[12] R. Schatten, *Norm ideals of completely continuous operators*, Berlin 1960.
[13] J. von Neumann, *Almost periodic functions in a group, I*, Trans. Amer. Math. Soc. 36 (1934), p. 445-492.

UNIVERSITY OF MINNESOTA,
MINNEAPOLIS, MINNESOTA

Reçu par la Rédaction le 27. 10. 1964

---

icm©

STUDIA MATHEMATICA, T. XXVI. (1965)

Charakterisierung der Quotienten in der zweidimensionalen diskreten Operatorenrechnung

von

W. JENTSCH (Halle/S.)

1. Einleitung. J. Mikusiński hat in [1] eine algebraisch begründete Operatorenrechnung entwickelt. Ausgehend von der Menge $\mathfrak{C}$ aller für $t \geqslant 0$ erklärten und dort stetigen, komplexwertigen Funktionen, wird nachgewiesen, daß $\mathfrak{C}$ mit der gewöhnlichen Addition und der Faltung

$$\{f(t)\}\{g(t)\} = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau \tag{1}$$

als Multiplikation einen Integritätsbereich bildet. Der zugehörige Quotientenkörper, der „Körper der Operatoren", dient als Fundament für den Aufbau der Theorie und für die Anwendung auf Differentialgleichungen.

In [2] hat S. Bellert eine „diskrete Operatorenrechnung" aufgebaut. Der Ausgangspunkt ist die Menge $\mathfrak{D}$ aller komplexwertigen Funktionen $\{a_m\}$ der diskreten Variablen $m = k, k+1, \ldots$ mit $k \in \Gamma$ (Γ Menge der ganzen Zahlen). In $\mathfrak{D}$ wird die Addition in der gewöhnlichen Weise und die Multiplikation durch

$$\{a_m\}\{b_m\} = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} a_\mu b_{m-\mu} \tag{2}$$

erklärt, woraus folgt, daß $\mathfrak{D}$ nicht nur ein Integritätsbereich, sondern sogar ein Körper, der „Körper der diskreten Operatoren" ist. Würde man sich auf den Fall $k = 0$ beschränken, könnte die Multiplikation (2) in der Form

$$\{a_m\}\{b_m\} = \sum_{\mu=0}^{m} a_\mu b_{m-\mu} \tag{3}$$

als diskretes Analogon zu (1) geschrieben werden. Die Menge dieser speziellen Funktionen wäre aber nur ein Integritätsbereich und kein Körper. In Analogie zu [1] könnte man zum zugehörigen Quotientenkörper übergehen. Von formalen Abweichungen abgesehen, wurde dieser Weg in [3] bzw. [4] beschritten.

In [5] wurden diese Überlegungen auf zwei Dimensionen verallgemeinert. In der Menge $\overline{\mathfrak{D}}_2$ aller komplexwertigen Funktionen a_{mn}, b_{mn} der diskreten Variablen $m, n = 0, 1, \ldots$ wird die Addition in der gewöhnlichen Weise, die Multiplikation durch

$$a_{mn} \cdot b_{mn} = \sum_{\mu,\nu=0,0}^{m,n} a_{\mu\nu} b_{m-\mu,n-\nu}, \tag{4}$$

das zweidimensionale Analogon zu (3) und das diskrete Analogon zu

$$\{f(x, y)\}\{g(x, y)\} = \int_0^x \int_0^y f(\xi, \eta) g(x-\xi, y-\eta)\, d\xi\, d\eta$$

(s. [6]), definiert. Zu dem dadurch erklärten Integritätsbereich $\overline{\mathfrak{D}}_2$ wird der Quotientenkörper $\overline{\mathfrak{Q}}_2$ betrachtet, mit dessen Hilfe man gewisse partielle Differenzengleichungen lösen kann. Gegenüber dem Eindimensionalen ergibt sich allerdings folgender Unterschied. Bei Funktionen *einer* diskreten Variablen auf der Grundlage von (3) gilt der Satz:

Jeder in p rationale Operator, bei dem der Grad des Nenners nicht kleiner ist als der des Zählers (p inverses Element zum Verschiebungsoperator), ist eine Funktion aus dem Integritätsbereich (s. etwa [4]), etwas modifiziert.

Der entsprechende Satz im Zweidimensionalen gilt nicht; so ist z. B. schon der einfache Operator $1/(p-q)$ keine Funktion aus dem Integritätsbereich $\overline{\mathfrak{D}}_2$. Den analogen Umstand gibt es ja bereits im kontinuierlichen Fall [1], [6] bzw. bei Verwendung der Laplace-Transformation (s. etwa [7]). Im Folgenden soll der geschilderte Nachteil in gewissem Sinne beseitigt werden, indem wir dem Definitionsbereich der zu betrachtenden Funktionen in Analogie zu [2] nicht mehr die Einschränkungen aus [5] auferlegen.

2. Körper der Funktionen. Wir betrachten die Menge $\mathfrak{Q}_2$ der für alle ganzzahligen m und n erklärten, komplexwertigen Funktionen $a = a_{mn}$, $b = b_{mn}, \ldots$ Für eine Funktion $a \in \mathfrak{Q}_2$ $(a \not\equiv 0)$ schreiben wir genauer $a_{mn}(M, N, \overline{f_i})$, wobei M, N ganze Zahlen sind und $\overline{\{f_i\}}$ $(i = 0, 1, \ldots)$ eine Folge ganzer Zahlen mit $f_0 = 0$ ist. Dabei setzen wir fest:

$$\begin{aligned} & a_{mn} = 0 \ \text{ für } \ m < M \ \text{ sowie} \\ & \text{für } \ m = M+i,\ n < N+\overline{f_i}\ (i < 0, 1, \ldots, \\ & a_{MN} \neq 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Die Funktionen aus $\mathfrak{Q}_2$ lassen sich auch als unendliche Matrizen (mit komplexen Elementen) auffassen, die oberhalb der M-ten Zeile

sowie in den übrigen Zeilen nach links von einer gewissen Stelle ab lauter Nullen besitzen. Abgesehen von der Nullmatrix gilt:

Die oberste Zeile, in der mindestens ein nichtverschwindendes Element steht, ist die M-te, und in dieser Zeile steht das linke nichtverschwindende „Randelement" in der N-ten Spalte.

In $\mathfrak{Q}_2$ werden die Addition in der üblichen Weise durch

$$(a+b)_{mn} = a_{mn} + b_{mn} \tag{6}$$

und die Multiplikation in Verallgemeinerung von (2) durch

$$a \cdot b = \sum_{\mu,\nu=-\infty}^{\infty} a_{\mu\nu} b_{m-\mu,n-\nu} \tag{7}$$

definiert. (Die gewöhnliche Multiplikation werden wir ohne Malpunkt, die Multiplikation (7) im Gegensatz dazu mit Malpunkt schreiben, doch lassen wir ihn weg, wenn ein Irrtum ausgeschlossen ist.)

Wie man leicht sieht, *bildet* $\mathfrak{Q}_2$ *mit* (6) *und* (7) *einen* (*kommutativen*) *Ring.* Ferner ist folgendes ersichtlich:

Es sei

$$\mathfrak{D}_2 = \{a_{mn}(M, N, \overline{f_i}) \mid M \geqslant 0,\ N \geqslant 0, \overline{f_i} \geqslant -N \ \textit{für}\ i \geqslant 1\} \cup \{0\}$$

und $\overline{\mathfrak{D}}_2$ *der auf der Grundlage von* (4) *konstruierte Integritätsbereich, dann gilt bzgl. beider Verknüpfungen* $\mathfrak{D}_2 \cong \overline{\mathfrak{D}}_2$.

Man sieht sofort, daß die Abbildung

$$a_{mn}(M, N, \overline{f_i}) = \begin{pmatrix} & & \vdots & \vdots & \\ & & 0 & 0 & \\ & & 0 & 0 & \\ \ldots\ 0 & 0 & a_{00} & a_{01} & \ldots \\ \ldots\ 0 & 0 & a_{10} & a_{11} & \ldots \\ & & \vdots & \vdots & \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \ldots \\ a_{10} & a_{11} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \end{pmatrix} = a_{mn} \in \overline{\mathfrak{D}}_2$$

einen Isomorphismus liefert.

Hieraus folgt, daß sich alle in [5] bewiesenen Eigenschaften von $\overline{\mathfrak{D}}_2$ auf $\mathfrak{D}_2 \subset \mathfrak{Q}_2$ übertragen. $\mathfrak{D}_2$ ist also ein Integritätsbereich, enthält eine zum Körper der komplexen Zahlen isomorphe Teilmenge, enthält Teilmengen, die isomorph zur Menge der Zahlenfolgen $\{a_n\}$ $(n = 0, 1, \ldots;\ a_n$ komplex) sind usw. Insbesondere besitzt $\mathfrak{D}_2$ ein Einselement

$$e_{mn} = 1 = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad n = m = 0, \\ 0 & \text{sonst}, \end{cases}$$

Summations- und Differenzenoperatoren sowie Verschiebungsoperatoren

$$u=\begin{cases}1 & \text{für} \quad m=1,\ n=0,\\ 0 & \text{sonst}\end{cases} \qquad \text{und} \qquad v=\begin{cases}1 & \text{für} \quad m=0,\ n=1,\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

mit den in [5] hergeleiteten Beziehungen. Hierbei ergeben sich in einigen Fällen Vereinfachungen in der Schreibweise, z. B.

$$(8) \qquad u^k b_{mn} = b_{m-k,n}, \quad v^l b_{mn} = b_{m,n-l} \quad \text{für alle } m,n$$
$$(k,l=0,1,\ldots;\ b_{mn}\in\mathfrak{D}_2).$$

(Beim Verschieben einer Matrix aus $\mathfrak{D}_2$ nach unten bzw. nach rechts werden die Nullen, die oberhalb der nullten Zeile bzw. links der nullten Spalte stehen, mit verschoben.)

Wir merken noch an, daß sich für $b_{mn}(M,N,\overline{g_i})\in\Omega_2$ die Beziehung

$$(9) \qquad u^k v^l b_{mn} = c_{mn}(M+k,N+l,\overline{g_i}) \qquad (k,l=0,1,\ldots)$$

ergibt.

Die Gleichungen

$$(10) \qquad up=1 \quad \text{und} \quad vq=1,$$

die in $\overline{\mathfrak{D}}_2$ nicht lösbar sind, besitzen jetzt in Ω_2 die Lösungen

$$(11) \qquad u^{-1}=p=\begin{cases}1 & \text{für} \quad m=-1,\ n=0,\\ 0 & \text{sonst},\end{cases}$$
$$v^{-1}=q=\begin{cases}1 & \text{für} \quad m=0,\ n=-1,\\ 0 & \text{sonst},\end{cases}$$

für deren Potenzen sich

$$(12) \qquad u^{-k}=p^k=\begin{cases}1 & \text{für} \quad m=-k,\ n=0,\\ 0 & \text{sonst},\end{cases}$$
$$v^{-l}=q^l=\begin{cases}1 & \text{für} \quad m=0,\ n=-l,\\ 0 & \text{sonst}\end{cases} \qquad (k,l=0,1,\ldots)$$

ergibt. Entsprechende Differenzensätze für Funktionen aus $\mathfrak{D}_2$ lassen sich nun wieder aus [5] übernehmen. Die Aussage (9) gilt wegen (12) jetzt für alle ganzen Zahlen k, l.

Wir bemerkten schon, daß Ω_2 ein Ring ist und beweisen jetzt

SATZ 1. *Ω_2 ist ein Körper.*

Es ist also noch zu zeigen, daß zu beliebigen Elementen a und b aus Ω_2, $a\not\equiv 0$, stets ein Element $x\in\Omega_2$ existiert mit

$$(13) \qquad a\cdot x = b.$$

Zum Beweis darf man sich auf Elemente vom Typ $a_{mn}(0,0,\overline{f_i})$, $b_{mn}(0,0,\overline{g_i})$ beschränken; denn gibt es zu diesen einen Quotienten $x_{mn}(0,0,\overline{h_i})$, dann existiert wegen (9) und (12) auch zu $a_{mn}(M,N,\overline{f_i})$ und $b_{mn}(K,L,\overline{g_i})$ ein Quotient $x_{mn}(-M+K,-N+L,\overline{h_i})$.

Wir führen den Beweis, indem wir die Elemente von x zeilenweise angeben. Zunächst sieht man, daß $x_{mn}=0$ für $m<0$ sowie für $m=0$, $n<0$ die Gleichungen

$$(14) \qquad (a\cdot x)_{mn} = \sum_{-\infty}^{\infty} a_{\mu\nu}x_{m-\mu,n-\nu} = b_{mn}$$

erfüllt; denn nach Voraussetzung ist $b_{mn}=0$ und auf der linken Seite verschwindet mindestens ein Faktor jedes Summanden. Die weiteren Elemente der nullten Zeile berechnen sich wie folgt: Aus (14) für $m=n=0$,

$$(a\cdot x)_{00} = a_{00}x_{00} = b_{00},$$

ergibt sich, da nach Voraussetzung a vom Typ $a_{mn}(0,0,\overline{f_j})$ ist, was wegen (5) $a_{00}\neq 0$ bedeutet,

$$x_{00} = \frac{b_{00}}{a_{00}}.$$

Aus (14) für $m=0$, $n\geqslant 1$,

$$(a\cdot x)_{0n} = \sum_{\nu=0}^{n} a_{0\nu}x_{0,n-\nu} = b_{0n},$$

läßt sich rekursiv

$$x_{0n} = \frac{1}{a_{00}}\Big(b_{0n} - \sum_{\nu=1}^{n} a_{0\nu}x_{0,n-\nu}\Big) \qquad (n\geqslant 1)$$

berechnen.

Angenommen, die Elemente bis zur $(m-1)$-ten Zeile seien berechnet, dann schreiben wir zur Bestimmung der Elemente der m-ten Zeile ($m>0$) (14) ausführlich

$$(15) \qquad (a\cdot x)_{mn} = a_{00}x_{mn} + \sum_{\mu>m}{}_1\, a_{\mu\nu}x_{m-\mu,n-\nu} + \sum_{0<\mu\leqslant m}{}_2\, a_{\mu\nu}x_{m-\mu,n-\nu} +$$
$$+ \sum_{\mu<0}{}_3\, a_{\mu\nu}x_{m-\mu,n-\nu} \sum_{\nu<0}{}_4\, a_{0\nu}x_{m,n-\nu} + \sum_{\nu>0}{}_5\, a_{0\nu}x_{m,n-\nu}$$
$$= b_{mn} \qquad (m \text{ fest}).$$

Für $\mu>m$ ist $m-\mu<0$, also $x_{m-\mu,n-\nu}=0$ und damit $\sum_1=0$, für $\mu<0$ ist $a_{\mu\nu}=0$ und damit $\sum_3=0$, für $\mu=0$, $\nu<0$ ist $a_{\mu\nu}=0$

und damit $\sum_4 = 0$; setzen wir noch für die bereits bekannte Summe $\sum_{0<\mu\leqslant m} {}_2\, a_{\mu\nu} x_{m-\mu,n-\nu} = c_{mn}$, so schreibt sich (15) kürzer

$$a_{00}x_{mn}+\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{0\nu}x_{m,n-\nu} = b_{mn}-c_{mn}. \tag{16}$$

Für genügend kleines n ist $b_{mn} = c_{mn} = 0$. Es gibt deshalb eine ganze Zahl $\overline{h}_m$ so, daß für alle $n < \overline{h}_m$ zunächst $b_{mn} = c_{mn} = 0$ ist und die Gleichungen (16) durch $x_{mn} = 0$ für alle $n < \overline{h}_m$ erfüllt werden. Wegen $a_{00} \neq 0$ läßt sich aus (16)

$$x_{m,\overline{h}_m} = (b_{m,\overline{h}_m} - c_{m,\overline{h}_m})/a_{00}$$

und analog der nullten Zeile rekursiv

$$x_{m,\overline{h}_m+l} = \frac{1}{a_{00}}\Big(b_{m,\overline{h}_m+l} - c_{m,\overline{h}_m+l} - \sum_{\nu=1}^{l} a_{0\nu}x_{m,\overline{h}_m+l-\nu}\Big), \qquad l = 1, 2, \ldots,$$

bestimmen.

Damit haben wir eine Funktion x_{mn} konstruiert, die den im Satz geforderten Bedingungen genügt, q. e. d.

3. Struktur der Inversen. Die zu einer Funktion gehörige Folge $\{\overline{f}_i\}$ ist bisher nicht eindeutig bestimmt. Jede Folge $\{\overline{d}_i\}$ mit $\overline{d}_0 = 0$, $\overline{d}_i \leqslant \overline{f}_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ leistet das gleiche wie $\{\overline{f}_i\}$. Wir legen von jetzt ab $\{f_i\}$ (ohne Querstrich geschrieben) eindeutig fest, indem wir zusätzlich erklären, daß

$$a_{M+k,N+f_k} \neq 0, \qquad k \in \{0, 1, \ldots\} \tag{17}$$

gilt, sofern in der $(M+k)$-ten Zeile überhaupt ein nichtverschwindendes Element steht. $a_{M+k,N+f_k}$ ist also das linke, nichtverschwindende Randelement der $(M+k)$-ten Zeile. Wenn in einer Zeile lauter Nullen stehen, setzen wir $f_k = \infty$. Man kann nun gewisse Aussagen für die Folge $\{h_i\}$ des Quotienten $x = b/a$ machen. Wir beschränken uns der Einfachheit halber auf $b = e_{mn}$.

Satz 2. *Es sei $x_{mn}(0, 0, h_i)$ das inverse Element von $a_{mn}(0, 0, f_i)$, dann ergeben sich zur rekursiven Berechnung der Größen h_m $(m \geqslant 1)$ folgende Fälle:*

a) $h_m = \infty$, wenn alle $f_i = \infty$ sind $(i = 1, \ldots, m)$;

b) $h_m = \operatorname{Min}_i (f_i + h_{m-i})$ $(i = 1, \ldots, m)$, wenn nicht alle $f_i = \infty$ sind $(i = 1, \ldots, m)$ und wenn das Minimum nur für ein i angenommen wird;

c) $h_m \geqslant \operatorname{Min}_i (f_i + h_{m-i})$ $(i = 1, \ldots, m;\ m \geqslant 2)$, wenn nicht alle $f_i = \infty$ sind $(i = 1, \ldots, m)$ und das Minimum für mehr als ein i angenommen wird. In diesem Falle hängt der Wert von h_m noch von gewissen Funktionswerten $a_{\mu\nu}$ ab.

Beweis. Der Fall a) ist trivial. Für beliebiges $m \geqslant 1$ führt die Annahme $x_{m,h_m} \neq 0$ und $x_{mn} = 0$ für $n < h_m$ zu $(a\cdot x)_{m,h_m} = a_{00}x_{m,h_m} \neq 0$, während nach Voraussetzung $(a\cdot x)_{m,h_m} = e_{m,h_m} = 0$ ist.

b) Wir zeigen die Behauptung für $m = 1$. Hier ist Voraussetzung $f_1 \neq \infty$, d. h. $a_{1,f_1} \neq 0$, und Behauptung $h_1 = \operatorname{Min}(f_1 + h_0) = f_1$ $(h_0 = 0$ wegen Satz 1). Wir nehmen an, es gäbe links von x_{1,f_1} weitere nichtverschwindende Elemente. Da es aber nach Satz 1 nur endlich viele geben kann, existiert ein am weitesten links stehendes, das wir mit

$$x_{1,f_1-k_1} \neq 0 \qquad (k_1 > 0) \tag{18}$$

bezeichnen. Wegen

$$(a\cdot x)_{1,f_1-k_1} = a_{00}x_{1,f_1-k_1} + a_{01}x_{1,f_1-k_1-1} + \ldots + a_{1,f_1}x_{0,-k_1} + \ldots = 0 \tag{19}$$

ergeben sich folgende Möglichkeiten: entweder es sind alle $a_{0n} = 0$ für $n \geqslant 1$, dann folgt sofort ein Widerspruch, oder es gibt für $n \geqslant 1$ mindestens ein Element $a_{0n} \neq 0$, dann folgt aus dem Bestehen der Gleichung (19), daß es mindestens ein weiteres Element $x_{1,f_1-k_2} \neq 0$ $(k_2 > k_1)$ gibt, und das ist auch ein Widerspruch. Damit haben wir gezeigt, daß sich links von x_{1,f_1} lauter Nullen befinden. Aus

$$(a\cdot x)_{1,f_1} = \sum_{-\infty}^{\infty} a_{\mu\nu}x_{1-\mu,f_1-\nu} = a_{00}x_{1,f_1} + a_{1,f_1}x_{00} = 0$$

ergibt sich nun sofort wegen $a_{00} \neq 0$ und $x_{00} = 1/a_{00}$

$$x_{1,f_1} = -\frac{a_{1,f_1}}{a_{00}^2} \neq 0.$$

Wir nehmen an, die Behauptung b) gilt für $i = 1, 2, \ldots, m-1$ und betrachten jetzt die Gleichung

$$\begin{aligned}(a\cdot x)_{m,h_m} &= \sum_{-\infty}^{\infty} a_{\mu\nu}x_{m-\mu,h_m-\nu} \\ &= a_{00}x_{m,h_m} + a_{01}x_{m,h_m-1} + \ldots + \\ &\quad + a_{1,f_1}x_{m-1,h_m-f_1} + a_{1,f_1+1}x_{m-1,h_m-f_1-1} + \ldots + \\ &\quad + a_{m,f_m}x_{0,h_m-f_m} + a_{m,f_m+1}x_{0,h_m-f_m-1} + \ldots \\ &= e_{m,h_m} = 0.\end{aligned} \tag{20}$$

Sind die Voraussetzungen von b) erfüllt, dann gibt es genau ein $i = j$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$, für welches das $\operatorname{Min}_i (f_i + h_{m-i})$ angenommen wird. Die Annahme, daß links von x_{m,h_m}, $h_m = f_j + h_{m-j}$, ein nichtverschwindendes Element liegt, wird mit denselben Überlegungen wie im Fall

$m=1$ widerlegt. Aus (20) folgt dann für $h_m = f_j + h_{m-j}$ wegen $h_m - f_i < h_{m-i}$ $(i = 1, \ldots, m; i \neq j)$

$$x_{m,h_m} = -\frac{1}{a_{00}} a_{j,f_j} x_{m-j,h_{m-j}} \neq 0. \tag{21}$$

c) Wir betrachten zunächst $m = 2$. Die Voraussetzung lautet hier $2f_1 = f_2 \neq \infty$; dies ergibt sich wegen $h_0 = 0$, $h_1 = f_1$ aus $f_1 + h_1 = f_2 + h_0$. Durch (20) für $m = 2$ und $h_2 = 2f_1 = f_2$ folgt

$$x_{2,f_2} = x_{2,2f_1} = -\frac{1}{a_{00}}(a_{1,f_1} x_{1,f_1} + a_{2,f_2} x_{00}). \tag{22}$$

Wie unter b) läßt sich indirekt schließen, daß es kein $n < f_2$ gibt mit $x_{2,n} \neq 0$. Da sich aber $x_{2,f_2} = 0$ ergibt, wenn

$$D_1 = a_{1,f_1} x_{1,f_1} + a_{2,f_2} x_{00} = 0 \tag{23}$$

ist, läßt sich nur $h_2 \geqslant 2f_1 = f_2 = \operatorname{Min}_i (f_i + h_{2-i})$ $(i = 1, 2)$ schließen, womit die Behauptung c) für $m = 2$ bewiesen ist.

Wir merken noch an, daß $h_2 = 2f_1 = f_2$ genau dann gilt, wenn

$$\overline{D_1} = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{1,f_1} \\ a_{1,f_1} & a_{2,f_2} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{24}$$

ist.

Wenn

$$D_{\lambda+1} = \sum_{i=0}^{\lambda} a_{1,f_1+i} x_{1,f_1+\lambda-i} + \sum_{i=0}^{\lambda} a_{2,f_2+i} x_{0,\lambda-i} = 0$$

ist für $\lambda = 0, \ldots, l-1$ und $D_{l+1} \neq 0$, dann gilt $h_2 = 2f_1 + l = f_2 + l$.

Für beliebige m lautet die Voraussetzung $f_{i_1} + h_{m-i_1} = f_{i_2} + h_{m-i_2} = \ldots = f_{i_r} + h_{m-i_r} = \overline{h_m}$, $2 \leqslant r \leqslant m$, $1 \leqslant i_\varrho \leqslant m$. Mit einigen Überlegungen, die zum Fall b) analog sind, folgt schließlich aus (20)

$$x_{m,\overline{h_m}} = -\frac{1}{a_{00}} \sum_{\varrho=1}^{r} a_{i_\varrho, f_{i_\varrho}} x_{m-i_\varrho, h_{m-i_\varrho}},$$

und $h_m \geqslant \overline{h_m} = \operatorname{Min}_i (f_i + h_{m-i})$ ist ersichtlich. Ersetzt man in der letzten Summe die als bekannt anzusehenden Faktoren $x_{\mu\nu}$ durch Funktionswerte von a, erhält man einen zu (24) analogen Term, dessen Nichtverschwinden $h_m = \overline{h_m}$ zur Folge hat.

Beispiele. 1. Es sei

$$\delta_2 = \{a_{mn}(M, N, f_i) \mid a_{mn} \in \mathfrak{D}_2,\ M = N = 0\},$$

d. h. δ_2 ist die Menge aller Funktionen, für die $a_{00} \neq 0$ gilt und $a_{mn} = 0$ ist, wenn ein Index negativ ist. Wegen $f_i \geqslant 0$ für alle i folgt aus Satz 2 für die Inversen $h_i \geqslant 0$ für alle i und wegen Satz 1 ergibt sich $x = 1/a = x_{mn}(0, 0, h_i) \in \delta_2$. Ist $\{f_i\} = \{0\}$, läßt sich aus Satz 2 zwar noch $h_1 = 0$, allgemein aber nur $h_i \geqslant 0$ schließen.

2. Aus $\{f_i\} = \{\infty\}$ $(i \geqslant 1)$ folgt $\{h_i\} = \{\infty\}$ $(i \geqslant 1)$.

3. Aus $\{f_i\} = \{i\}$ folgt $h_i = 1$, $h_i \geqslant i$ $(i \geqslant 2)$.

4. Zu $a = p - q = a_{mn}(-1, 0, f_i) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad m = -1,\ n = 0, \\ -1 & \text{für} \quad m = 0,\ n = -1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$(f_1 = -1,\ f_i = \infty$ für $i \geqslant 2)$ existiert nach Satz 1 das Inverse

$$x = \frac{1}{p-q} = x_{mn}(1, 0, h_i).$$

Nach Satz 2b ergibt sich wegen

$$h_m = \operatorname{Min}_i (f_i + h_{m-i}) = f_1 + h_{m-1}$$

mit vollständiger Induktion $\{h_i\} = \{-i\}$. Mit Hilfe von (21) erhält man nach entsprechender Verschiebung $x_{m+1,-m} = 1$, $m = 0, 1, \ldots$; wie man leicht sieht, hat man damit bereits alle nichtverschwindenden Elemente. Es ergibt sich also

$$x = \frac{1}{p-q} = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad m \geqslant 1,\ n = -(m-1), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und damit $x \notin \mathfrak{D}_2$, wie schon in der Einleitung erwähnt.

Literaturnachweis

[1] J. G. Mikusiński, *Sur les fondements du calcul opératoire*, Studia Math. 11 (1950), p. 41-70.

[2] S. Bellert, *Metoda operatorów liczbowych*, Rozprawy Elektrotechniczne 5 (1959), p. 515-586.

[3] J. Eliaš, *O operátorovej metóde riešenia diferenčných rovníc*, Mat.-fyz. časopis SAV 8 (1958), p. 203-227.

[4] L. Berg, *Zur Operatorenrechnung für Funktionen einer diskreten Veränderlichen*, Studia Math. 20 (1961), p. 227-243.

[5] W. Jentsch, *Operatorenrechnung für Funktionen zweier diskreter Variabler*, Wiss. Z. Univ. Halle XIV, M 4 (1965), S. 265-272.

[6] S. Vasilach, *Sur un calcul opérationnel algébrique pour fonctions de deux variables*, Revue de Mathém. pures et appliquées, II (1957), p. 181-238.

[7] D. Voelker, G. Doetsch, *Die zweidimensionale Laplace-Transformation*, Basel 1950.

Reçu par la Rédaction le 9. 11. 1964