{6}\pi$). Следовательно, для всякого $r(t_2) \in L_{1/4}(t_1)$ $\measuredangle\big(-r'(t_2), r'(t^{(1)})\big) < \frac{1}{6}\pi$, и, следовательно, $f(0) < 0$ (см. 24). Кроме того, $f(0) > -1/120$; это доказывается как в пункте (а). Отсюда получается противоречие как в пункте (а). Утверждение доказано.

15. Рассмотрим равнобедренный треугольник Δ, одна сторона которого есть отрезок $[r(t^{(1)}), C]$, углы при вершине C и при вершине $r(t^{(1)})$ равны $\frac{1}{6}\pi$ и который прилегает к отрезку $\sigma(t^{(1)})$ слева в смысле направления этого отрезка. В него помещается круг радиуса $1/3200$. Докажем, что внутри Δ нет точек дуги $L(t_0 \leqslant t \leqslant t_1)$. Пусть ξ, η — координаты в системе $\Sigma(t^{(1)})$. $L\big(t^{(1)} \leqslant t \leqslant s^{+}_{1/4}(t^{(1)})\big)$ и $L\big(s^{-}_{1/4}\big(q(t^{(1)})\big) \leqslant t \leqslant q(t^{(1)})\big)$ суть графики некоторых функций $\eta = f(\xi)$ и $\eta = \varphi(\xi)$ соответственно. Отрезок $[0, \frac{1}{8}]$ входит в область их определения. $|f'(\xi)| < \frac{1}{2}$; $|\varphi'(\xi)| < \sqrt{3}$ всюду на этом отрезке. Поэтому графики этих функций не имеют точек внутри Δ. Если $t^{(1)} < t^{(2)} < q(t^{(1)})$, то $r(t^{(2)})$ не лежит внутри Δ. Действительно, допустим противное. Тогда $\varrho\big(r(t^{(2)}), r(t^{(1)})\big) < 1/100$, следовательно, $L_{1/4}(t^{(2)})$ есть график некоторой функции $\eta = \psi(\xi)$, причём $\xi = 0$ входит в область её определения. Тогда график $\psi(\xi)$ пересекает отрезок $[r(t^{(1)}), p(t^{(1)})]$, что противоречит определению точки $p(t^{(1)})$. Следовательно, $\Delta \subset \omega(t^{(1)})$. Точки дуги $L(t_0 \leqslant t \leqslant t^{(1)})$ не могут лежать внутри Δ, так как они входят в границу множества $\omega(t_0) \setminus \omega(t^{(1)})$, которое лежит вне $\omega(t^{(1)})$. Точки дуги $L^*\big(q(t^{(1)})\big)$, достаточно близкие

к точке $p(t^{(1)})$, лежат вне $\omega(t^{(1)})$. Поэтому и остальные точки этой дуги лежат вне $\omega(t^{(1)})$, так как эта дуга не пересекает границу $\omega(t^{(1)})$. Следовательно, внутри Δ нет точек из $L(t_0 \leqslant t \leqslant t_1)$. Лемма доказана.

33. Определение. Пусть $\varepsilon < 1/800$. Система дуг L_1, L_2, L_3, которые являются частями дуги L, попарно не имеющими общих внутренних точек, называется *ε-фигурой*, если выполнены следующие условия:

(1) Концы этих дуг принадлежат некоторому отрезку d длины меньше ε;

(2) если $r(t)$ — неконцевая точка L_i $(i = 1, 2, 3)$, то $r(t)$ не есть точка d;

(3) L_1 есть ε-петля 3-го типа; L_2 и L_3 — ε-петли 1-го типа (пусть концы L_1 суть точки $r({}^1t_0)$, $r({}^1t_1)$; концы L_2 — точки $r({}^2t_0)$, $r({}^2t_1)$; концы L_3 — точки $r({}^3t_0)$, $r({}^3t_1)$; через $\mathfrak{I}_1$ обозначим область, ограниченную суммой $L_1 \cup [r({}^1t_1), r({}^1t_0)]$, через $\mathfrak{I}_2$ — область, ограниченную $L_2 \cup [r({}^2t_1), r({}^2t_0)]$, через $\mathfrak{I}_3$ — область, ограниченную $L_3 \cup [r({}^3t_1), r({}^3t_0)]$);

(4) $L_2 \subset \bar{\mathfrak{I}}_1$, $L_3 \subset \bar{\mathfrak{I}}_1$, $\mathfrak{I}_2$ и $\mathfrak{I}_3$ не пересекаются;

(5) хотя бы одна из дуг L_1, L_2 и L_3 содержит точку $r(t)$, где $t < 1$;

(6) среди концов дуг L_i существует такой, в котором касательная к L перпендикулярна к d.

34. Определение. ε-фигура называется *ε-фигурой 1-го рода*, если точки дуги L_2, достаточно близкие к её концам, лежат от d по ту же сторону, что и точки дуги L_3, достаточно близкие к её концам, и притом по другую сторону по сравнению с точками дуги L_1, достаточно близкими к её концам.

ε-фигура называется *ε-фигурой 2-го рода*, если точки дуги L_2, достаточно близкие к её концам, и точки дуги L_3, достаточно близкие к её концам, лежат по разные стороны от d.

35. Лемма. *Если L_1, L_2, L_3 — ε-фигура, то найдётся круг радиуса $1/3200$, принадлежащий $\mathfrak{I}_1 \setminus \mathfrak{I}_2 \setminus \mathfrak{I}_3$.*

36. Доказательство. 1. Пусть L_1, L_2, L_3 — ε-фигура. Будем доказывать лемму в следующих добавочных предположениях (для случаев, когда эти предположения не выполняются, доказательство видоизменяется очевидным образом):

(1) отрезок d вертикален;

(2) точки дуги L_1, достаточно близкие к её концам, лежат слева от d;

(3) точки дуги L_2, достаточно близкие к её концам, лежат справа от d (тем самым в случае ε-фигуры 1-го рода мы предположили, что точки дуги L_3, достаточно близкие к её концам, лежат справа от d, а в случае ε-фигуры 2-го рода — слева);

(4) точка $r({}^1t_0)$ лежит над точкой $r({}^1t_1)$;

(5) точка $r({}^2t_0)$ лежит под точкой $r({}^2t_1)$;

(6) в случае ε-фигуры 1-го рода точки $r({}^2t_i)$ лежат над точками $r({}^3t_i)$ $(i = 0, 1)$;

(7) в случае ε-фигуры 2-го рода точки $r({}^3t_i)$ лежат под точками $r({}^1t_i)$ $(i=0,1)$;

(8) точка $r({}^3t_0)$ лежит над точкой $r({}^3t_1)$.

2. Рассмотрим вертикальный отрезок δ длины $1/400$ (ориентированный снизу вверх), нижний конец которого есть точка $r({}^1t_0)$; верхний конец δ обозначим через C. Пусть A — внутрення точка δ, столь близкая к $r({}^1t_0)$, что полуинтервал $[r({}^1t_0), A]$ не пересекается с дугами L_1, L_2, L_3.

3. Утверждение. $A \in \mathfrak{I}_1$ (*и, следовательно, всякая ломаная, соединяющая* A *с* $I^{*\prime}$ (см. п. 29 и 30) *пересекается с* $L_1 \cup d$).

4. Доказательство. Из определения ε-петли 3-го типа (п. 24) и из наших добавочных предположений (1), (2), (4) следует, что $U({}^1t_0, {}^1t_1) < 0$, $|U({}^1t_0, {}^1t_1) + 3\pi| < \frac{1}{6}\pi$, вращение замкнутой кривой $L_1 \cup [r({}^1t_1), r({}^1t_0)]$ равно -2π. Из этого, из замечания 27 и из нашего добавочного предположения (2) следует наше утверждение.

5. Предположим, что нет такой внутренней точки отрезка δ, которая принадлежит $L_1 \cup L({}^2t_0 < t < {}^2t_1) \cup L({}^3t_0 < t < {}^3t_1)$. Тогда δ целиком принадлежит $\bar{\mathfrak{I}}_1$. Рассмотрим равнобедренный треугольник Δ, одна сторона которого есть отрезок δ, углы при вершине C и при вершине $r({}^1t_0)$ равны $\frac{1}{6}\pi$, прилегающий к δ слева. Всякая точка этого треугольника отстоит меньше, чем на $1/100$, от того конца дуг L_i, в котором касательная к L перпендикулярна к d. Поэтому внутри Δ не может оказаться точек из дуг L_i (доказывается так же, как аналогичное утверждение в доказательстве леммы 31, см. п. 32, 15). Внутри Δ помещается круг радиуса $1/3200$; он и есть искомый, так как он не пересекается с областями $\mathfrak{I}_2$ и $\mathfrak{I}_3$.

6. Предположим, что внутри отрезка δ найдётся неконцевая точка одной из дуг L_1, L_2, L_3. Из всех таких точек пусть D — ближайшая в $r({}^1t_0)$; пусть $r(t^1) = D$. Возможны три случая: $D \in L_1$, $D \in L_2$, $D \in L_3$.

7. *Пусть* $D \in L_1$. *Тогда* $L({}^1t_0 \leqslant t \leqslant t^1)$ *есть* $(1/400)$*-петля 1-го типа, и область* $\mathfrak{I}_4$*, охваченная дугой* $L({}^1t_0 \leqslant t \leqslant t^1) \cup [r(t^1), r({}^1t_0)]$*, принадлежит* $\mathfrak{I}_1 \setminus \mathfrak{I}_2 \setminus \mathfrak{I}_3$.

8. Доказательство. Расстояние от каждой из точек $r(t^1)$ и $r({}^1t_0)$ до того конца дуг L_i, в котором касательная к L перпендикулярна к d, меньше $1/100$, поэтому

$$\left|\measuredangle\left(\delta, r'({}^1t_0)\right) - \tfrac{1}{2}\pi\right| < \tfrac{1}{6}\pi; \qquad \left|\left|\measuredangle\left(\delta, r'(t^1)\right)\right| - \tfrac{1}{2}\pi\right| < \tfrac{1}{6}\pi.$$

$\varrho\left(r({}^1t_0), r(t^1)\right) < 1/400$. Следовательно, $L({}^1t_0 \leqslant t \leqslant t^1)$ есть $(1/400)$-петля (см. определение 24).

Отрезок δ в точке D переходит из области $\mathfrak{I}_1$ в её дополнение. Область $\mathfrak{I}_1$ лежит справа от L_1, следовательно, $\measuredangle\left(r'(t^1), \delta\right) > 0$, и $\measuredangle\left(r'(t^1), [r(t^1), r({}^1t_0)]\right) < 0$. Как уже говорилось, $\measuredangle\left([r(t^1), r({}^1t_0)], r'({}^1t_0)\right) < 0$, поэтому $L({}^1t_0 \leqslant t \leqslant t^1)$ есть ε-петля 1-го или 3-го типов; допустим, что она третьего типа. Тогда вращение замкнутой кривой $L({}^1t_0 \leqslant t \leqslant t^1) \cup [r(t^1), r({}^1t_0)]$ равно $+2\pi$ (сравни 36, 4). Область, ограниченную этой кривой, обозначим через $\mathfrak{I}_4$. Дуга L_1 не пересекает интервала $\left(r(t^1), r({}^1t_0)\right)$, а точки множества $L_1 \setminus L({}^1t_0 \leqslant t \leqslant t^1)$, достаточно близкие к $r(t^1)$, лежат справа от δ и, следовательно, внутри области $\mathfrak{I}_4$. Точки отрезка d, лежащие ниже точки $r({}^1t_0)$ достаточно близко от неё, лежат внутри $\mathfrak{I}_4$. Но так как отрезок d не содержит внутренних точек L_1, то он весь лежит в $\mathfrak{I}_4$. Рассмотрим точку x плоскости, лежащую слева от точки A столь близко от неё, что отрезок $[A, x]$ не пересекает L_1; Тогда $x \notin \mathfrak{I}_4$. x можно соединить с $I^{*\prime}$ ломаной l, не пересекающей $d \cup L_1$. Тогда A соединена с $I^{*\prime}$ ломаной $l \cup [A, x]$, что противоречит утверждению 3. Следовательно, $L({}^1t_0 \leqslant t \leqslant t^1)$ есть $(1/400)$-петля 1-го типа.

Очевидно, что $\mathfrak{I}_4 \subset \mathfrak{I}_1$ (например потому, что $\mathfrak{I}_4' \subset \bar{\mathfrak{I}}_1$). Точки отрезка d, лежащие ниже точки $r({}^1t_0)$, лежат вне $\mathfrak{I}_4$. Следовательно, концы дуг L_2 и L_3 лежат вне $\mathfrak{I}_4$, а потому и сами дуги L_2, L_3 лежат вне $\mathfrak{I}_4$ (так как они не пересекают $\mathfrak{I}_4'$). Тогда ясно, что $\mathfrak{I}_4$ и $\mathfrak{I}_2 \cup \mathfrak{I}_3$ не пересекаются, так как в противном случае $\mathfrak{I}_4$ целиком входило бы либо в $\mathfrak{I}_2$, либо в $\mathfrak{I}_3$, откуда следовало бы, что либо $\mathfrak{I}_2$, либо $\mathfrak{I}_3$ содержит точку вне $\bar{\mathfrak{I}}_1$. Утверждение доказано.

9. Из того, что $D \in L_1$, следует утверждение леммы. Действительно, по лемме 31, в $\mathfrak{I}_4$ найдётся круг радиуса $1/3200$; он лежит вне $\mathfrak{I}_2$ и $\mathfrak{I}_3$, что и требуется.

10. Пусть $D \in L_2$, и $\varrho\left(r({}^2t_1), r(t^1)\right) \geqslant 1/400$. Рассмотрим треугольник Δ, одна сторона которого вертикальна, её нижний конец есть точка $r({}^2t_1)$, а верхний (обозначим его через E) лежит на расстоянии $1/400$ от нижнего; углы при вершинах $r({}^2t_1)$ и E равны $\frac{1}{6}\pi$, а сам треугольник лежит справа от δ. Легко видеть, что $\Delta \subset \mathfrak{I}_1 \setminus \mathfrak{I}_2 \setminus \mathfrak{I}_3$. Внутри Δ найдётся искомый круг радиуса $1/3200$.

11. Пусть $D \in L_2$, и $\varrho\left(r({}^2t_1), r(t^1)\right) < 1/400$. Тогда $L(t^1 \leqslant t \leqslant {}^2t_1)$ есть $(1/400)$-петля 1-го типа, и область $\mathfrak{I}_4$, охваченная дугой $L(t^1 \leqslant t \leqslant {}^2t_1) \cup \cup [r({}^2t_1), r(t^1)]$, принадлежит $\mathfrak{I}_1 \setminus \mathfrak{I}_2 \setminus \mathfrak{I}_3$.

12. Доказательство этого факта аналогично доказательству, изложенному в пункте 8.

13. Из предположений пункта 11 следует утверждение леммы (сравни п. 9).

14. Осталось рассмотреть случай, когда $D \in L_3$. В этом случае рассмотрение ε-фигур 1-го и 2-го рода проводится отдельно.

15. Пусть L_1, L_2, L_3 есть ε-фигура 1-го рода, и $D \in L_3$. Можно высказать утверждение, аналогичное утверждению 11:

$L({}^3t_0 \leqslant t \leqslant t^1)$ *есть* $(1/200)$*-петля первого типа, и область* $\mathfrak{I}_4$*, ограниченная дугой* $L({}^3t_0 \leqslant t \leqslant t^1) \cup [r(t^1), r({}^3t_0)]$*, содержится в* $\mathfrak{I}_1$ *и содержит* $\mathfrak{I}_2$.

Доказательство аналогично изложенному в п. 8.

Рассмотрим вертикальный отрезок δ_1 длины $1/400$, верхний конец которого есть точка $r({}^1t_1)$. Если нет такой внутренней точки отрезка δ_1, которая принадлежит $L_1 \cup L({}^2t_0 < t < {}^2t_1) \cup L({}^3t_0 < t < {}^3t_1)$, то строим треугольник Δ как в п. 5, и в нём берём искомый круг. Если внутри отрезка δ_1 найдётся неконцевая точка одной из дуг L_1, L_2, L_3, то из всех таких точек возьмём ближайшую к $r({}^1t_1)$ и обозначим её через D_1; пусть $r(t^2) = D_1$. Если $D_1 \in L_1$, то, аналогично случаю, рассмотренному в пункте 7, $L(t^2 \leqslant t \leqslant {}^1t_1)$ есть $(1/400)$-петля 1-го типа, и в ней найдётся искомый круг. Если $D_1 \in L_3$, то рассмотрим 2 случая: (а) $\varrho\big(r({}^3t_1), r(t^2)\big) \geqslant 1/400$, и (б) $\varrho\big(r({}^3t_1), r(t^2)\big) < 1/400$. В случае (а) находим искомый круг так же, как в п. 10; в случае (б) $L(t^2 \leqslant t \leqslant {}^3t_1)$ есть $(1/400)$-петля 1-го типа, и в ней найдётся искомый круг (аналогичному случаю посвящён п. 11). Покажем, что случай $D_1 \in L_2$ невозможен. Допустим противное; пусть $D_1 \in L_2$. Тогда $D_1 \in \mathfrak{J}_4$, так как $L_2 \subset \bar{\mathfrak{J}}_4$, а D_1 не лежит на $\mathfrak{J}_4'$, так как $D_1 \notin L_3$, и $D_1 \notin [r({}^3t_0), r(t^1)]$. Между тем интервал $\big(r({}^3t_0), D_1\big)$ целиком лежит вне $\mathfrak{J}_4$, так как его точки, достаточно близкие к $r({}^3t_0)$, лежат вне $\mathfrak{J}_4$, и он не содержит точек границы $\mathfrak{J}_4$. Утверждение доказано.

16. Пусть L_1, L_2, L_3 — ε-фигура 2-го рода, и $D \in L_3$. Рассмотрим вертикальный отрезок δ_2 длины $1/400$, верхний конец которого есть точка $r({}^3t_1)$. Если нет такой внутренней точки отрезка δ_2, которая принадлежит $L_1 \cup L({}^2t_0 < t < {}^2t_1) \cup L({}^3t_0 < t < {}^3t_1)$, то находим искомый круг как в п. 5. Если внутри отрезка δ_2 найдётся неконцевая точка одной из дуг L_1, L_2, L_3, то из всех таких точек возьмём ближайшую к $r({}^3t_1)$ и обозначим её через D_2; пусть $r(t^3) = D_2$. Если $D_2 \in L_3$, то получаем $(1/400)$-петлю 1-го типа $L(t^3 \leqslant t \leqslant {}^3t_1)$, в которой находится искомый круг. Если $D_2 \in L_2$, то рассмотрим 2 случая: (а) $\varrho\big(r({}^2t_0), r(t^3)\big) \geqslant 1/400$, и (б) $\varrho\big(r({}^2t_0), r(t^3)\big) < 1/400$, которые рассматриваются как в пунктах 10 и 11.

Покажем, что случай $D_2 \in L_1$ невозможен. Допустим, что он имеет место. Тогда $L(t^3 \leqslant t \leqslant {}^1t_1)$ есть $(1/400)$-петля 1-го типа; пусть $\mathfrak{J}_5$ — область, ограниченная $L(t^3 \leqslant t \leqslant {}^1t_1) \cup [r({}^1t_1), r(t^3)]$. $L_3 \subset \bar{\mathfrak{J}}_5$. Точка D входит в $\bar{\mathfrak{J}}_5$, но не лежит на $\mathfrak{J}_5'$. Между тем интервал $\big(r({}^1t_1), D\big)$ лежит целиком вне $\mathfrak{J}_5$. Лемма доказана.

37. Лемма. *Для всякого $x > 0$ существует конечное множество чисел $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_k = x$ такое, что диаметр каждого множества $L(t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1})$ $(0 \leqslant i < k)$ не превышает $\frac{1}{2}$.*

38. Доказательство. Пусть t^0 — произвольное число из $(0, x)$. Рассмотрим последовательность

$$t^1 = \min\big(s_{1/2}^{+}(t^0), x\big),\ t^2 = \min\big(s_{1/2}^{+}(t^1), x\big),\ \ldots,\ t^n = \min\big(s_{1/2}^{+}(t^{n-1}), x\big),\ \ldots,$$

и последовательность

$$t^{-1} = \begin{cases} s_{1/2}^{-}(t^0), & \text{если оно существует,} \\ 0, & \text{если не существует;} \end{cases}$$

$$t^{-2} = \begin{cases} s_{1/2}^{-}(t^{-1}), & \text{если оно существует,} \\ 0, & \text{если не существует;} \end{cases}$$

. . . .

$$t^{-n} = \begin{cases} s_{1/2}^{-}(t^{-n+1}), & \text{если оно существует,} \\ 0, & \text{если не существует;} \end{cases}$$

. . . .

Все члены последовательности $t^1, t^2, \ldots$, начиная с некоторого, равны x. Допустим противное. $t^1, t^2, \ldots$ — монотонная ограниченная последовательность. Она имеет предел. Тогда и последовательность точек $r(t^1), r(t^2), \ldots$ имеет предел, но это противоречит тому, что $\varrho\big(r(t^n), r(t^{n+1})\big) = \frac{1}{2}$ при любом n. Так же доказывается, что все члены последовательности $t^{-1}, t^{-2}, \ldots$, начиная с некоторого, равны 0. Теперь все различные члены этих последовательностей занумеруем в порядке возрастания: $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_k = x$. Эти точки удовлетворяют требованиям леммы. Лемма доказана.

39. Пусть x_1 — число класса 1, $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_k = x_1$ — точки, удовлетворяющие требованиям леммы 37. Выберем раз навсегда некоторое число a, удовлетворяющее неравенствам: $a > 0$, $a < t_1$, $a < 1$.

40. Лемма. *Существует число $\varepsilon_0 > 0$ такое, что, если x удовлетворяет условию:*

„существует t^*, удовлетворяющее неравенствам $0 < t^* < x$, несмежное с a и такое, что $\varrho\big(r(t^*), r(a)\big) < \varepsilon_0$“,

то $L(t < x)$ является $(1/10000)$-сетью в $\bar{L}$ (то-есть для каждой точки $y \in \bar{L}$ найдётся $t_1 \in [0, x]$ такое, что $\varrho\big(y, r(t_1)\big) < 1/10000$).

41. Доказательство. Пусть $y_1, y_2, \ldots, y_N$ — конечная $(1/20000)$-сеть $\bar{L}$. Рассмотрим число $x_1 > 0$ такое, что $L(t < x_1)$ пересекает $(1/20000)$-окрестность каждой из точек y_i. Тогда $L(t < x_1)$ является $(1/10000)$-сетью $\bar{L}$. Пусть $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_k = x_1$ — точки, удовлетворяющие требованиям леммы 37. Положим

$$\varepsilon_0 = \min_{0<i<k} \varrho\big(L(t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1}), a\big);$$

ε_0 удовлетворяет требованиям леммы. Действительно, если существует положительное $t^* < x$, несмежное с a и такое, что $\varrho\big(r(t^*), r(a)\big) < \varepsilon_0$, то $t^* > x_1$, $L(t < x_1) \subset L(t < x)$, а потому $L(t < x)$ есть $(1/10000)$-сеть в $\bar{L}$. Лемма доказана.

42. Лемма. *При всяком положительном* $\varepsilon < 1/800$ *найдётся четыре открытых круга радиуса* $1/5000$, *принадлежащих* $\mathfrak{I}$, *любые 2 из которых не являются* ε-*связанными в* $\mathfrak{I}$.

(Из этой леммы и из леммы 29 следует теорема 4).

43. Доказательство. 1. Пусть $t_0 > 0$, s — отрезок, некоторая внутренняя точка которого совпадает с точкой $r(t_0)$, и $\left|\measuredangle\big(r'(t_0), s\big)\right| = \frac{1}{2}\pi$. Пусть каждая из частей, на которые отрезок делится точкой $r(t_0)$, имеет длину, меньшую, чем $1/100$. Тогда найдётся $t_1 > t_0$, несмежное с t_0 и такое, что $r(t_1) \in s$. Действительно, рассмотрим такое $t^* > t_0$, несмежное с t_0, что $\varrho\big(r(t_0), r(t^*)\big)$ меньше, чем четвёртая часть расстояния от $r(t_0)$ до ближайшего из концов s. Тогда $L_{1/4}(t^*)$ есть график функции в системе $\Sigma(t_0)$, и легко видеть, что он пересекает отрезок s (см. 11,3 и 21).

Пусть $\varepsilon < 1/800$. Положим $\delta = \frac{1}{3}\min(\varepsilon, \varepsilon_0)$ (см. 40). Проведём через точку $r(a)$ отрезок s длины 2δ, перпендикулярный к $r'(a)$ и имеющий центром точку $r(a)$. Пусть ξ, η — координаты в системе $\Sigma(a)$. Найдётся наименьшее число $b > a$, несмежное с a и такое, что $r(b)$ лежит на s. Положим $\delta_1 = \varrho\big(r(a), r(b)\big)$; через s_1 обозначим отрезок длины $2\delta_1$ с центром в точке $r(a)$, принадлежащий s. В силу неравенства $\varrho\big(r(a), r(b)\big) < \min(\varepsilon, 1/100)$, $L(a \leqslant t \leqslant b)$ есть ε-петля одного из типов; если она есть ε-петля типа i, то будем говорить, что имеет место случай $(i, \ldots)$. Обозначим через w область, ограниченную кривой $L(a \leqslant t \leqslant b) \cup [r(b), r(a)]$.

2. Рассмотрим случай $(2, \ldots)$. $\left|\measuredangle\big(r'(a), r'(b)\big)\right| < \frac{1}{6}\pi$. Легко видеть, что, если точки $L(t > b)$, достаточно близкие к $r(b)$, лежат в w, то половина отрезка s, не содержащая $r(b)$, лежит вне w, и наоборот, если точки $L(t > b)$, достаточно близкие к $r(b)$, лежат вне w, то половина отрезка s, не содержащая $r(b)$, лежит в w. Поэтому наименьшее $t_1 > b$ такое, что $r(t_1)$ лежит на отрезке s_1, таково, что $r(t_1)$ лежит на отрезке $[r(a), r(b)]$, и $\left|\measuredangle\big(-r'(a), r'(t_1)\big)\right| < \frac{1}{6}\pi$, откуда видно, что $L(a \leqslant t \leqslant t_1)$ есть ε-петля 1-го или 3-го типа. Обозначим b через b^*, а t_1 через b (переобозначив соответствующим образом δ_1 через δ и s_1 через s и введя новые δ_1 и s_1), и будем рассматривать случай $(2, \ldots)$ вместе со случаями $(1, \ldots)$ или $(3, \ldots)$ в зависимости от типа ε-петли $L(a \leqslant t \leqslant b)$.

Рассмотрим наименьшее число $c > b$ такое, что $r(c) \in s_1$. Ту половину отрезка s_1, которой принадлежит $r(b)$, обозначим через s_1^b, другую половину — через s_1^*. Обозначим через W_1 область, ограниченную кривой $L(b \leqslant t \leqslant c) \cup [r(c), r(b)]$.

3. Случай $(1, \ldots)$. Будем говорить, что имеет место основной случай, если $\left|\measuredangle\big(-r'(b), r'(c)\big)\right| < \frac{1}{6}\pi$.

Пусть имеет место основной случай. Тогда $L(b \leqslant t \leqslant c)$ есть ε-петля 1-го или 3-го типов. Будем говорить, что имеет место случай

(1,1), если $r(c) \in s_1^b$, и $L(b \leqslant t \leqslant c)$ есть ε-петля 1-го типа;

(1,2), если $r(c) \in s_1^b$, и $L(b \leqslant t \leqslant c)$ есть ε-петля 3-го типа;

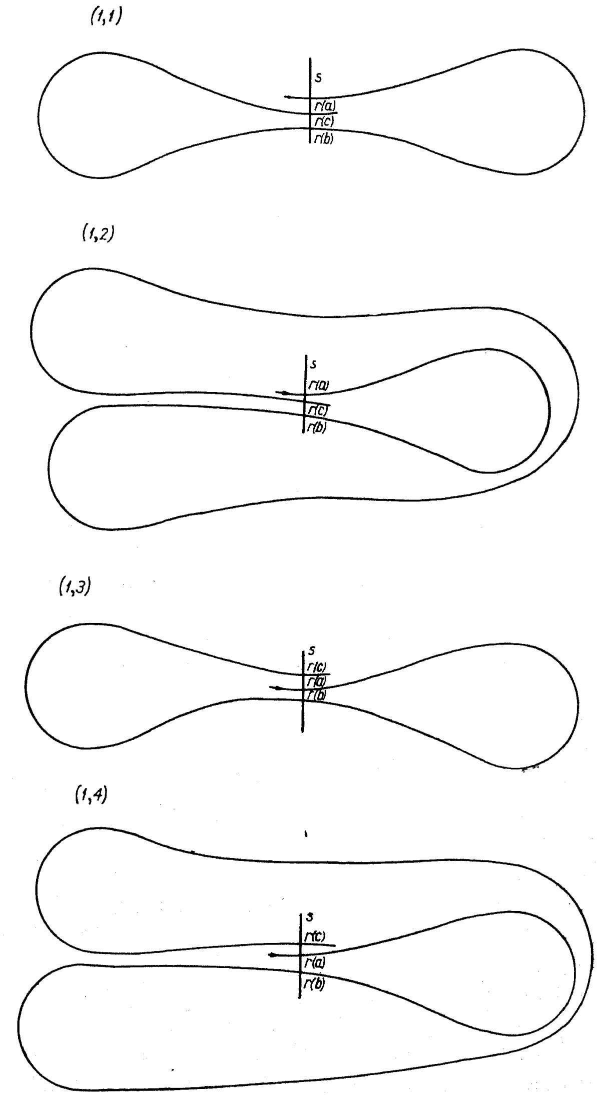

Рис. 4

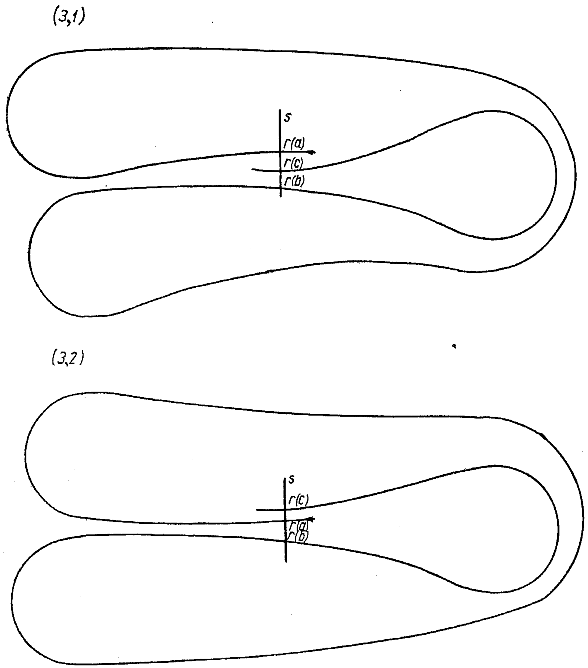

Рис. 4

(1,3), если $r(c)\in s_1^*$, и $L(b\leqslant t\leqslant c)$ есть ε-петля 1-го типа;

(1,4), если $r(c)\in s_1^*$, и $L(b\leqslant t\leqslant c)$ есть ε-петля 3-го типа (см. рис. 4).

Пусть теперь имеет место неосновной случай. При этом не может быть, что $r(c)\in s_1^b$. Действительно, если $t>b$, и $t-b$ достаточно мало, то $r(t)$ лежит вне области W. Следовательно, в первой точке $L(t>b)$, лежащей на s_1^b, кривая L должна переходить границу W в сторону W, и вектор $r'(c)$ должен быть направлен внутрь области. Итак, пусть $r(c)\in s_1^*$. Тогда $L(b\leqslant t\leqslant c)$ есть ε-петля 2-го типа. Рассмотрим 2 случая: $U(b,c)>0$, и $U(b,c)<0$ (при этом будем для определённости считать, что $U(a,b)<0$). Легко видеть, что, если $t>c$, и $t-c$ достаточно мало, то $r(t)$ в случае $U(b,c)>0$ лежит вне области W_1, а дуга $L(a\leqslant t\leqslant b)$ лежит внутри этой области; а в случае $U(b,c)<0$, наоборот — $r(t)$ лежит внутри области, а $L(a\leqslant t\leqslant b)$ — вне её. Рассмотрим наименьшее $t_1>c$ такое, что $r(t_1)\in[r(b),r(c)]$. Тогда $\left|\sphericalangle\left(-r'(b),r'(t_1)\right)\right|<\frac{1}{6}\pi$, что соответствует основному случаю. Обозначим c через c^*, а t_1 через c, чем неосновные случаи сводятся к основным.

4. Случай $(3,\ldots)$. Будем говорить, что имеет место основной случай, если $\left|\sphericalangle\left(-r'(b),r'(c)\right)\right|<\frac{1}{6}\pi$.

Пусть имеет место основной случай. Тогда $L(b\leqslant t\leqslant c)$ есть ε-петля 1-го или 3-го типов. Докажем, что $L(b\leqslant t\leqslant c)$ есть ε-петля 1-го типа. Допустим противное. Дуга $L(a\leqslant t\leqslant b)$ содержит точки, лежащие внутри W_1, и не содержит неконцевых точек, лежащих на W_1', а потому $L(a\leqslant t\leqslant b)\subset\overline{W}_1$. Но в то же время, по аналогичным причинам, $L(b\leqslant t\leqslant c)\subset\overline{W}$. Пусть x — неконцевая точка $L(a\leqslant t\leqslant b)$. Её можно соединить с $I^{*\prime}$ ломаной, не пересекающей $L(b\leqslant t\leqslant c)\cup s_1$, что противоречит тому, что x есть внутренняя точка W_1. Итак, $L(b\leqslant t\leqslant c)$ есть ε-петля 1-го типа. Будем говорить, что имеет место случай

(3,1), если $r(c)\in s_1^b$;

(3,2), если $r(c)\in s_1^*$.

Пусть теперь имеет место неосновной случай. При этом не может быть, что $r(c)\in s_1^b$. Это доказывается так же, как соответствующее утверждение в п. 3 (только нужно поменять местами слова „внутри“ и „вне“ и другие слова аналогичного смысла). Итак, пусть $r(c)\in s_1^*$. Тогда $L(b\leqslant t\leqslant c)$ есть ε-петля второго типа. Допустим для определённости, что $U(a,b)<0$. Тогда $\sphericalangle\left(r'(b),[r(b),r(a)]\right)>0$; следовательно, $\sphericalangle\left([r(c),r(b)],r'(b)\right)>0$. Так как $L(a<t<b)$ должна лежать вне области W_1, а $L(a<t<b)$ подходит в точке $r(b)$ справа к кривой $[r(c),r(b)]\cup L(b\leqslant t\leqslant c)$, то W_1 должна лежать слева от своей границы, откуда следует, что $U(b,c)>0$. $\sphericalangle\left(r'(c),[r(c),r(b)]\right)<0$ (по свойствам ε-петли 2-го типа), поэтому, если $t>c$, и $t-c$ достаточно мало, то $r(t)\in W_1$. Следовательно, наименьшее число $t_1>c$ такое, что $r(t_1)\in[r(b),r(c)]$, таково, что $\left|\sphericalangle\left(-r'(b),r'(t_1)\right)\right|<\frac{1}{6}\pi$, что соответствует основному случаю. Обозначим c через c^*, а t_1 через c, чем неосновной случай сводится к основным.

5. Покажем теперь, что в каждом из случаев (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (3,1), (3,2) найдётся 4 круга, требуемых леммой. Круг ω^1 возьмём для всех случаев в области $I^*\backslash I$.

Заметим, что во всех этих случаях $L(a\leqslant t\leqslant c)$ есть ε-петля 2-го типа. Область, ограниченную кривой $L(a\leqslant t\leqslant c)\cup[r(c),r(a)]$, обозначим через W_2. Обозначим через s_2^* отрезок, один конец которого есть точка $r(a)$, перпендикулярный к $r'(a)$ и столь короткий, чтобы он не имел общих точек с $L(a\leqslant t\leqslant c)$ кроме точки $r(a)$. Положим $s_2^c=[r(a),r(c)]$; $s_2=s_2^c\cup s_2^*$.

Легко видеть, что если $t^*>c$, и t^*-c достаточно мало, то $r(t^*)\in W_2$ в случаях (1,1), (1,4), (3,2), и $r(t^*)$ лежит вне W_2в случаях (1,2), (1,3), (3,1). s_2^* лежит вне W_2 в случаях (1,1), (1,4), (3,2) и внутри W_2 в случаях (1,2), (1,3), (3,1). Итак, $r(t^*)$ и s_2^* отделены границей W_2. Пусть $d>c$ — наименьшее число такое, что $r(d)\in s_2$. Тогда $r(d)\in s_2^c$, и дуга L в точке $r(d)$ переходит из области W_2 в её дополнение в случаях (1,1), (1,4), (3,2) и из дополнения в W_2 в остальных случаях.

Рассмотрим случаи (1,3), (1,4) и (3,2).

$L(c \leqslant t \leqslant d)$ есть ε-петля 1-го или 3-го типа, так как $\left|\sphericalangle\big(-r'(c), r'(d)\big)\right| < \frac{1}{6}\pi$. Область, ограниченную кривой $L(c \leqslant t \leqslant d) \cup [r(d), r(c)]$, обозначим через W_3.

6. Рассмотрим случай (1,3). Если $L(c \leqslant t \leqslant d)$ есть ε-петля 1-го типа, то W, W_1 и W_3 лежат вне друг друга. Внутри каждой из них найдётся круг радиуса 1/3200, по лемме 31; обозначим эти круги через $\widetilde{\omega}^2$, $\widetilde{\omega}^3$, $\widetilde{\omega}^4$. Если $L(c \leqslant t \leqslant d)$ есть ε-петля 3-го типа, то W и W_1 принадлежат W_3. Тогда система дуг $L(c \leqslant t \leqslant d)$, $L(a \leqslant t \leqslant b)$ и $L(b \leqslant t \leqslant c)$ образует ε-фигуру 2-го рода; по лемме 35, найдётся круг $\widetilde{\omega}^2$ радиуса 1/3200, принадлежащий $W_3 \setminus W \setminus W_1$. Но, по лемме 31, найдутся круги $\widetilde{\omega}^3 \subset W$ и $\widetilde{\omega}^4 \subset W_1$ того же радиуса.

7. В случаях (1,4) и (3,2) $L(c \leqslant t \leqslant d)$ есть ε-петля 1-го типа. Это доказывается так же, как аналогичное утверждение в п. 4 настоящего доказательства. В случае (1,4) имеем ε-фигуру 1-го рода, в случае (3,2) — 2-го рода. В обоих случаях, пользуясь леммами 31 и 35, находим круги $\widetilde{\omega}^2$, $\widetilde{\omega}^3$ и $\widetilde{\omega}^4$, как в п. 6.

8. Случаи (1,1), (1,2), (3,1). Существует окрестность ζ точки $r(t^*)$ (см. п. 5), которая вся лежит в W_2, если $r(t^*) \in W_2$, и вне W_2, если $r(t^*)$ лежит вне W_2. Так как существует число $x > d$ такое, что $r(x) \in \zeta$, то найдётся число $y > d$ такое, что $r(y) \in [r(a), r(c)]$. Пусть e есть наименьшее из чисел y. Тогда $L(d \leqslant t \leqslant e)$ есть ε-петля 1-го или 3-го типов. Область, ограниченную кривой $L(d \leqslant t \leqslant e) \cup [r(e), r(d)]$, обозначим через W_4.

9. В случае (1,1), если $L(d \leqslant t \leqslant e)$ есть ε-петля 1-го типа, области W, W_1 и W_4 лежат вне друг друга; берём круги $\widetilde{\omega}^2$, $\widetilde{\omega}^3$ и $\widetilde{\omega}^4$ радиуса 1/3200 по одному в каждой из этих областей (по лемме 31). Если $L(d \leqslant t \leqslant e)$ есть ε-петля 3-го типа, то система дуг $L(d \leqslant t \leqslant e)$, $L(a \leqslant t \leqslant b)$, $L(b \leqslant t \leqslant c)$ образует ε-фигуру 2-го рода, в которой, по леммам 31 и 35, найдутся 3 круга $\widetilde{\omega}^2$, $\widetilde{\omega}^3$ и $\widetilde{\omega}^4$ радиуса 1/3200, как в п. 6.

10. В случаях (1,2) и (3,1) $L(d \leqslant t \leqslant e)$ есть ε-петля 1-го типа (доказывается как в п. 4). В случае (1,2) $L(b \leqslant t \leqslant c)$, $L(a \leqslant t \leqslant b)$, $L(d \leqslant t \leqslant e)$ есть ε-фигура 2-го рода, а в случае (3,1) $L(a \leqslant t \leqslant b)$, $L(b \leqslant t \leqslant c)$, $L(d \leqslant t \leqslant e)$ есть ε-фигура 1-го рода. В обоих случаях найдутся круги $\widetilde{\omega}^2$, $\widetilde{\omega}^3$ и $\widetilde{\omega}^4$ радиуса 1/3200, как в предыдущих пунктах.

11. Итак, во всех случаях получилась четвёрка кругов ω^1, $\widetilde{\omega}^2$, $\widetilde{\omega}^3$, $\widetilde{\omega}^4$. Внутри каждого из кругов $\widetilde{\omega}^2$, $\widetilde{\omega}^3$ и $\widetilde{\omega}^4$ возьмём концентрические с ними круги ω^2, ω^3 и ω^4 радиуса 1/5000.

Очевидно, любые 2 из кругов ω^1, ω^2, ω^3 и ω^4 не являются ε-связанными в J.

12. Утверждение. *Круги ω^i свободны от точек $\bar{L}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$.*

13. Доказательство. Круг ω^1 лежит вне I. Докажем утверждение для $i > 1$. Заметим, что во всех случаях (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (3,1) и (3,2) в построении участвовала дуга, содержащая точку $r(a)$ $(a < 1)$ и некоторую точку $r(t)$ такую, что $t > a$, t несмежно с a, и $\varrho\big(r(t), r(a)\big) < \varepsilon_0$ (см. п. 1); эту дугу обозначим через l. По лемме 40, l является (1/10 000)-сетью в $\bar{L}$. Значит, если бы в одном из кругов ω^i $(i > 1)$ нашлась бы точка из $\bar{L}$, то внутри соответствующего круга $\widetilde{\omega}^i$ нашлась бы точка из дуги l, что противоречит построению.

Лемма доказана.

Цитированная литература

[1] П. С. Александров, *Комбинаторная топология*, Москва 1947.

[2] Н. Н. Константинов, *О несамопересекающихся кривых на плоскости*, Математический сборник (новая серия) 54 (96): 3 (1961), стр. 253.

[3] Г. Пестов и В. Ионин, *О наибольшем круге, вложенном в замкнутую кривую*, ДАН 127, 6 (1959), стр. 1170-1172.

Reçu par la Rédaction le 3. 9. 1963