STUDIA MATHEMATICA, T. XXV. (1965)

Sur les équations avec opérations presque algébriques

par

D. PRZEWORSKA-ROLEWICZ (Warszawa)

Dans les travaux précédents [5], [6] nous avons considéré des équations avec opérations algébriques, c'est-à-dire équations avec opérations additives et homogènes satisfaisant à l'identité polynomiale:

(x) $$P(S) = p_0 I + p_1 S + \ldots + p_N S^N = 0,$$

les coefficients $p_0, p_1, \ldots, p_N$ complexes ne s'annulant pas en même temps.

Dans le présent travail nous étudierons les équations avec les opérations qui satisfont à l'identité

$$P(S) = p_0 I + p_1 S + \ldots + p_N S^N = T$$

où T appartient à un idéal $\mathcal{J}$ dans un anneau $\mathcal{X}_0$ d'opérations additives et homogènes. Une telle opération nous appellerons *opération presque algébrique*. Nous établirons les propriétés des opérations presque algébriques, qui sont analogues à celles des opérations algébriques. En particulier, chaque équation avec opération presque algébrique admet un régularisateur de la même forme que l'équation avec une opération algébrique satisfaisant à l'identité polynomiale avec le même polynôme $P(S)$. Nos études seront basées sur le fait que l'opération presque algébrique appartient à une classe qui est algébrique dans l'anneau quotient $\mathcal{X}_0/\mathcal{J}$. C'est pourquoi nous généraliserons toutes les considérations sur les opérations algébriques pour des anneaux linéaires arbitraires.

Dans la deuxième partie de ce travail nous indiquerons des applications aux équations intégrales singulières.

§ 1. Anneau avec éléments algébriques et presque algébriques. Soit un anneau linéaire $\mathcal{R}$ (sur le corps $\mathcal{C}$ des nombres complexes) avec des diviseurs de zéro et avec l'unité I. Soit un élément S qui satisfait à l'identité

(1.1) $$P(S) = p_0 I + p_1 S + \ldots + p_N S^N = 0,$$

où les coefficients $p_0, \ldots, p_N \in \mathcal{C}$ et ne s'annulent pas en même temps.

On peut admettre, sans limiter la généralité, que $p_N = 1$. Nous appellerons S élément *algébrique* de l'anneau $\mathscr{R}$. Si S satisfait à l'identité $P(S) = 0$ de degré N et ne satisfait pas à une identité de degré inférieur à N, alors nous dirons que l'élément algébrique S est *d'ordre* N. Dans ce cas le polynôme $P(t)$ sera dit *polynôme caractéristique* de l'élément S et ses racines seront dites *racines caractéristiques* de S. Écrivons

$$P(t) = \prod_{m=1}^{n} (t-t_m)^{r_m} \quad (r_1+\ldots+r_n = N). \tag{1.2}$$

Avec tout élément algébrique S nous considérons n éléments P_i définis de la manière suivante:

$$P_i = q_i(S) \prod_{\substack{m=1\\ m\neq i}}^{n} (S-t_m I)^{r_m} \tag{1.3}$$

où

$$q_i(t) = \sum_{m=0}^{r_i-1} \frac{(t-t_i)^m}{m!}\left[\frac{d^m}{dt^m}\frac{(t-t_i)^{r_i}}{P(t)}\right]_{t=t_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.3'}$$

De la même façon que dans le travail [6], p. 340-341, nous pouvons démontrer les importantes propriétés suivantes des éléments P_i:

$$\prod_{i=1}^{n} P_i = I, \tag{1.4}$$

$$P_iP_j = \delta_{ij}P_i \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n), \tag{1.5}$$

où δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker.

Soit un polynôme

$$A(S) = A_0+A_1S+\ldots+A_{N-1}S^{N-1}$$

où les coefficients $A_0, \ldots, A_{N-1} \in \mathscr{R}$. Nous appellerons l'élément R_A *régularisateur gauche* (*droit*) de l'élément $A(S)$ à l'idéal propre $\mathscr{J} \subset \mathscr{R}$ gauche (droit), si

$$R_A A(S) = I+T \quad (A(S)R_A = I+T')$$

où $T, T' \in \mathscr{J}$. Si l'idéal $\mathscr{J}$ est bilatère et si le régularisateur est gauche et droit en même temps, alors nous l'appellerons *régularisateur simple*. S'il existe des régularisateurs gauche et droit à un idéal bilatère $\mathscr{J}$, alors chacun d'eux est simple et en autre le régularisateur simple est unique, abstraction faite d'une composante appartenant à l'idéal. La démonstration se fait de même que celles des théorèmes 5.1-5.3 du travail [7].

Théorème 1.1. *Si les éléments* $A(t_i) = A_0+A_1t_i+\ldots+A_{N-1}t_i^{N-1}$ *admettent les inverses* $[A(t_i)]^{-1} \in \mathscr{R}$ *et si tous les commutateurs* $A_iS-SA_i \in \mathscr{J}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, *où* $\mathscr{J} \subset \mathscr{R}$ *est un idéal propre bilatère, alors il existe un régularisateur simple* R_A *de l'élément* $A(S)$ *à l'idéal* $\mathscr{J}$ *et il admet la forme suivante:*

$$R_A = \sum_{i=1}^{n}\left\{\sum_{m=0}^{r_i-1}\left[\sum_{j=m}^{r_i-1}(-1)^m\frac{1}{j!}\binom{j}{m}t_i^{j-m}B^{(j)}(t_i)\right]S^m\right\}P_i, \tag{1.6}$$

où

$$\begin{cases} B^{(0)}(t_i) = [A(t_i)]^{-1}, \\ B^{(m)}(t_i) = -[A(t_i)]^{-1}\left[\sum_{k=0}^{m-1}\binom{m}{k}B^{(k)}(t_i)A^{(m-k)}(t_i)\right], \\ A^{(m)}(t_i) = \left[\frac{d^m}{dt^m}A(t)\right]_{t=t_i} \quad (m = 1, 2, \ldots, n-1) \end{cases} \tag{1.7}$$

(d/dt *désigne la dérivée formale du polynôme*).

Démonstration. De la même façon que dans le théorème 12 du travail [6], on peut démontrer qu'il existe un régularisateur gauche et qu'il admet la forme (1.6). Il existe aussi un régularisateur droit et on obtient sa forme en changeant dans la formule (1.7) l'ordre des opérations $B^{(k)}(t_i)$ et $A^{(m-k)}(t_i)$. Donc, d'après les remarques précédentes, chacun d'eux est simple et ils ne diffèrent que par une composante de l'idéal $\mathscr{J}$. Il en résulte la conclusion du théorème.

Si tous les commutateurs A_iS-SA_i sont nuls, alors on peut régulariser à un idéal „nul" de la même façon que dans le cas précédent et nous obtiendrons le

Corollaire 1.1. *Si les éléments* $A(t_i)$ *admettent les inverses* $[A(t_i)]^{-1}$ *et si* $A_iS-SA_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, *alors le régularisateur simple* R_A *déterminé par la formule* (1.6) *est inverse de l'élément* $A(S)$:

$$A(S)R_A = R_AA(S) = I.$$

Soit $S \in \mathscr{R}$ satisfaisant à l'identité

$$P(S) = p_0I+p_1S+\ldots+p_NS^N = T, \tag{1.8}$$

où T appartient à un idéal propre bilatère $\mathscr{J} \subset \mathscr{R}$, $p_0, \ldots, p_N \in \mathscr{C}$. Nous appellerons un tel élément *élément presque algébrique*. Par analogie avec les définitions pour les éléments algébriques, si S satisfait à une identité de degré N et ne satisfait pas à une identité de degré inférieur à N, alors *l'ordre* de l'élément S est égale à N. Dans ce cas nous appellerons $P(t)$ *polynôme caractéristique* de l'élément S et ses racines seront dites *racines caractéristiques*.

Nous avons évidemment:

Remarque 1.1. *Si $S \in \mathscr{R}$ satisfait a l'identité suivante:*

$$(p_0 I + T_0) + (p_1 I + T_1) S + \ldots + (p_N I + T_N) S^N = 0$$

où $T_0, \ldots, T_N \in \mathscr{J}$, $\mathscr{J}$ est un idéal propre bilatère, alors S est presque algébrique.

En effet, en posant $T = -[T_0 + T_1 S + \ldots + T_N S^N] \in \mathscr{J}$, nous obtenons

$$p_0 I + \ldots + p_N S^N = T.$$

Soit l'anneau quotient $\mathscr{R}/\mathscr{J}$. Nous le désignons par $\underline{\mathscr{R}}$ et nous notons $\boldsymbol{A}$ la classe, à laquelle appartient l'élément $A \in \mathscr{R}$. Il est évident que $A^2 \in \boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}$ etc. Donc, si l'élément S est presque algébrique d'ordre N avec le polynôme caractéristique $P(t)$, alors $\boldsymbol{S}$ est algébrique d'ordre N avec le même polynôme. Le polynôme $A(S) \in \boldsymbol{A}(S)$ et les inverses $[\boldsymbol{A}(z_i)]^{-1}$ existent, et en outre $\boldsymbol{A}_i \boldsymbol{S} - \boldsymbol{S} \boldsymbol{A}_i = 0$.

En vertu du théorème 1.1 et du corollaire 1.1 l'élément $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{S}) = \boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{A}_1 \boldsymbol{S} + \ldots + \boldsymbol{A}_{N-1} \boldsymbol{S}^{N-1}$ admet un régularisateur simple à un idéal „nul" et ce régularisateur, qui est en même temps inverse de $\boldsymbol{A}(S)$, admet la forme suivante:

$$[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{S})]^{-1} = \boldsymbol{R}_{\boldsymbol{A}} = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \sum_{m=0}^{r_i-1} \left[\sum_{j=m}^{r_i-1} (-1)^m \frac{1}{j!} \binom{j}{m} t_i^{j-m} \boldsymbol{B}^{(j)}(t_i) \right] \boldsymbol{S}^m \right\} \boldsymbol{P}_i, \tag{1.9}$$

où

$$\begin{cases} \boldsymbol{B}^{(0)}(t_i) = [\boldsymbol{A}(t_i)]^{-1}, \\ \boldsymbol{B}^{(m)}(t_i) = -[\boldsymbol{A}(t_i)]^{-1} \left[\sum_{k=0}^{m-1} \binom{m}{k} \boldsymbol{B}^{(k)}(t_i) \boldsymbol{A}^{(m-k)}(t_i) \right], \\ \boldsymbol{P}_i = q_i(\boldsymbol{S}) \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^{n} (\boldsymbol{S} - t_m \boldsymbol{I})^{r_m} \quad (m = 1, 2, \ldots, n-1;\ i = 1, 2, \ldots, n), \end{cases} \tag{1.10}$$

où $q_i(t)$ est définie par la formule (1.4). Il en résulte:

Théorème 1.2. *Si S est presque algébrique, $P(S) = T$, où $T \in \mathscr{J}$, si dans l'anneau quotient $\mathscr{R}/\mathscr{J}$ existent les inverses $[\boldsymbol{A}(t_i)]^{-1}$ alors dans cet anneau l'élément $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{S})$ admet l'inverse $\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{A}}$, déterminé par les formules* (1.9) *et* (1.10).

Théorème 1.3. *Si S est presque algébrique, $P(S) = T$, où $T \in \mathscr{J}$, alors l'élément $A(S)$ tel que les inverses $[A(t_i)]^{-1}$ existent et que $A_i S - S A_i \in \mathscr{J}$, admet un régularisateur simple R_A (déterminé par la formule* (1.6)*) à l'idéal $\mathscr{J}$, de la même forme qu'un élément algébrique satisfaisant à une identité avec le même polynôme caractéristique $P(t)$.*

Démonstration. En effet, le régularisateur R_A de l'élément $A(S)$ appartient à la classe $\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{A}} = [\boldsymbol{A}(\boldsymbol{S})]^{-1}$ définie dans le théorème 1.2, donc il admet la forme

$$R_A = T_1 + \sum_{i=1}^{n} \left\{ \sum_{m=0}^{r_i-1} \left[\sum_{j=m}^{r_i-1} (-1)^m \frac{1}{j!} \binom{j}{m} t_i^{j-m} B^{(j)}(t_i) \right] S^m \right\} P_i$$

où $T_1 \in \mathscr{J}$, $B^{(j)}(t_i) \in \boldsymbol{B}^{(j)}(t_i)$ etc., donc ils ne se diffèrent des éléments $B^{(t)}(t_i)$ définis dans le théorème 1.1 que par une composante appartenant à l'idéal $\mathscr{J}$. Abstraction faite des composantes appartenant à l'idéal $\mathscr{J}$, nous obtenons la conclusion du théorème.

Soit un espace linéaire X (sur le corps des nombres complexes) et soit $\mathscr{X}_0$ un anneau d'opérations additives et homogènes, transformant l'espace X en lui-même. Soit une opération presque algébrique d'ordre N, qui satisfait à l'identité $P(S) = T$, où $T \in \mathscr{J} \subset \mathscr{X}_0$. Dans ce cas toutes les considérations précédentes sont évidemment valables.

§ 2. Continuité complète de certaines opérations intégrales.

Rappelons d'abord sans démonstrations deux théorèmes de W. Pogorzelski donnés dans [4], p. 51-54, en les formulant d'une autre façon dans le théorème suivant:

Théorème 2.1. *Si la fonction complexe $f(t, u)$ définie pour $t \in L$, $u \in \Pi$ (où L est un ensemble d'arcs réguliers, fermés et disjoints dans le plan de la variable complexe, Π est une ligne ou un domaine dans ce plan) satisfait à la condition de Hölder*

$$|f(t, u) - f(t_1, u_1)| < k_f[|t - t_1|^\mu + |u - u_1|^\mu] \quad (0 < \mu \leqslant 1) \tag{2.1}$$

en outre si

$$\Psi(t, \tau, u) = \frac{f(t, u) - f(\tau, u)}{t - \tau}$$

alors pour toute fonction $\psi(t)$ bornée et intégrable sur L, la fonction

$$I(t) = \int_L \Psi(t, \tau, t) \psi(\tau) d\tau$$

satisfait à la condition de Hölder suivante:

$$|I(t_1) - I(t_2)| < \text{const} \sup_{t \in L} |\psi(t)| \cdot |t_1 - t_2|^{\mu/2}$$

où la constante ne dépend pas de la fonction ψ.

Nous admettons les notations suivantes: L — désigne un ensemble d'arcs réguliers fermés de Jordan dans le plan de la variable complexe, Ω — un domaine borné, limité par les lignes L, $C(L)$ — l'espace de toutes les fonctions $x(t)$ continues sur L avec la norme

$$\|x\|_C = \sup_{t\in L}|x(t)| \overset{\text{df}}{=} s(x),$$

$H^\mu(L)$ désigne l'espace de toutes les fonctions $x(t)$ qui satisfont à la condition de Hölder avec l'exposant μ, avec la norme

$$\|x\|_{H^\mu} = s(x)+h^\mu(x)$$

où

$$h^\mu(x) \overset{\text{df}}{=} \sup_{t_1,t_2\in L}\frac{|x(t_1)-x(t_2)|}{|t_1-t_2|^\mu},$$

C_0 désigne l'espace de toutes les fonctions $x(t)$ continues dans l'intervalle $0\leqslant t\leqslant 2\pi$ et de période 2π, avec la norme

$$\|x\|_{C_0} = \sup_{0\leqslant t\leqslant 2\pi}|x(t)| \overset{\text{df}}{=} s_0(x),$$

enfin H_0^μ désigne l'espace de toutes les fonctions $x(t)$ qui satisfont dans l'intervalle $0\leqslant t\leqslant 2\pi$ à la condition de Hölder et ont la période 2π. Nous admettons la norme suivante:

$$\|x\|_{H_0^\mu} = s_0(x)+h_0^\mu(x)$$

où

$$h_0^\mu(x) \overset{\text{df}}{=} \sup_{0\leqslant t_1,t_2\leqslant 2\pi}\frac{|x(t_1)-x(t_2)|}{|t_1-t_2|^\mu}.$$

Théorème 2.2. *Si la fonction $K(\sigma, s)$ satisfait à la condition de Hölder*

$$|K(\sigma,s)-K(\sigma_1,s_1)|\leqslant k[|\sigma-\sigma_1|^\mu+|s-s_1|^\mu] \qquad (0<\mu\leqslant 1)$$

dans le carré $0\leqslant\sigma$, $s\leqslant 2\pi$, si elle est périodique par rapport à toutes les deux variables et admet la période 2π, alors l'opération intégrale

$$T_K x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[K(\sigma,s)-K(s,s)]\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}\,x(\sigma)\,d\sigma$$

est une transformation continue de l'espace C_0 en l'espace $H_0^{\mu/2}$, en outre elle est complètement continue dans l'espace C_0.

Démonstration. D'après l'hypothèse

$$|K(\sigma,s)-K(s,s)|\cdot\left|\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}\right|\leqslant k|\sigma-s|^\mu\frac{\cos\frac12(\sigma-s)}{\sin\frac12(\sigma-s)}$$
$$\leqslant\frac{2k}{|\sigma-s|^{1-\mu}}\left|\frac{\frac12(\sigma-s)}{\sin\frac12(\sigma-s)}\cos\tfrac12(\sigma-s)\right|.$$

La fonction

$$f(\sigma,s)=\frac{\frac12(\sigma-s)}{\sin\frac12(\sigma-s)}\cos\tfrac12(\sigma-s)$$

est bornée et continue pour $s-\pi\leqslant\sigma\leqslant s+\pi$, donc, en posant

$$m=\sup_{\substack{0\leqslant s\leqslant 2\pi\\ s-\pi\leqslant\sigma\leqslant s+\pi}}|f(\sigma,s)|,$$

nous avons

$$|y(s)|=|T_Kx)|=\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[K(\sigma,s)-K(s,s)]\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}\,x(\sigma)\,d\sigma\right|$$
$$=\left|\frac{1}{2\pi}\int_{s-\pi}^{s+\pi}[K(\sigma,s)-K(s,s)]\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}\,x(\sigma)\,d\sigma\right|$$
$$\leqslant\frac{2km}{2\pi}\sup_{0\leqslant s\leqslant 2\pi}|x(s)|\cdot\left|\int_{s-\pi}^{s+\pi}\frac{dl_\sigma}{\sigma-s}\right|\leqslant\frac{2km\pi^\mu}{2\pi\mu}\sup_{0\leqslant s\leqslant 2\pi}|x(s)|,$$

d'où

$$s(T_Kx)\leqslant\frac{km\pi^{\mu-1}}{\mu}s(x). \tag{2.1}$$

D'après le théorème 2.1 nous obtenons

$$|y(s_1)-y(s_2)|\leqslant\text{const}\cdot s(x)|s_1-s_2|^{\mu/2}, \tag{2.2}$$

la constante ne dépend pas de la fonction x, d'où

$$h_0^{\mu/2}(T_Kx)\leqslant\text{const}\cdot s(x) \tag{2.3}$$

où la constante ne dépend pas de la fonction x. Donc, en vertu des formules (2.1) et (2.3) nous avons

$$\|T_Kx\|_{H_0^{\mu/2}}\leqslant\text{const}\cdot\|x\|_{C_0} \tag{2.4}$$

où la constante ne dépend pas de la fonction x. Alors T_K est une transformation continue de l'espace C_0 en l'espace $H_0^{\mu/2}$. D'autre part, d'après les formules (2.1) et (2.2) et d'après le théorème d'Arzelà nous concluons que l'opération T_K est complètement continue dans l'espace C_0.

Théorème 2.3. *On admet les hypothèses suivantes sur la fonction continue $h(t)$:*

1. *$h(0)=0$ et $h(t)\neq 0$ pour $0<|t|<d+\delta$, où d désigne le diamètre du domaine Ω borné par les lignes L, δ est une constante positive arbitraire;*

2. *la fonction $h(t)/t$ satisfait à la condition de Hölder:*

$$\left|\frac{h(t_1)}{t_1}-\frac{h(t_2)}{t_2}\right| \leqslant k_h|t_1-t_2|^\mu \qquad (0<\mu\leqslant 1);$$

3. $h'(0)=1$.

Alors l'opération

$$T_h = \frac{1}{\pi i}\int_L \left[\frac{1}{h(\tau-t)}-\frac{1}{\tau-t}\right]x(\tau)\,d\tau$$

est une transformation continue de l'espace $C(L)$ en l'espace $H^{\mu/2}(L)$, en outre T_h est complètement continue dans l'espace $C(L)$.

Démonstration. D'après nos hypothèses la limite

$$\lim_{u\to 0}\frac{h(u)}{u} = \lim_{u\to 0}\frac{h(u)-h(0)}{u} = h'(0) = 1$$

existe, donc la fonction $h(u)/u$ est continue et ne s'annule pas sur les lignes L.

En outre

$$\inf_{u\in L}\frac{h(u)}{u}\neq 0,$$

d'où, en désignant

$$m_h = \frac{1}{\inf\limits_{u\in L}|h(u)/u|},$$

nous obtenons

$$\left|\frac{1}{h(u)}-\frac{1}{u}\right| \leqslant \frac{k_h|u|^\mu}{|h(u)|} \leqslant \frac{k_h|u|^\mu}{|u|\,|h(u)/u|} \leqslant \frac{k_h m_h}{|u|^{1-\mu}}.$$

Il en résulte que l'intégrale dans la définition de l'opération T_h admet une singularité faible sur tout l'ensemble L, donc

$$s(T_h x) \leqslant \mathrm{const}\cdot s(x) \tag{2.5}$$

où la constante ne dépend pas de la fonction x.

D'autre part

$$\frac{1}{h(u)}-\frac{1}{u} = \frac{1}{u}\left[\frac{u}{h(u)}-1\right],$$

où la fonction $u/h(u)$ satisfait par hypothèse à la condition de Hölder avec l'exposant μ. Donc, d'après le théorème 2.1, la fonction $y(t)=T_h x$ satisfait à la condition de Hölder:

$$|y(t_1)-y(t_2)| \leqslant \mathrm{const}\cdot\sup_{t\in L}|x(t)|\,|t_1-t_2|^{\mu/2}; \tag{2.6}$$

la constante ne dépend pas de la fonction x, d'où

$$h^{\mu/2}(T_h x) \leqslant \mathrm{const}\cdot s(x); \tag{2.7}$$

la constante ne dépend pas de la fonction x. Il résulte des inégalités (2.5) et (2.7) que

$$\|T_h x\|_{H^{\mu/2}(L)} \leqslant \mathrm{const}\cdot\|x\|_{C(L)}$$

et que T_h est une transformation continue de l'espace $C(L)$ en l'espace $H^{\mu/2}(L)$. En vertu des inégalités (2.5), (2.6) et du théorème d'Arzelà nous concluons que l'opération T_h est complètement continue dans l'espace $C(L)$.

Théorème 2.4. *On admet les hypothèses suivantes sur la fonction $h_0(s)$ continue dans l'intervalle $0\leqslant s\leqslant 2\pi$:*

1. $h_0(0)=0$, $h_0(s+2\pi)=h_0(s)$;
2. *la fonction $h_0(s)\operatorname{ctg}\frac{1}{2}s$ satisfait à la condition de Hölder:*

$$\left|h_0(s)\operatorname{ctg}\frac{s}{2}-h_0(s')\operatorname{ctg}\frac{s'}{2}\right| \leqslant k_0|s-s'|^\mu \qquad (0<\mu\leqslant 1);$$

3. $h_0'(0)=1/2$.

Alors l'opération

$$T_0 x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{h_0(\sigma-s)}-\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}\right]x(\sigma)\,d\sigma$$

est une transformation continue de l'espace C_0 en l'espace $H_0^{\mu/2}$, en outre cette transformation est complètement continue dans l'espace C_0.

Démonstration. D'après nos hypothèses

$$\lim_{s\to 0} h_0(s)\operatorname{ctg}\frac{s}{2} = \lim_{s\to 0} 2\,\frac{\cos s/2}{\sin s/2}\cdot\frac{s}{2}\cdot\frac{h_0(s)}{s} = 2\lim_{s\to 0}\frac{h_0(s)-h_0(0)}{s} = 2h_0'(0) = 1$$

d'où, en posant

$$K(\sigma,s) = \frac{2}{\operatorname{ctg}\frac{1}{2}(\sigma-s)\,h_0(\sigma-s)},$$

nous obtenons $K(s,s)=1$. En écrivant le noyau de l'intégrale dans la définition de l'opération T_0 sous la forme suivante

$$\frac{1}{h_0(\sigma-s)}-\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2} = \operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}\left[\frac{1}{\operatorname{ctg}\frac{1}{2}(\sigma-s)\,h_0(\sigma-s)}-1\right]$$
$$= [K(\sigma,s)-K(s,s)]\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}$$

et en remarquant que la fonction $K(\sigma,s)$ satisfait aux conditions du théorème 2.2, nous obtenons la conclusion du théorème.

THÉORÈME 2.5. *Soit un espace de Banach X avec la norme $\| \|_X$. Soit Y un sous-ensemble linéaire de l'espace X, qui est un espace de Banach avec la norme $\| \|_Y \geqslant \| \|_X$. Soit*

$$S = \{x \in Y : \|x\|_Y \leqslant 1\}$$

un ensemble compact dans la norme $\| \|_X$. Soit une opération continue T transformant l'espace X en Y. Alors l'opération $\tilde{T}$ induite par l'opération T ($\tilde{T}x = Tx$ pour $x \in Y$), comme transformation de l'espace Y en lui-même, est complètement continue. Si en outre dans l'espace X il existe une base, alors on peut approcher l'opération $\tilde{T}$ par des opérations de dimension finie.

Démonstration. Considérons l'ensemble $\tilde{T}S = TS$. Soit $\{y_n\}$ une suite arbitraire d'éléments de l'ensemble TS. Alors il existent $x_n \in S$ tels que $Tx_n = y_n$. L'ensemble S est compact dans la norme $\| \|_X$, donc il existe une sous-suite $\{x_{n_k}\}$ de la suite $\{x_n\}$ convergente vers un $x_0 \in S$ dans la norme $\| \|_X$, c'est-à-dire

$$\lim_{k\to\infty} \|x_{n_k} - x_0\|_X = 0.$$

D'après notre hypothèse, T est une transformation continue de l'espace X en Y, d'où il résulte que

$$\lim_{k\to\infty} \|Tx_{n_k} - Tx_0\|_Y = \lim_{k\to\infty} \|y_{n_k} - y_0\|_Y = 0$$

où $y_0 = Tx_0 \in TS$. Donc l'ensemble TS est compact dans la norme $\| \|_Y$, par conséquent l'opération T est complètement continue dans la norme $\| \|_Y$.

Si dans l'espace X existe une base, alors il existe une suite $\{K_n\}$ d'opérations de dimension finie, uniformément convergente dans la norme $\| \|_X$ vers l'identité I sur l'ensemble S, c'est-à-dire

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x \in S} \|K_n x - x\|_X = 0.$$

Mais l'opération T est continue, donc

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x \in S} \|TK_n x - Tx\|_X = 0$$

et les opérations TK_n sont aussi de dimension finie, l'ensemble S est une sphère dans l'espace Y. Il en résulte qu'on peut approcher l'opération T dans la norme $\| \|_Y$ par des opérations de dimension finie.

Il en résulte immédiatement:

COROLLAIRE 2.1. *Les hypothèses du théorème 2.2 étant admises, l'opération*

$$T_K x = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [K(\sigma, s) - K(s, s)] \operatorname{ctg} \frac{\sigma - s}{2} x(\sigma)\, d\sigma$$

est complètement continue dans l'espace $H_0^{\mu/2}$.

COROLLAIRE 2.2. *Les hypothèses du théorème 2.3 étant admises, l'opération*

$$T_h x = \frac{1}{\pi i} \int_L \left[\frac{1}{h(\tau - t)} - \frac{1}{\tau - t} \right] x(\tau)\, d\tau$$

est complètement continue dans l'espace $H^{\mu/2}(L)$.

COROLLAIRE 2.3. *Les hypothèses du théorème 2.4 étant admises, l'opération*

$$T_0 x = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{h_0(\sigma - s)} - \operatorname{ctg} \frac{\sigma - s}{2} \right] x(\sigma)\, d\sigma$$

est complètement continue dans l'espace $H_0^{\mu/2}$.

§ 3. Caractéristique dimensionnelle de certaines équations intégrales singulières. I. Soit une équation intégrale singulière avec noyau de Hilbert:

$$A_0(s) x(s) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(\sigma, s) x(\sigma) \operatorname{ctg} \frac{\sigma - s}{2}\, d\sigma = x_0(s), \tag{3.1}$$

où les fonctions données $A_0(s)$, $K(\sigma, s)$, $x_0(s)$ satisfont à la condition de Hölder avec l'exposant $0 < \mu \leqslant 1$ pour $0 \leqslant \sigma, s \leqslant 2\pi$ et ont la période 2π, en outre nous admettons que

$$\inf_{0 \leqslant s \leqslant 2\pi} |A_0^2(s) + K^2(s, s)| > 0. \tag{3.2}$$

Cette équation a été d'abord étudiée par Poincaré [9] et Noether [3], plus tard aussi par d'autres auteurs (voir par exemple Schmeidler [10], p. 503-506, Michlin [1], p. 143-149). On sait ([1], [10]) que la transformation intégrale singulière

$$Sx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(\sigma) \operatorname{ctg} \frac{\sigma - s}{2}\, d\sigma$$

(où l'intégrale a le sens de la valeur principale de Cauchy) satisfait à l'identité

$$I + S^2 = K \tag{3.3}$$

où

$$Kx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(\sigma)\, d\sigma, \tag{3.4}$$

donc elle est presque algébrique. L'opération K est à une dimension. Mais la régularisation à l'idéal des opérations de dimension finie limite considérablement la classe des fonctions considérées, donc nous admettons que K appartient à l'idéal $\mathscr{J}$ de toutes les opérations complètement continues dans l'anneau de toutes les opérations linéaires transformant l'espace $H_0^{\mu/2}$ en lui-même — ce qu'on peut toujours faire.

En désignant $A_1(s) = K(s,s)$ nous écrivons l'équation (3.1) sous la forme suivante:

$$A_0(s)x(s)+\frac{A_1(s)}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}\,d\sigma+ \tag{3.5}$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[K(\sigma,s)-K(s,s)]x(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}\,d\sigma = x_0(s)$$

ou

$$[A_0+A_1S+T_K]x = x_0.$$

D'après la formule (3.3) les racines caractéristiques de l'opération S sont:

$$t_1 = i,\qquad t_2 = -i,$$

donc en vertu des résultats de notre travail [6] et du théorème 1.3, le régularisateur simple de l'opération

$$A(S)+T_K = A_0+A_1S+T_K,\qquad \text{où}\qquad T_K\in\mathscr{J},$$

admet la forme suivante (dans ce cas les opérations A_0 et A_1 sont commutatives):

$$R_A = [A_0^2+A_1^2]^{-1}[A_0-A_1S]$$

à condition que

1. l'opération $[A_0^2+A_1^2]^{-1}$ existe,
2. les commutateurs A_0S-SA_0, $A_1S-SA_1\in\mathscr{J}$.

Mais d'après (3.2) l'opération $[A_0^2+A_1^2]^{-1}$ existe et, en vertu des autres hypothèses et du corollaire 2.1, toutes les opérations

$$T_Kx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[K(\sigma,s)-K(s,s)]x(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}\,d\sigma,$$

$$(A_iS-SA_i)x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[A_i(s)-A_i(\sigma)]x(\sigma)\frac{\sigma-s}{2}\,d\sigma\qquad (i=0,1)$$

sont complètement continues dans l'espace $H_0^{\mu/2}$, donc l'équation (3.5) admet un régularisateur simple

$$R_Ax = [A_0^2(s)+A_1^2(s)]^{-1}\left[A_0(s)x(s)-\frac{A_1(s)}{2\pi}\int_0^{2\pi}x(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}\,d\sigma\right]. \tag{3.6}$$

Il résulte immédiatement des considérations précédentes et du théorème 5.7 de notre travail [7] le suivant

THÉORÈME 3.1. *Si les fonctions $A_0(s)$, $K(\sigma,s)$, $x_0(s)$ satisfont à la condition de Hölder avec l'exposant $0<\mu\leqslant 1$ pour $0\leqslant\sigma$, $s\leqslant 2\pi$ et ont la période 2π, si en outre la condition (3.2) est satisfaite, alors l'équation (3.1) admet dans l'espace $H_0^{\mu/2}$ une d-caractéristique finie, c'est-à-dire la dimension $\alpha_{A(S)+T_K}$ de l'espace des zéros de l'opération $A(S)+T_K$ et dimension $\beta_{A(S)+T_K}$ de l'espace quotient $H_0^{\mu/2}/[A(S)+T_K]H_0^{\mu/2}$ sont finies. En outre l'indice de l'équation (3.1) (défini comme la différence des nombres β et α) ne dépend pas des composantes complètement continues:*

$$\varkappa_{A(S)+T} = \varkappa_{A(S)}\quad \textit{pour}\quad T\in\mathscr{J}\quad (\textit{où } \varkappa_A = \beta_A-\alpha_A).$$

II. Soit l'équation intégrale singulière suivante:

$$A_0(t)x(t)+\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{K(t,\tau)}{h(\tau-t)}x(\tau)\,d\tau = x_0(t), \tag{37}$$

où la fonction $h(t)$ satisfait aux conditions du théorème (2.3), les fonctions $A_0(t)$, $K(t,\tau)$, $x_0(t)$ satisfont à la condition de Hölder avec l'exposant $0<\mu\leqslant 1$ sur les lignes L, en outre

$$\inf_{t\in L}|A_0^2(t)-K^2(t,t)|>0. \tag{3.8}$$

Comme on le sait [2], la transformation

$$Sx = \frac{1}{\pi i}\int_L\frac{x(\tau)}{\tau-t}\,d\tau$$

(où l'intégrale a le sens de la valeur principale de Cauchy) satisfait à la condition $S^2 = I$. Donc la transformation

$$Hx = \frac{1}{\pi i}\int_L\frac{x(\tau)}{h(\tau-t)}\,d\tau$$

$$= \frac{1}{\pi i}\int_L\frac{x(\tau)}{\tau-t}\,d\tau+\frac{1}{\pi i}\int_L\left[\frac{1}{h(\tau-t)}-\frac{1}{(\tau-t)}\right]x(\tau)\,d\tau = Sx+T_hx$$

satisfait à l'égalité

$$H^2 = (S+T_h)^2 = S^2+ST_h+T_hS+T_h^2 = I+T_1, \tag{3.9}$$

où l'opération $T_1 = ST_h+T_hS+T_h^2$ et l'opération T_h sont, en vertu de nos hypothèses et du corollaire (2.2), complètement continues dans l'espace $H_0^{\mu/2}(L)$, donc, aussi l'opération T_1 l'est aussi dans cet espace. Il en résulte que l'opération H est presque algébrique d'ordre 2 et admet les racines caractéristiques $+1$, -1.

Écrivons l'équation (3.7) sous la forme

$$(3.10)\quad A_0(t)x(t)+\frac{A_1(t)}{\pi i}\int\limits_L \frac{x(\tau)}{h(\tau-t)}+\frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{K(t,\tau)-K(t,t)}{h(\tau-t)}x(\tau)d\tau = x_0(t)$$

ou tout court

$$[A_0+A_1H+T_2]x = x_0$$

(où T_2 est une opération complètement continue dans l'espace $H_0^{\mu/2}$). Par analogie avec le cas précédent, d'après nos hypothèses, nous concluons que le régularisateur simple de l'opération $A(H)+T_2 = A_0+A_1H+T_2$ à l'idéal des opérations complètement continues dans l'espace $H_0^{\mu/2}$ admet la forme suivante:

$$(3.11)\quad R_{A(H)+T_2}x = [A_0^2(t)-A_1^2(t)]^{-1}\left[A_0(t)x(t)-\frac{A_1(t)}{\pi i}\int\limits_L \frac{x(\tau)}{h(\tau-t)}\right]d\tau .$$

Il en résulte:

THÉORÈME 3.2. *Si les fonctions $A_0(t)$, $K(t,\tau)$ satisfont à la condition de Hölder avec l'exposant $0<\mu\leqslant 1$ sur les lignes L, si la fonction $h(t)$ satisfait aux conditions du théorème 2.3, si en outre la condition (3.8) est satisfaite, alors l'équation (3.7) admet une d-caractéristique finie dans l'espace $H^{\mu/2}(L)$ et son indice ne dépend pas des composantes complètement continues:*

$$\varkappa_{A(H)+T} = \varkappa_{A(H)} \quad \textit{pour} \quad T\in\mathcal{J}.$$

III. Considérons enfin l'équation intégrale singulière suivante:

$$(3.12)\qquad A_0(s)x(s)+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{K(s,\sigma)}{h_0(\sigma-s)}x(\sigma)d\sigma = x_0(s),$$

où les fonctions $A_0(s)$, $K(s,\sigma)$, $x_0(s)$ satisfont à la condition de Hölder avec l'exposant $0<\mu\leqslant 1$ pour $0\leqslant\sigma$, $s\leqslant 2\pi$ et ont la période 2π, la fonction $h_0(s)$ satisfait aux conditions du théorème 2.4, en outre

$$(3.13)\qquad \inf_{0\leqslant s\leqslant 2\pi}|A^2(s)+K^2(s,s)|>0 .$$

L'opération

$$H_0x = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{x(\sigma)}{h_0(\sigma-s)}d\sigma$$

ne diffère de l'opération

$$Sx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}x(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}d\sigma$$

que par une composante complètement continue dans l'espace $H_0^{\mu/2}$, comme le prouve le Corollaire 2.3. Donc elle est presque algébrique avec

le même polynôme caractéristique que l'opération S. En répétant encore une fois les considérations précédentes, nous obtenons:

THÉORÈME 3.3. *Si les fonctions $A_0(s)$, $K(s,\sigma)$, $x_0(s)$ satisfont à la condition de Hölder avec l'exposant $0<\mu\leqslant 1$ pour $0\leqslant\sigma$, $s\leqslant 2$ et ont la période 2π, si la fonction $h_0(s)$ satisfait aux conditions du théorème 2.4, si en outre la condition (3.13) est satisfaite, alors l'équation (3.12) admet une d-caractéristique finie dans l'espace $H_0^{\mu/2}$ et son indice ne dépend pas de la composante complètement continue:*

$$\varkappa_{A(H_0)+T} = \varkappa_{A(H_0)} \quad \textit{pour} \quad T\in\mathcal{J}.$$

§ 4. Conditions d'existence des solutions des équations intégrales singulières. Nous démontrerons maintenant des théorèmes plus forts sur les équations intégrales considérées au paragraphe précédent. Nous rappellerons certaines notions auxiliaires introduites dans notre travail [7].

Soit un espace linéaire X et l'opération A ayant une d-caractéristique finie transformant l'espace X en lui-même (voir théorème 3.1 de ce travail). Soit Ξ un espace *total* de fonctionnelles additives et homogènes définies sur l'espace X, c'est-à-dire un espace de fonctionnelles tel que la condition $\xi x = 0$ pour tout $\xi\in\Xi$ entraîne $x = 0$. Nous définissons le nombre β_A^Ξ comme la *dimension* de l'espace des zéros de l'opération conjuguée A', c'est-à-dire

$$\beta_A^\Xi = \alpha_{A'},\quad \text{où}\quad (A'\xi)x = \xi(Ax) \text{ pour tout } x\in X \text{ et } \xi\in\Xi .$$

Évidemment, $\beta_A^\Xi\leqslant\beta_A$, mais en général $\beta_A^\Xi\neq\beta_A$ (voir [7]). L'opération A admet une d_Ξ-caractéristique finie, si les deux nombres α_A, β_A^Ξ sont finis et dans ce cas nous pouvons définir le *Ξ-indice* de la manière suivante:

$$\varkappa_A^\Xi = \beta_A^\Xi-\alpha_A = \alpha_{A'}-\alpha_A .$$

Si $\beta_A^\Xi = \beta_A$, l'opération A est dite *Φ_Ξ-opération.* Si A est une Φ_Ξ-opération, alors la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation $Ax = x_0$ ait une solution est que $\xi x_0 = 0$ pour tout ξ satisfaisant à l'équation conjuguée $A'\xi = 0$.

THÉORÈME 4.1. *Soient satisfaites les hypothèses du théorème 3.1. Alors l'opération*

$$(4.1)\qquad A_0(s)x(s)+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}K(\sigma,s)x(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}d\sigma$$

est une Φ_Ξ-opération où Ξ est l'espace des fonctionnelles ξ de la forme suivante

$$\xi x = \int\limits_0^{2\pi}\xi(t)x(t)dt,$$

où la fonction $\xi(t)\in H_0^{\mu/2}$.

Démonstration. Écrivons, comme toujours, l'opération (4.1) sous la forme

$$(A_0+A_1S+T_k)x = A_0(s)x(s)+\frac{A_1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}\,d\sigma+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} k(s,\sigma)x(\sigma)\,d\sigma,$$

où

$$A_1(s) = K(s,s), \qquad k(s,\sigma) = [K(\sigma,s)-K(s,s)]\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}.$$

L'opération T_k est complètement continue dans l'espace $H_0^{\mu/2}$ (corollaire 2.1). Nous avons pour $\xi(t)$, $x(t)\in H_0^{\mu/2}$:

$$\int_0^{2\pi}\xi(s)\left[A_0(s)x(s)+\frac{A_1}{2\pi}\int_0^{2\pi}x(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}\,d\sigma\right]ds$$
$$=\int_0^{2\pi}A_0(s)\xi(s)x(s)\,ds+\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}A_1(s)\xi(s)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}\,ds\right]x(\sigma)\,d\sigma$$
$$=\int_0^{2\pi}\left[A_0(s)\xi(s)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}A_1(\sigma)\xi(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{s-\sigma}{2}\,d\sigma\right]x(s)\,ds$$
$$=\int_0^{2\pi}\left[A_0(s)\xi(s)-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}A_1(\sigma)\xi(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}\,d\sigma\right]x(s)\,ds$$

(on peut transposer l'intégrale singulière avec une intégrale régulière). Alors l'opération conjuguée au sens de l'espace $\Xi = H_0^{\mu/2}$ admet la forme suivante:

$$(A_0+A_1S+T_k)' = A_0-SA_1+T_k' = A_0-A_1S+(A_1S-SA_1)+T_k'$$

où

$$T_k'\xi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}k(\sigma,s)\xi(\sigma)\,d\sigma.$$

Donc cette opération ne diffère du régularisateur R_A que par une composante complètement continue $A_1S-SA_1+T_k'$ (exemple I du §3). Il en résulte

$$(A_0-SA_1+T_k')H_0^{\mu/2}\subset H_0^{\mu/2}.$$

Par la régularisation de l'opération $A_0+A_1S+T_k$ nous obtenons

$$R_AA = I+T, \qquad AR_A = I+T_1.$$

Les opérations T, T_1, comme superpositions d'opérations continues et complètement continues dans l'espace C_0 (théorème 2.2), sont complètement continues dans cet espace, donc elles sont des Φ_{C_0}-opérations, où C_0 désigne l'espace des fonctionnelles ξ de la forme

$$\xi x = \int_0^{2\pi}\xi(t)x(t)\,dt, \tag{4.2}$$

où $\xi(t)\in C_0$. En remarquant que $H_0^{\mu/2}\subset C_0$ nous obtenons, d'après le théorème 2 de notre travail [8], que l'opération $A_0+A_1S+T_k$ est une $\Phi_{H_0^{\mu/2}}$-opération, où $H_0^{\mu/2}$ est l'espace des fonctionnelles de la forme (4.2) avec $\xi(t)\in H_0^{\mu/2}$. Remarquons ensuite que cette opération n'est pas définie sur tout l'espace C_0.

THÉORÈME 4.2. *Soient satisfaites les hypothèses du théorème 3.2. Alors l'opération*

$$A_0(t)x(t)+\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{K(t,\tau)}{\tau-t}x(\tau)\,d\tau$$

est une Φ_Ξ-opération, où Ξ est l'espace des fonctionnelles de la forme suivante:

$$\xi x = \int_L\xi(t)x(t)\,dt$$

où la fonction $\xi(t)\in H^{\mu/2}$.

La démonstration du théorème 4.2 est la même que celle du théorème 4.1, si nous remarquons que l'opération conjuguée admet le noyau $1/h_1(\tau-t)$, où la fonction $h_1(u) = -h(-u)$ satisfait aux mêmes conditions que la fonction $h(u)$.

THÉORÈME 4.3. *Soient satisfaites les hypothèses du théorème 3.3. Alors l'opération*

$$A_0(s)x(s)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{K(\sigma,s)}{h_0(\sigma-s)}x(\sigma)\,d\sigma$$

est une Φ_Ξ-opération, où Ξ est l'espace des fonctionnelles défini dans le théorème 4.1.

Le théorème s'établit comme les théorèmes précédents.

Travaux cités

[1] С. Г. Михлин, *Интегральные уравнения*, Москва-Ленинград 1949.

[2] Н. И. Мусхелишвили, *Сингулярные интегральные уравнения*, Москва 1962.

[3] F. Noether, *Ueber eine Klasse Singulaerer Integralgleichungen*, Math. Ann. 82 (1920).

[4] W. Pogorzelski, *Równania całkowe i ich zastosowania*, T. III, Warszawa 1960.

[5] D. Przeworska-Rolewicz, *Sur les équations involutives et leurs applications*, Studia Math. 20 (1961), p. 95-117.

[6] — *Équations avec opérations algébriques*, ibidem 22 (1963), p. 337-367.

[7] — and S. Rolewicz, *On operators with finite d-characteristic*, ibidem 24 (1964), p. 257-270.

[8] — and S. Rolewicz, *On operators preserving a conjugate space*, ibidem 25 (1965), p. 251-255.

[9] H. Poincaré, *Leçons de mécanique céleste*, III, chap. X, Paris 1910.

[10] W. Schmeidler, *Integralgleichungen mit Anwendungen in Physik und Technik* V.I.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 17. 2. 1964

STUDIA MATHEMATICA, T. XXV. (1965)

Integral representation of vector measures and linear operations

by

N. DINCULEANU (București)

1. Introduction. Let T be a locally compact space and ν a positive Radon measure on T. Let F be a Banach space, $(E(t))_{t\in T}$ a family of Banach spaces and $\mathscr{A}$ a fundamental family of continuous vector fields.

In [6]-[9] and [11]-[13] we have given integral representations of the form

$$(1) \qquad \langle f(x), z\rangle = \int \langle U_f(t)x(t), z\rangle d\nu(t)$$

for certain linear mappings f of Lebesgue spaces $\mathscr{L}^p_{\mathscr{A}}(\nu)$, $1 \leqslant p < \infty$, or of the space $\mathscr{K}_{\mathscr{A}}(T)$ into F, and of the form

$$(2) \qquad \langle \int x\,dm, z\rangle = \int \langle U_m(t)x(t), z\rangle d\nu(t)$$

for certain vector measures m absolutely continuous with respect to ν.

The proof has used essentially the fact that the spaces $E(t)$ and F were of countable type and that F was the dual of a Banach space.

Using the existence of a lifting of $\mathscr{L}^\infty_R(\nu)$ [19], Alexandra and Cassius Ionescu Tulcea [20] have succeeded in dropping the countability hypotheses in formula (1) in the case where E and F are locally convex and $E(t) = E$ for every $t\in T$.

In this paper we use also the lifting of $\mathscr{L}^\infty_R(\nu)$ to prove formula (2) (theorems 2 and 3), without any countability hypotheses in the case where $E(t) = E$ for every $t\in T$. Using (2) we then prove (1) and we give supplementary information about U_f and U_m. For simplicity we consider only the case of the Banach spaces E and F.

The linear mappings f on $\mathscr{L}^p_E(\nu)$ which can be represented by formula (1) can also be represented in the form

$$(3) \qquad f(x) = \int x\,dm,$$

where m is a suitable vector measure (Theorem 9).