

*DIE FASTDIREKTEN ZERLEGUNGEN  
EINER ALLGEMEINEN ALGEBRA, I\**

VON

MANFRED ARMBRUST (BONN)

Jeder universellen Verknüpfung von allgemeinen Algebren zu einer neuen Algebra entspricht ein Zerlegungsbegriff: Die Darstellung einer gegebenen Algebra als Ergebnis der Verknüpfung anderer Algebren. Zweck einer Zerlegungstheorie ist die Untersuchung algebraischer Strukturen durch Zurückführung auf "einfachere" Algebren; im Mittelpunkt stehen dabei der Vergleich der Zerlegungen ihrer "Feinheit" nach und die Frage nach der Existenz nicht verfeinerbarer Zerlegungen.

Im allgemeinen ist die Existenz nicht verfeinerbarer Zerlegungen nicht zu erwarten; andererseits kann es aber auch verschiedene nicht verfeinerbare Zerlegungen geben.

Es zeigt sich, daß vollständige Verbände — bis auf Isomorphie im Sinne von § 2 — höchstens eine nicht verfeinerbare direkte Zerlegung besitzen können (§ 8). Wichtige spezielle Zerlegungen sind als feinste direkte Zerlegungen gewisser vollständiger Verbände charakterisierbar. Die Zerlegung einer abelschen Torsionsgruppe in maximale primäre Untergruppen (siehe [5], S. 161, exercise 1) ist die feinste direkte Zerlegung des Untergruppenverbandes; die Zerlegung eines kommutativen Ringes mit Eins und absteigender Kettenbedingung für Ideale in Noethersche primäre Ringe (siehe [8], S. 205, Theorem 3) ist die feinste direkte Zerlegung des Idealverbandes; die Zerlegung eines Hilbertraumes in die Eigenräume eines vollstetigen symmetrischen Operators (siehe [7], S. 336, Theorem 6.4-B) ist die feinste direkte Zerlegung des Verbandes der topologisch abgeschlossenen invarianten Unterräume (§ 8).

---

\* Dissertation, Bonn 1964, Teil I. Diese Abhandlung wurde in großen Zügen auf der Tagung für Allgemeine Algebra in Warschau, 7-11 September 1964, dargestellt. Eine Zusammenfassung und Ergänzung der vollen Dissertation befindet sich in diesem Band (S. 364-367).

Diese Erkenntnis inspiriert einerseits die Idee der "treuen" Zerlegungen (§ 5): das sind Zerlegungen einer Algebra, die in einem gewissen "Strukturverband" der Algebra, nämlich im Kongruenzrelationenverband, eine direkte Zerlegung induzieren. Andererseits lehren die angeführten Beispiele, daß man sich bei der Konstituierung einer möglichst-effizienten Zerlegungstheorie nicht auf direkte Zerlegungen der Algebra beschränken darf: Weder die Summe der Primärkomponenten der Torsionsgruppe noch die topologisch abgeschlossene Summe der Eigenräume des vollstetigen symmetrischen Operators im Hilbertraum ist das volle direkte Produkt der jeweiligen Unteralgebren. Die geringe Tragweite einer Theorie der treuen direkten Zerlegungen erhellt schließlich daraus, daß bei endlichstelligen Operationen jede direkte Zerlegung der Algebra, die den ganzen Kongruenzrelationenverband direkt zerlegt, notwendig endlich ist (§ 5).

Damit ist die Etablierung eines umfassenderen allgemeinen Produktbegriffs legitimiert: Die Verknüpfung von endlich vielen Algebren soll nach wie vor das direkte Produkt liefern; im Falle unendlich vieler Faktoren sollen — bei Verzicht auf Eindeutigkeit — außer dem vollen direkten Produkt auch die erwähnten Summenbildungen in Gruppen resp. Hilberträumen erfaßt werden. Nun gibt es zwar bereits Verallgemeinerungen des direkten Produkts, welche das "schwache" direkte Produkt der Gruppentheorie umfassen: J. Hashimoto's " $L$ -beschränktes direktes Produkt" ([4], S. 92) und das direkte Produkt bezüglich einer ausgezeichneten Familie von Unteralgebren bei L. N. Karolinskaya [6]. Keine dieser bekannten Verknüpfungen liefert jedoch die direkte Summe von Hilberträumen (§ 1). Diesen Mangel behebt das in dieser Arbeit konstituierte "fastdirekte Produkt", das auch die von Hashimoto und Karolinskaya eingeführten Verknüpfungen enthält; das fastdirekte Produkt läßt sich abstrakt charakterisieren als umfassendste universelle subdirekte Verknüpfung von Algebren, die bei endlich vielen Faktoren das direkte Produkt liefert und in einem gewissen Sinne voll assoziativ ist (§ 1).

Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist die der fastdirekten Produktbildung entsprechende Zerlegungstheorie. Die fastdirekten Zerlegungen einer Algebra sind repräsentierbar durch Mengen von Kongruenzrelationen der Algebra (§ 2); deshalb kann die Zerlegungstheorie rein relationentheoretisch aufgebaut werden: alle Definitionen und Sätze bleiben sinnvoll, wenn man an Stelle von Algebren Mengen  $A$  mit einem die Identität enthaltenden, voll durchschnittsabgeschlossenen System  $C$  von Äquivalenzrelationen in  $A$  betrachtet. Deshalb handelt es sich in Wahrheit um eine Theorie der die Menge  $A$  fastdirekt zerlegenden Teilsysteme eines solchen Hüllensystems  $C$  über  $A \times A$ ; treue fastdirekte

Zerlegungen induzieren direkte Zerlegungen von  $C$ , betrachtet als vollständiger Verband (§ 5) <sup>(1)</sup>.

Zu jedem nichtleeren System von treuen fastdirekten Zerlegungen der Menge  $A$  mit dem Hüllensystem  $C$  gibt es eine feinste gemeinsame Vergrößerung; die grösste Zerlegung entspricht der trivialen Darstellung von  $A$  als fastdirektes Produkt von sich selbst. Es kann höchstens eine nicht verfeinerbare treue fastdirekte Zerlegung geben; diese ist dann die feinste und damit das System aller treuen fastdirekten Zerlegungen ein vollständiger Verband unter der Relation der Verfeinerung. Allerdings braucht es im allgemeinen nicht einmal zu zwei treuen fastdirekten Zerlegungen eine gemeinsame Verfeinerung zu geben; in wichtigen Spezialfällen jedoch — bei induktivem  $C$  oder falls  $\varrho \cdot \varrho' = A \times A$  für jedes Zentrumselement  $\varrho$  von  $C$  mit seinem Komplement  $\varrho' \in C$  — bilden die treuen fastdirekten Zerlegungen einen beschränkt vollständigen Verband. Das System aller treuen direkten Zerlegungen ist sogar bei beliebigem  $C$  ein beschränkt vollständiger Verband (§ 7).

Herrn Professor Dr. Jürgen Schmidt habe ich für seine mannigfachen Anregungen zu dieser Arbeit ganz besonders zu danken.

**§ 1. Fastdirektes Produkt.** Die Operationen  $f_i$  der hier betrachteten Algebren  $(A, (f_i)_{i \in I})$  werden als überall ausführbar und eindeutig vorausgesetzt:  $f_i$  ist eine eindeutige Abbildung von  $A^{K_i}$  in  $A$ ; dabei sind  $I$  und  $K_i$  völlig beliebige Mengen.

Das direkte Produkt  $\times_{t \in T} (A_t, (f_{ti})_{i \in I})$  einer Familie von Algebren  $(A_t, (f_{ti})_{i \in I})$  des Typus  $(K_i)_{i \in I}$  ist eine Algebra  $(A, (f_i)_{i \in I})$ , deren Grundmenge  $A$  das direkte (cartesische) Produkt  $\times_{t \in T} A_t$  der Grundmengen  $A_t$  ist und deren Operationen  $f_i$  komponentenweise erklärt sind: Versteht man unter  $\text{pr}_t$  die kanonische Projektion von  $A$  auf  $A_t$ , so hat man für jede Folge  $(a_k)_{k \in K_i}$  vom Typus  $K_i$  in  $A$

$$\text{pr}_t f_i(a_k)_{k \in K_i} = f_{ti}(\text{pr}_t a_k)_{k \in K_i};$$

die Projektionen  $\text{pr}_t$  sind dann Homomorphismen per definitionem. *Subdirektes Produkt* der Algebren  $A_t$  ist jede Unteralgebra  $A'$  des direk-

<sup>(1)</sup> Nicht jedes solche Hüllensystem  $C$  über  $A \times A$  ist Kongruenzrelationsverband einer algebraischen Struktur in  $A$  mit überall ausführbaren Operationen; es gibt aber stets partielle Operationen  $(f_i)_{i \in I}$  in  $A$ , so daß  $C$  gerade aus den Kongruenzrelationen der partiellen Algebra  $(A, (f_i)_{i \in I})$  besteht. Trotzdem ist die hier entwickelte Zerlegungstheorie nicht anwendbar auf partielle Algebren, weil dort direkte Zerlegungen nicht durch Mengen von Kongruenzrelationen ohne Rückgriff auf die Operationen der Algebra charakterisiert werden können.

Es sei noch hingewiesen auf die Möglichkeit der Repräsentierung von Zerlegungen durch Systeme von Homomorphismen; siehe etwa Goldie [3].

ten Produkts mit der Eigenschaft, daß die Einschränkungen der  $\text{pr}_t$  auf  $A'$  noch surjektiv auf  $A_t$  sind.

Ein subdirektes Produkt von eminenter Bedeutung ist das *schwache* oder *diskrete direkte Produkt* der Gruppentheorie: Ist der Typus  $(K_i)_{i \in I}$  der Algebrenfamilie  $(A_t)_{t \in T}$  endlichstellig, d. h. sind alle  $K_i$  endlich, und besitzt jede Algebra  $A_t$  eine einelementige Unteralgebra  $\{e_t\}$ , so ist die Menge aller  $a \in \prod_{t \in T} A_t$  mit  $\text{pr}_t a = e_t$  für fast alle  $t \in T$  eine Unteralgebra

des direkten Produkts der  $A_t$  und somit offenbar subdirektes Produkt. Eine von L. N. Karolinskaya [6] angegebene Verallgemeinerung dieses diskreten direkten Produkts besteht in der Ersetzung der einelementigen Unteralgebren  $\{e_t\}$  durch beliebige Unteralgebren  $A'_t \subset A_t$ : Die Menge aller  $a \in \prod_{t \in T} A_t$  mit  $\text{pr}_t a \in A'_t$  für fast alle  $t \in T$  ist Unteralgebra des direkten

Produkts der  $A_t$  und daher subdirektes Produkt, falls entweder alle  $A_t = \emptyset$  oder kein  $A_t = \emptyset$  und dabei fast alle  $A'_t \neq \emptyset$ . Dieser Begriff läßt sich in naheliegender Weise noch weiter verallgemeinern, auch auf Algebren mit beliebigstelligen Operationen: Sei  $(A_t)_{t \in T}$  eine Familie von Algebren  $A_t$  eines beliebigen Typus; ein subdirektes Produkt  $A'$  der  $A_t$  heiße *K-Produkt*, wenn es Unteralgebren  $A'_t \subset A_t$  und einen Filter  $F_K$  über dem Indexbereich  $T$  gibt, so daß  $A'$  gerade die Menge aller  $a \in \prod_{t \in T} A_t$  mit  $\text{pr}_t a \in A'_t$  für  $F_K$ -fast alle  $t \in T$  ist.

Eine ähnliche Verallgemeinerung des diskreten direkten Produkts stammt von J. Hashimoto [4], S. 92; fordert man von seinen "*L*-beschränkten direkten Produkten" zusätzlich die Subdirektheit, so erhält man gerade die *H-Produkte*: das sind subdirekte Produkte  $A'$  der  $A_t$ , zu denen es einen Filter  $F_H$  über  $T$  gibt, derart daß für jedes  $a' \in A'$  gilt:  $A'$  ist die Menge aller  $a \in \prod_{t \in T} A_t$  mit  $\text{pr}_t a = \text{pr}_t a'$  für  $F_H$ -fast alle  $t \in T$ .

Trotz der formalen Ähnlichkeit sind *K*- und *H*-Produkt unvergleichbar; daß nicht jedes *K*-Produkt ein *H*-Produkt ist, lehrt das einfache

Beispiel 1. Sei  $T$  die Menge  $N$  der natürlichen Zahlen, jedes  $A_t = D = \{0, 1, 2\}$  ohne Operationen (d. h.  $I = \emptyset$ ), jedes  $A'_t = \{0, 1\}$ ,  $F_K$  der charakteristische Filter von  $N$ . Das zugehörige *K*-Produkt  $A'$  ist dann die Menge aller  $a \in D^N$  mit  $\text{pr}_n a = 0$  oder 1 für fast alle  $n \in N$ , mithin enthält  $A'$  die Folgen  $c_0 = (0)_{n \in N}$  und  $c_1 = (1)_{n \in N}$ ; wäre  $A'$  ein *H*-Produkt, so müßte (da  $\text{pr}_n c_0 \neq \text{pr}_n c_1$  für alle  $n \in N$  gilt) der zugehörige Filter  $F_H$  die ganze Potenzmenge von  $N$  sein.

Ebenso leicht zeigt man, daß auch nicht jedes *H*-Produkt ein *K*-Produkt ist:

Beispiel 2. Sei  $T = N$  und, für  $n \in N$ ,  $A_n = \{0, 1\}$  mit der null-

stelligen Operation  $g^{(n)} = 0$  und den einstelligen Operationen  $f_m^{(n)}$  ( $m \in N$ ) mit

$$f_m^{(n)}x = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n, \\ 1 & \text{für } m = n. \end{cases} \quad (x \in A_n)$$

Die Menge aller  $a \in \{0, 1\}^N$  mit  $\text{pr}_n a = 0$  für fast alle  $n \in N$  ist offenbar ein  $H$ -Produkt der  $A_n$  mit dem charakteristischen Filter von  $N$ , aber kein  $K$ -Produkt, weil jede Algebra  $A_n$  keine Unteralgebra außer sich selbst enthält und deshalb jedes  $K$ -Produkt das volle direkte Produkt der  $A_n$  ist.

Man kann allerdings durch eine weitere Verallgemeinerung des  $K$ -Produkts das  $H$ -Produkt mit erfassen, nämlich indem man statt der ausgezeichneten Unteralgebren beliebige Teilmengen  $A'_t \subset A_t$  zuläßt; für das  $H$ -Produkt genügen bereits einelementige  $A'_t$ . Aber selbst dieses erweiterte  $K$ -Produkt umfaßt nicht die direkte Summe von Hilberträumen:

Beispiel 3. Sei  $T = N$ , jedes  $A_n$  ein Hilbertraum und  $A'$  die direkte Summe der  $A_n$ . Wäre  $A'$  ein  $K$ -Produkt der  $A_n$  bezüglich der ausgezeichneten Teilmengen  $A'_n$  und des Filters  $F_K$ , so hätte man zunächst ein  $F_0 \in F_K$ , derart daß, für jedes  $n \in F_0$ ,  $A'_n$  einen von 0 verschiedenen Vektor enthielte; sodann könnte man zu jedem  $n \in F_0$  mit beschränktem  $A'_n$  ein  $a_n \in A'_n$  finden mit

$$\frac{1}{2} \sup \{ \|x\| : x \in A'_n \} < \|a_n\|,$$

also hätte man ein  $a \in A'$  mit  $\text{pr}_n a = a_n$  für alle  $n \in F_0$  mit beschränktem  $A'_n$ , damit auch  $2a \in A'$  und schließlich  $F_1 = \{n \in N : 2\text{pr}_n a \in A'_n\} \in F_K$ . Als Element von  $F_K$  wäre  $F_0 \cap F_1$  jedenfalls unendlich; wegen  $2\text{pr}_n a = 2a_n \notin A'_n$  für jedes  $n \in F_0$  mit beschränktem  $A'_n$  müßte dann aber, für unendlich viele  $n \in F_0$ ,  $A'_n$  unbeschränkt sein, was offensichtlich unmöglich ist.

Ein weiterer Nachteil des  $K$ -Produkts ist sein Mangel an Assoziativität: Man kann zum Beispiel ein  $K$ -Produkt  $A'$  einer gewissen Algebrenfamilie  $(A_t)_{t \in T}$  und eine Klasseneinteilung  $P$  von  $T$  angeben, derart daß  $A'$  keinem  $K$ -Produkt der  $(A^{(S)})_{S \in P}$  kanonisch isomorph ist, wobei  $A^{(S)} = \{(\text{pr}_t a)_{t \in S} : a \in A'\}$ . Diesem Manko kann durch Zulassung weiterer subdirekter Produkte abgeholfen werden; dazu zunächst eine Präzisierung des Begriffs "subdirekte Verknüpfung":

Definition 1. Eine (universelle) subdirekte Verknüpfung ist eine auf der Klasse aller Algebrenfamilien erklärte Funktion  $\Pi$ , die der Familie  $(A_t)_{t \in T}$  eine (beliebige) Menge  $\prod_{t \in T} A_t$  von subdirekten Produkten der  $A$  eindeutig zuordnet. Die subdirekte Verknüpfung  $\Pi$  heißt asso-

ziativ<sup>(2)</sup>, wenn für jede Familie  $(A_t)_{t \in T}$ , jedes  $A' \in \prod_{t \in T} A_t$  und jede Klasseneinteilung  $P$  von  $T$  gilt: für jedes  $S \in P$  ist  $A^{(S)} = \{(\text{pr}_t a)_{t \in S} : a \in A'\} \in \prod_{t \in S} A_t$ , und  $\{(\text{pr}_t a)_{t \in S} : a \in A'\}_{S \in P}$  –kanonisch isomorph zu  $A'$  – liegt in  $\prod_{S \in P} A^{(S)}$ .

Beispiele assoziativer subdirekter Verknüpfungen sind das subdirekte Produkt –  $\prod_{t \in T} A_t$  ist die Menge aller subdirekten Produkte der  $A_t$  –, das direkte Produkt –  $\prod_{t \in T} A_t = \{ \times_{t \in T} A_t \}$ , falls alle  $A_t \neq \emptyset$  oder alle  $A_t = \emptyset$ , sonst  $\prod_{t \in T} A_t = \emptyset$  –, das diskrete direkte Produkt bezüglich einer Familie von Unteralgebren –  $\prod_{t \in T} A_t$  besteht aus allen subdirekten Produkten  $A'$  der  $A_t$ , zu denen es Familien  $(A'_t)_{t \in T}$  von Unteralgebren  $A'_t \subset A_t$  gibt, derart daß  $a \in A'$  genau dann, wenn  $\text{pr}_t a \in A'_t$  für fast alle  $t \in T$ .

Die einschränkenden Forderungen an eine möglichst umfassende Verallgemeinerung des diskreten direkten Produkts lassen sich nun exakt formulieren: Es soll sich dabei um eine assoziative subdirekte Verknüpfung handeln, die auf endlichen Algebrenfamilien – d. h. auf Familien  $(A_t)_{t \in T}$  mit endlichem Indexbereich  $T$  – mit dem direkten Produkt übereinstimmt. Eine “möglichst umfassende” solche Verknüpfung bietet sich dann unmittelbar an: Sei  $\prod_{t \in T}^* A_t$  die mengentheoretische Vereinigung aller  $\prod_{t \in T} A_t$ , wobei  $\Pi$  eine assoziative subdirekte Verknüpfung ist, die auf endlichen Familien mit dem direkten Produkt übereinstimmt; trivialerweise ist  $\Pi^*$  eine subdirekte Verknüpfung und liefert für endliche Familien das direkte Produkt; die Assoziativität von  $\Pi^*$  erschließt man ebenfalls unmittelbar aus der Definition. Das ist die für diese Arbeit fundamentale

**Definition 2.** Die subdirekten Produkte in  $\prod_{t \in T}^* A_t$  heißen *fast-direkte Produkte* der Algebrenfamilie  $(A_t)_{t \in T}$ .

Eine überraschend einfache Konkretisierung dieser abstrakten Definition liefert

**Satz 1.** *Ein subdirektes Produkt  $A'$  der Algebren  $(A_t)_{t \in T}$  ist fast-direkt genau dann, wenn zu beliebigen  $a, b \in A'$  und  $U \subset T$  auch  $c \in A'$  mit  $\text{pr}_t c = \text{pr}_t a$  für alle  $t \in U$  und  $\text{pr}_t c = \text{pr}_t b$  für alle  $t \in T - U$ .*

**Beweis.** Man betrachte die subdirekte Verknüpfung  $\Pi'$ , die jeder Algebrenfamilie  $(A_t)_{t \in T}$  alle subdirekten Produkte mit der Bedingung des Satzes zuordnet. Die Verknüpfung  $\Pi'$  ist assoziativ: Sei  $A' \in \prod_{t \in T}^* A_t$  und  $P$  eine Klasseneinteilung von  $T$ ; natürlich ist für  $S \in P$  die Algebra

<sup>(2)</sup> Besser: assoziativ von oben; siehe meine Note [1].

$A^{(S)} = \{(\text{pr}_t a)_{t \in S} : a \in A'\}$  subdirektes Produkt der  $(A_t)_{t \in S}$ , und zu  $U \subset S$  und  $a' = (\text{pr}_t a)_{t \in S}$ ,  $b' = (\text{pr}_t b)_{t \in S} \in A^{(S)}$  mit  $a, b \in A'$  hat man  $c \in A'$  mit  $\text{pr}_t c = \text{pr}_t a$  für alle  $t \in U$  und  $\text{pr}_t c = \text{pr}_t b$  für alle  $t \in T - U$ , insbesondere also  $\text{pr}_t c = \text{pr}_t b$  für  $t \in S - U$ , so daß  $c' = (\text{pr}_t c)_{t \in S} \in A^{(S)}$  die verlangte Eigenschaft hat. Weiter ist  $A^* = \{((\text{pr}_t a)_{t \in S})_{S \in P} : a \in A'\}$  subdirektes Produkt von  $(A^{(S)})_{S \in P}$ , und zu  $Q \subset P$  und  $a^* = ((\text{pr}_t a)_{t \in S})_{S \in P}$ ,  $b^* = ((\text{pr}_t b)_{t \in S})_{S \in P} \in A^*$  mit  $a, b \in A'$  hat man wieder  $c \in A'$  mit  $\text{pr}_t c = \text{pr}_t a$  für alle  $t \in S \in Q$  und  $\text{pr}_t c = \text{pr}_t b$  für alle  $t \in S \in P - Q$ , so daß  $c^* = ((\text{pr}_t c)_{t \in S})_{S \in P} \in A^*$  der Forderung genügt. Daß  $\Pi'$  im Endlichen direkt ist, schließt man per Assoziativität durch Induktion: Für  $T = \{0, 1\}$  hat man nämlich zu  $A' \in \prod_{t \in T}' A_t$  und beliebigen  $x \in A_0, y \in A_1$ , wegen der Subdirektheit von  $A', a, b \in A'$  mit  $\text{pr}_0 a = x, \text{pr}_1 b = y$ , mithin existiert  $c \in A'$  mit  $\text{pr}_0 c = \text{pr}_0 a = x, \text{pr}_1 c = \text{pr}_1 b = y$ , das heißt  $c = (x, y) \in A'$ . Damit ist  $\prod_{t \in T}' A_t \subset \prod_{t \in T}^* A_t$  für beliebige  $(A_t)_{t \in T}$  gezeigt; daß umgekehrt jedes fastdirekte Produkt die Bedingung des Satzes erfüllt, sieht man leicht: Sei  $A' \in \prod_{t \in T}^* A_t, U \subset T$  und  $P = \{U, T - U\}$ ; dann ist  $A^* = \{((\text{pr}_t a)_{t \in S})_{S \in P} : a \in A'\}$  das direkte Produkt von  $\{(\text{pr}_t a)_{t \in U} : a \in A'\}$  und  $\{(\text{pr}_t b)_{t \in T - U} : b \in A'\}$ , so daß also zu  $a, b \in A'$  das Paar  $c^* = ((\text{pr}_t a)_{t \in U}, (\text{pr}_t b)_{t \in T - U}) \in A^*$  das verlangte  $c \in A'$  liefert. Somit ist  $\Pi^* = \Pi'$ , was zu zeigen war.

Trivialerweise ist das direkte Produkt fastdirekt; weiter sind  $K$ - und  $H$ -Produkt fastdirekt: Ist  $A'$   $K$ -Produkt von  $(A_t)_{t \in T}$  bezüglich der Teilmengen  $A'_t \subset A_t$  und des Filters  $F_K$  über  $T$  und setzt man, für beliebiges  $x \in \times_{t \in T} A_t, F_x = \{t \in T : \text{pr}_t x \in A'_t\}$  — also  $A' = \{x \in \times_{t \in T} A_t : F_x \in F_K\}$  —, so hat man zu  $a, b \in A', U \subset T$  und  $c \in \times_{t \in T} A_t$  mit  $\text{pr}_t c = \text{pr}_t a$  für  $t \in U, \text{pr}_t c = \text{pr}_t b$  für  $t \in T - U$

$$F_c = (U \cap F_a) \cup ((T - U) \cap F_b) \supset F_a \cap F_b \in F_K,$$

also  $F_c \in F_K$  und damit  $c \in A'$ . Schließlich zeigt eine simple analytische Argumentation, daß die direkte Summe der Hilberträume  $A_t (t \in T)$  ein fastdirektes Produkt der  $A_t$  ist: Sind nämlich  $a, b \in \times_{t \in T} A_t$  mit  $\sum_{t \in T} \|\text{pr}_t a\|^2 < \infty$  und  $\sum_{t \in T} \|\text{pr}_t b\|^2 < \infty$  und ist  $U \subset T$ , so konvergiert auch  $\sum_{t \in T} \|\text{pr}_t c\|^2$ , wenn  $\text{pr}_t c = \text{pr}_t a$  für  $t \in U$  und  $\text{pr}_t c = \text{pr}_t b$  für  $t \in T - U$ .

**§ 2. Fastdirekte Zerlegungen.** Zur Vermeidung trivialer Fallunterscheidungen wird vorausgesetzt, daß alle im folgenden auftretenden Algebren mindestens zwei Elemente enthalten.

Die Algebra  $A$  sei durch den Isomorphismus  $\varphi$  auf ein fastdirektes Produkt der Familie  $(A_t)_{t \in T}$  abgebildet; dann möge das Paar  $((A_t)_{t \in T}, \varphi)$  eine Darstellung von  $A$  als fastdirektes Produkt der  $A_t$  heißen. Zwei

Darstellungen  $((A_t)_{t \in T}, \varphi)$ ,  $((B_s)_{s \in S}, \psi)$  von  $A$  sollen äquivalent heißen, wenn es eine eindeutige Abbildung  $\beta$  von  $T$  auf  $S$  und dazu eine Familie  $(\alpha_t)_{t \in T}$  von Bijektionen  $\alpha_t$  von  $A_t$  auf  $B_{\beta(t)}$  gibt, so daß, für alle  $t \in T$ ,  $\text{pr}_{\beta(t)}\psi = \alpha_t \text{pr}_t\varphi$  (auf der linken Seite dieser Gleichung bezeichnet "pr" die Projektionen von  $\prod_{s \in S} B_s$ , auf der rechten die von  $\prod_{t \in T} A_t$ ). Die

Abbildungen  $\alpha_t$  sind dann eo ipso Isomorphismen.

Jeder Darstellung  $((A_t)_{t \in T}, \varphi)$  von  $A$  als fastdirektes Produkt entspricht eine Familie  $(\varrho_t)_{t \in T}$  von Kongruenzrelationen  $\varrho_t = \varrho_{\text{pr}_t\varphi}$  in  $A$ . Dabei ist wegen  $|A_t| \geq 2$  jedenfalls  $\varrho_t \neq A \times A$  für alle  $t \in T$ ; weiter hat man den

HILFSSATZ 1. Sind  $U, V \subset T$  und  $\bigcap_{t \in U} \varrho_t \subset \bigcap_{t \in V} \varrho_t$ , so folgt  $U \supset V$

Beweis. Wäre  $t_0 \in V$  und  $t_0 \notin U$ , so hätte man  $a, b \in A$  mit  $\text{pr}_{t_0}\varphi a \neq \text{pr}_{t_0}\varphi b$ , dazu wegen der Fastdirektheit von  $\varphi A$  ein  $c \in A$  mit  $\text{pr}_{t_0}\varphi c = \text{pr}_{t_0}\varphi a$ ,  $\text{pr}_t\varphi c = \text{pr}_t\varphi b$  für alle  $t \in U$ , mithin nach Voraussetzung  $\text{pr}_t\varphi c = \text{pr}_t\varphi b$  für alle  $t \in V$ , insbesondere also  $\text{pr}_{t_0}\varphi c = \text{pr}_{t_0}\varphi b$  mit Widerspruch.

KOROLLAR. Für  $s, t \in T$  mit  $s \neq t$  ist  $\varrho_s \neq \varrho_t$ .

Somit bestimmt die zugehörige Menge  $R = \{\varrho_t : t \in T\}$  der induzierten Kongruenzrelationen die Darstellung bis auf Äquivalenz eindeutig, wenn man noch beachtet, daß die Darstellung  $((A/\varrho_t)_{t \in T}, \varphi^*)$  mit  $\varphi^*a = (\varrho_t a)_{t \in T}$  für  $a \in A$  zur Darstellung  $((A_t)_{t \in T}, \varphi)$  äquivalent ist. Da umgekehrt äquivalenten Darstellungen offenbar dieselbe Menge  $R$  von Kongruenzrelationen entspricht, repräsentieren die induzierten Kongruenzrelationensysteme eineindeutig die Äquivalenzklassen von Darstellungen:

Definition 3. Eine fastdirekte Zerlegung der Algebra  $A$  ist eine durch eine Darstellung von  $A$  als fastdirektes Produkt induzierte Menge von Kongruenzrelationen in  $A$ .

Ist  $R$  eine fastdirekte Zerlegung von  $A$  und  $((A_t)_{t \in T}, \varphi)$  eine zugehörige Darstellung, so schließt man aus der Eineindeutigkeit von  $\bigcap_{\varrho \in R} \varrho = \text{id}$  (= Identität in  $A$ ); weiter folgt aus der Fastdirektheit von  $\varphi A$ , für beliebiges  $S \subset R$ ,  $(\bigcap_{\varrho \in S} \varrho) \cdot (\bigcap_{\varrho \in R-S} \varrho) = A \times A$ . Hat man umgekehrt eine Menge  $R$  von Kongruenzrelationen in  $A$  mit diesen beiden Eigenschaften und  $A \times A \notin R$ , dann ist offensichtlich  $((A/\varrho)_{\varrho \in R}, \varphi^*)$  mit  $\varphi^*a = (\varrho a)_{\varrho \in R}$  ( $a \in A$ ) eine Darstellung von  $A$  als fastdirektes Produkt der Algebren  $A/\varrho$  mit  $R$  als zugehörigem Kongruenzrelationensystem. Das ergibt den

SATZ 2. Eine Menge  $R$  von Kongruenzrelationen in  $A$  ist fastdirekte Zerlegung von  $A$  genau dann, wenn

$$(i) \bigcap_{\varrho \in R} \varrho = \text{id},$$

(ii)  $(\bigcap_{\varrho \in S} \varrho) \cdot (\bigcap_{\varrho \in R-S} \varrho) = A \times A$  für jedes  $S \subset R$ ,

(iii)  $A \times A \notin R$ .

Die Direktheit der Darstellung  $((A_t)_{t \in T}, \varphi)$  von  $A$  als fastdirektes Produkt der  $A_t$ , d. h. die Surjektivität des Isomorphismus  $\varphi$  auf das direkte Produkt  $\bigtimes_{t \in T} A_t$ , vererbt sich auf äquivalente Darstellungen.

Deshalb ist es sinnvoll, die den direkten Darstellungen entsprechenden fastdirekten Zerlegungen *direkte Zerlegungen* von  $A$  zu nennen. Offenbar ist eine fastdirekte Zerlegung  $R$  von  $A$  direkt genau dann, wenn es zu jeder Folge  $(a_\varrho)_{\varrho \in R}$  von Elementen  $a_\varrho \in A$  ein  $a \in A$  gibt mit  $\varrho a = \varrho a_\varrho$  für alle  $\varrho \in R$ . Damit hat man zu Satz 2 das

KOROLLAR. *Eine Menge  $R$  von Kongruenzrelationen in  $A$  ist direkte Zerlegung von  $A$  genau dann, wenn*

(i)  $\bigcap_{\varrho \in R} \varrho = \text{id}$ ,

(ii)\*  $\bigcap_{\varrho \in R} \varrho a_\varrho \neq \emptyset$  für jede Folge  $(a_\varrho)_{\varrho \in R}$  von Elementen  $a_\varrho \in A$ ,

(iii)  $A \times A \notin R$ .

Die Bedingungen (i) und (ii)\* sind ersetzbar durch die einzige Forderung

$$|\bigcap_{\varrho \in R} \varrho a_\varrho| = 1 \text{ für jede Folge } (a_\varrho)_{\varrho \in R} \text{ von Elementen } a_\varrho \in A.$$

Die Bedingung (ii)\* kann unter Voraussetzung der Fastdirektheit abgeschwächt werden:

SATZ 3. *Eine fastdirekte Zerlegung  $R$  von  $A$  ist direkt genau dann, wenn es eine Einteilung von  $R$  in endlich viele Klassen  $R_1, \dots, R_n$  gibt, derart daß, für jede Klasse  $R_i$  und jede Folge  $(a_\varrho)_{\varrho \in R_i}$  von Elementen  $a_\varrho \in A$ ,  $\bigcap_{\varrho \in R_i} \varrho a_\varrho \neq \emptyset$  ( $i = 1, \dots, n$ ).*

Beweis. Die Notwendigkeit dieser Bedingung ist mit  $n = 1$  und  $R_1 = R$  trivial. Die Umkehrung folgert man unmittelbar aus den charakteristischen Eigenschaften des fastdirekten Produkts: Wegen der Assoziativität ist  $R^* = \{\bigcap_{\varrho \in R_i} \varrho : i = 1, \dots, n\}$  eine fastdirekte Zerlegung von  $A$ , und mit der Direktheit im Endlichen hat man zu beliebiger Folge  $(a_\varrho)_{\varrho \in R}$   $a_i \in \bigcap_{\varrho \in R_i} \varrho a_\varrho$  ( $i = 1, \dots, n$ ) und  $a \in \bigcap_{i=1}^n (\bigcap_{\varrho \in R_i} \varrho) a_i$ , mithin  $\varrho a = \varrho a_\varrho$  für alle  $\varrho \in R$ .

Für endliche Systeme  $R$  von Kongruenzrelationen sind die Bedingungen (ii) des Satzes 2 und (ii)\* des Korollars äquivalent und ersetzbar durch die Abschwächung

(ii)'  $\varrho \cdot (\bigcap_{\substack{\sigma \in R \\ \sigma \neq \varrho}} \sigma) = A \times A$  für jedes  $\varrho \in R$ ,

wie man durch Induktion über  $|R|$  beweist: Mit  $R$  erfüllt offenbar auch

$R - \{\varrho_0\}$  die Bedingung (ii)' für ein beliebiges  $\varrho_0 \in R$ ; dann ist aber per Induktionsannahme für jede Folge  $(a_\varrho)_{\varrho \in R}$  ein  $a' \in \bigcap_{\substack{\varrho \in R \\ \varrho \neq \varrho_0}} \varrho a_\varrho$  und daher  $\bigcap_{\varrho \in R} \varrho a_\varrho = \varrho_0 a_{\varrho_0} \cap \left( \bigcap_{\substack{\varrho \in R \\ \varrho \neq \varrho_0}} \varrho \right) a' \neq \emptyset$ .

Daß eine unendliche Menge  $R$  von Kongruenzrelationen in  $A$  mit den Eigenschaften (i) und (iii) des Satzes 2 und (ii)' noch keine fastdirekte Zerlegung zu sein braucht, zeigt das

Beispiel 4. Sei  $A$  die Menge aller  $a \in \{0, 1\}^N$  mit  $\text{pr}_n a = 0$  für fast alle  $n \in N$  oder  $\text{pr}_n a = 1$  für fast alle  $n \in N$ , ohne Operationen. Dann erfüllt das System  $R$  aller  $\varrho_{\text{pr}_n}$  ( $n \in N$ ) die Bedingungen (i), (ii)' und (iii), aber nicht (ii): Sei nämlich  $S$  die Menge aller  $\varrho_{\text{pr}_n}$  mit ungeradem  $n$ ; dann ist offenbar, mit  $a = (0)_{n \in N}$ ,  $b = (1)_{n \in N} \in A$ ,  $\left( \bigcap_{\varrho \in S} \varrho \right) a \cap \left( \bigcap_{\varrho \in R-S} \varrho \right) b = \emptyset$ .

Fastdirekte und damit endliche direkte Zerlegungen sind ohne Rückgriff auf die Elemente von  $A$  charakterisierbar; eine solche relationenalgebraische Kennzeichnung ist für unendliche direkte Zerlegungen nicht möglich<sup>(3)</sup>. Die fastdirekten Zerlegungen kann man in mehr verbandstheoretischer Sprechweise beschreiben, indem man die Bedingung (ii) ersetzt durch die Forderung: für jedes  $S \subset R$  sind die Relationen  $\bigcap_{\varrho \in S} \varrho$  und  $\bigcap_{\varrho \in R-S} \varrho$  vertauschbar, und ihr Supremum im Kongruenzrelationenverband von  $A$  ist  $A \times A$ . Ganz analog modifiziert man die Forderung (ii)'. Damit hat man in Algebren mit vertauschbaren Kongruenzrelationen eine rein verbandstheoretische Charakterisierung der fastdirekten und somit der endlichen direkten Zerlegungen; im allgemeinen kann man jedoch nicht auf die Relationenmultiplikation verzichten, die ja im Begriff der Vertauschbarkeit steckt<sup>(4)</sup>. Bemerkenswerterweise sind sogar für beliebige Teilsysteme  $U, V$  einer fastdirekten Zerlegung  $R$  die Relationen  $\bigcap_{\varrho \in U} \varrho$  und  $\bigcap_{\varrho \in V} \varrho$  vertauschbar, denn es gilt

HILFSSATZ 2. Sei  $R$  fastdirekte Zerlegung von  $A$  und  $U, V \subset R$ ; dann ist  $\left( \bigcap_{\varrho \in U} \varrho \right) \cdot \left( \bigcap_{\varrho \in V} \varrho \right) = \bigcap_{\varrho \in U \cap V} \varrho$ .

Beweis. Trivial ist  $\left( \bigcap_{\varrho \in U} \varrho \right) \cdot \left( \bigcap_{\varrho \in V} \varrho \right) \subset \bigcap_{\varrho \in U \cap V} \varrho$ ; ist umgekehrt  $\varrho a = \varrho b$  für alle  $\varrho \in U \cap V$ , so wähle man  $c \in A$  mit  $\varrho c = \varrho a$  für alle  $\varrho \in U$ ,  $\varrho c = \varrho b$  für alle  $\varrho \in R - U$ , so daß also  $\varrho c = \varrho a = \varrho b$  für  $\varrho \in V \cap U$ ,  $\varrho c = \varrho b$  für  $\varrho \in V - U \subset R - U$  und somit  $\varrho c = \varrho b$  für alle  $\varrho \in V$ .

KOROLLAR. Die Bedingung (ii) von Satz 2 ist äquivalent der Konjunktion der beiden Forderungen

(a) Die Relationen  $\bigcap_{\varrho \in S} \varrho$  mit  $S \subset R$  sind untereinander vertauschbar.

(b) Für jedes  $S \subset R$  ist  $\left( \bigcap_{\varrho \in S} \varrho \right) + \left( \bigcap_{\varrho \in R-S} \varrho \right) = A \times A$ .

<sup>(3)</sup> Siehe Teil II dieser Arbeit, Beispiel 12.

<sup>(4)</sup> Siehe Beispiel 6.

Für endliches  $R$  genügt an Stelle von (b)

(c) Für jedes  $\varrho \in R$  ist  $\varrho + \left( \bigcap_{\substack{\sigma \in R \\ \sigma \neq \varrho}} \sigma \right) = A \times A$  <sup>(5)</sup> (“+” bezeichnet die

Bildung des Supremus im Kongruenzrelationenverband).

Eine formal ganz ähnliche Kennzeichnung aller direkten Zerlegungen gewinnt Hashimoto durch Einführung des Begriffs der “vollständigen Permutierbarkeit” einer Menge von Kongruenzrelationen ([4], S. 90):  $S$  heißt *vollständig permutierbar*, wenn für jedes  $V \subset S$  und jede Folge  $(a_\sigma)_{\sigma \in V}$  von Elementen  $a_\sigma \in A$  mit

$$a_{\sigma_1} \left( \bigcap_{\substack{\sigma \in V \\ \sigma \neq \sigma_1}} \sigma + \bigcap_{\substack{\sigma \in V \\ \sigma \neq \sigma_2}} \sigma \right) a_{\sigma_2} \quad (\sigma_1, \sigma_2 \in V)$$

stets  $\bigcap_{\sigma \in V} \sigma a_\sigma \neq \emptyset$  ist.

SATZ 4 (Hashimoto). Die Bedingung (ii)\* des Korollars zu Satz 2 ist äquivalent der Konjunktion der Forderungen (c) und

(H) Das System aller Relationen  $\bigcap_{\varrho \in U} \varrho$  mit  $U \subset R$  ist vollständig permutierbar.

Beweis. Sei  $R$  direkte Zerlegung von  $A$ ,  $S$  die Menge aller Relationen der Gestalt  $\bigcap_{\varrho \in U} \varrho$  mit  $U \subset R$ ,  $V \subset S$  und  $(a_\sigma)_{\sigma \in V}$  eine Folge mit

$$a_{\sigma_1} \left( \bigcap_{\substack{\sigma \in V \\ \sigma \neq \sigma_1}} \sigma + \bigcap_{\substack{\sigma \in V \\ \sigma \neq \sigma_2}} \sigma \right) a_{\sigma_2}$$

für alle  $\sigma_1, \sigma_2 \in V$ . Dann setze man, für  $\sigma \in V$ ,  $R_\sigma = \{\varrho \in R : \varrho \supset \sigma\}$ , weiter  $R' = \bigcup_{\sigma \in V} R_\sigma$  und, für  $\varrho \in R'$ ,  $V_\varrho = \{\sigma \in V : \varrho \supset \sigma\}$ . Man hat  $\sigma = \bigcap_{\varrho \in R_\sigma} \varrho$  für alle  $\sigma \in V$ , daher

$$\bigcap_{\sigma \in V} \sigma a_\sigma = \bigcap_{\sigma \in V} \left( \bigcap_{\varrho \in R_\sigma} \varrho a_\sigma \right) = \bigcap_{\varrho \in R'} \left( \bigcap_{\sigma \in V_\varrho} \varrho a_\sigma \right).$$

Für  $\varrho \in R'$  und  $\sigma_1, \sigma_2 \in V_\varrho$  ist aber  $\sigma_1 + \sigma_2 \subset \varrho$ , im Falle  $\sigma_1 \neq \sigma_2$  wegen

$$\bigcap_{\substack{\sigma \in V \\ \sigma \neq \sigma_1}} \sigma \subset \sigma_2 \quad \text{und} \quad \bigcap_{\substack{\sigma \in V \\ \sigma \neq \sigma_2}} \sigma \subset \sigma_1$$

also nach Voraussetzung  $\varrho a_{\sigma_1} = \varrho a_{\sigma_2}$ ; daher existiert zu  $\varrho \in R'$  ein  $b_\varrho \in A$  mit  $\bigcap_{\sigma \in V_\varrho} \varrho a_\sigma = \varrho b_\varrho$ , also ist schließlich  $\bigcap_{\sigma \in V} \sigma a_\sigma = \bigcap_{\varrho \in R'} \varrho b_\varrho \neq \emptyset$ .

Ist umgekehrt  $R$  ein System von Kongruenzrelationen in  $A$  mit den Eigenschaften (c) und (H), so ist zunächst, für jedes  $\varrho \in R$ ,

$$\varrho \cdot \left( \bigcap_{\substack{\sigma \in R \\ \sigma \neq \varrho}} \sigma \right) = A \times A:$$

<sup>(5)</sup> Das ist eine korrigierte Fassung einer falschen Behauptung von Birkhoff, der nur die Vertauschbarkeit der  $\varrho \in R$  untereinander fordert (Birkhoff [2], p. 87, Theorem 4).

Für beliebige  $a, b \in A$  hat man ja  $a(\varrho + \bigcap_{\substack{\sigma \in R \\ \sigma \neq \varrho}} \sigma)b$ , im Falle  $\varrho \neq \bigcap_{\substack{\sigma \in R \\ \sigma \neq \varrho}} \sigma$  (sonst ist  $\varrho = A \times A$  und nichts zu beweisen) somit  $\varrho a \cap (\bigcap_{\substack{\sigma \in R \\ \sigma \neq \varrho}} \sigma)b \neq \emptyset$ . Seien

nun  $a_\varrho \in A (\varrho \in R)$  vorgegeben; dann wähle man ein beliebiges  $a \in A$  und so hat man für jedes  $\varrho \in R$  ein  $b_\varrho \in \varrho a_\varrho \cap (\bigcap_{\substack{\sigma \in R \\ \sigma \neq \varrho}} \sigma)a$  via Auswahlaxiom <sup>(6)</sup>; damit

für  $\varrho_1, \varrho_2 \in R$  wegen  $b_{\varrho_1}(\bigcap_{\substack{\varrho \in R \\ \varrho \neq \varrho_1}} \varrho)a$  und  $a(\bigcap_{\substack{\varrho \in R \\ \varrho \neq \varrho_2}} \varrho)b_{\varrho_2}$

$$b_{\varrho_1}(\bigcap_{\substack{\varrho \in R \\ \varrho \neq \varrho_1}} \varrho + \bigcap_{\substack{\varrho \in R \\ \varrho \neq \varrho_2}} \varrho)b_{\varrho_2},$$

also  $\bigcap_{\varrho \in R} \varrho b_\varrho \neq \emptyset$  und schließlich mit  $\varrho a_\varrho = \varrho b_\varrho$  für alle  $\varrho \in R$  auch  $\bigcap_{\varrho \in R} \varrho a_\varrho \neq \emptyset$ , was zu zeigen war.

**§ 3. Zerlegungskongruenzen.** Diejenigen Kongruenzrelationen von  $A$ , welche in fastdirekten Zerlegungen von  $A$  vorkommen, mögen *Zerlegungskongruenzen* heißen. Die einzige einelementige direkte Zerlegung ist  $I = \{\text{id}\}$ ; daher kommt jede von  $\text{id}$  verschiedene Zerlegungskongruenz  $\varrho$  in einer fastdirekten Zerlegung  $R$  mit  $|R| \geq 2$  und deshalb in der direkten Zerlegung  $\{\varrho, \bigcap_{\substack{\sigma \in R \\ \sigma \neq \varrho}} \sigma\}$  vor. Hat man andererseits eine von  $\text{id}$  und

$A \times A$  verschiedene Kongruenzrelation  $\varrho$  in  $A$ , welche ein mit ihr vertauschbares verbandstheoretisches Komplement  $\varrho'$  im Kongruenzrelationenverband  $C(A)$  besitzt, so ist  $\{\varrho, \varrho'\}$  eine direkte Zerlegung von  $A$ . So folgt zur Kennzeichnung der Zerlegungskongruenzen der

**SATZ 5.** *Eine von  $A \times A$  verschiedene Kongruenzrelation in  $A$  ist Zerlegungskongruenz genau dann, wenn sie ein mit ihr vertauschbares verbandstheoretisches Komplement in  $C(A)$  besitzt.*

Eine "innere" Charakterisierung der Zerlegungskongruenzen ist im allgemeinen natürlich nicht zu erwarten; ob eine Kongruenzrelation ein Komplement besitzt, hängt ja von  $C(A)$  ab. Immerhin läßt sich eine notwendige Bedingung angeben:

**SATZ 6.** *Alle Äquivalenzklassen einer Zerlegungskongruenz sind gleichmächtig.*

**Beweis.** Sei  $\varrho$  eine Zerlegungskongruenz,  $\varrho'$  ein mit  $\varrho$  vertauschbares Komplement,  $a, b \in A$  beliebig. Dann ist die Abbildung, die jedem  $x \in \varrho a$  das Element von  $\varrho b \cap \varrho' x$  zuordnet, eine Bijektion von  $\varrho a$  auf  $\varrho b$ : Sind  $x_1, x_2 \in \varrho a$  und  $\varrho b \cap \varrho' x_1 = \varrho b \cap \varrho' x_2$ , so folgt  $\varrho' x_1 = \varrho' x_2$  und wegen  $|\varrho a \cap \varrho' x_1| = 1$  sofort  $x_1 = x_2$ . Ist  $y \in \varrho b$  und  $x \in \varrho a \cap \varrho' y$ , so hat man  $\varrho' x = \varrho' y$  und daher  $\{y\} = \varrho b \cap \varrho' x$ , also ist  $y$  Bild von  $x \in \varrho a$ .

<sup>(6)</sup> Das Auswahlaxiom ist entbehrlich, wenn  $\bigcap_{\varrho \in R} \varrho = \text{id}$  benutzt wird.

In einem extremen Spezialfall ist diese Bedingung sogar hinreichend:

SATZ 7. Ist  $C(A)$  das System aller Äquivalenzrelationen in  $A$ , so ist jede von  $A \times A$  verschiedene Äquivalenzrelation mit lauter gleichmächtigen Klassen eine Zerlegungskongruenz.

Beweis. Sei  $\varrho$  eine Äquivalenzrelation in  $A$  mit lauter gleichmächtigen Klassen. Man wähle ein  $K_0 \in A/\varrho$  und zu jedem  $K \in A/\varrho$  eine eindeutige Abbildung  $f_K$  von  $K_0$  auf  $K$  per Auswahlaxiom, dabei  $f_{K_0}$  als Identität. Dann ist das System aller  $\varrho'x = \{f_Kx : K \in A/\varrho\}$  ( $x \in K_0$ ) eine Klasseneinteilung von  $A$ : Zunächst ist  $x \in \varrho'x$ ; zu  $y \in A$  existiert ein  $x \in K_0$  mit  $f_{\varrho y}x = y$ , also  $y \in \varrho'x$ ; ist schließlich  $u \in \varrho'x \cap \varrho'y$  mit  $x, y \in K_0$ , so hat man  $u = f_{K_1}x = f_{K_2}y$  mit geeigneten  $K_1, K_2 \in A/\varrho$  wegen  $f_{K_1}x \in K_1$  und  $f_{K_2}y \in K_2$  also  $K_1 = K_2 = K$  und daher  $x = y$  wegen der Eindeutigkeit von  $f_K$ . Diese Klasseneinteilung definiert die Äquivalenzrelation  $\varrho'$ , für welche  $|\varrho a \cap \varrho' b| = 1$  für beliebige  $a, b \in A$ : In der Tat ist ja  $\varrho' b = \varrho' b'$  mit geeignetem  $b' \in K_0$ , daher  $f_{\varrho a} b' \in \varrho a \cap \varrho' b'$ ; ist aber  $c \in \varrho a \cap \varrho' b'$ , so gibt es ein  $K \in A/\varrho$  mit  $c = f_K b' \in K$ ; also  $K = \varrho a$  und  $c = f_{\varrho a} b'$ .

Dem Beweis von Satz 7 entnimmt man, daß es zu einer Zerlegungskongruenz im allgemeinen mehrere mit ihr vertauschbare Komplemente gibt. Durch triviale Beispiele belegt man, daß der Durchschnitt zweier Zerlegungskongruenzen keine Zerlegungskongruenz zu sein braucht, ja daß es nicht einmal eine größte untere Schranke im System aller Zerlegungskongruenzen zu geben braucht; dasselbe gilt mutatis mutandis für die Beschränkung nach oben. Zerlegungskongruenzen sind im allgemeinen nicht untereinander vertauschbar. Schon an der Mehrdeutigkeit des Komplements erkennt man, daß eine Zerlegungskongruenz nicht zum Zentrum des Verbandes  $C(A)$  zu gehören braucht; umgekehrt sind Zentrumselemente von  $C(A)$  nicht notwendig Zerlegungskongruenzen:

Beispiel 5. Sei  $A = \{0, 1, 2\}$  mit der Operation  $f$ :

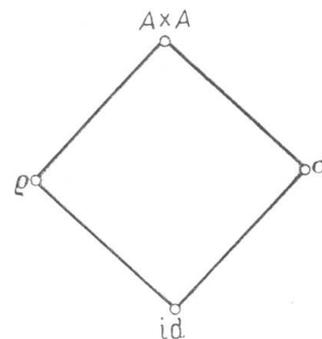
$a$	0	1	2
$fa$	1	2	1

Dann ist  $C(A) = \{\text{id}, \varrho, \sigma, A \times A\}$  mit

$$A/\varrho = \{\{0\}, \{1, 2\}\}, A/\sigma = \{\{1\}, \{0, 2\}\};$$

$\varrho$  und  $\sigma$  gehören zum Zentrum von  $C(A)$ , sind aber keine Zerlegungskongruenzen von  $A$ .

Bei Algebren mit vertauschbaren Kongruenzrelationen ist indes jedes Zentrumselement von  $C(A)$  trivialerweise Zerlegungskongruenz

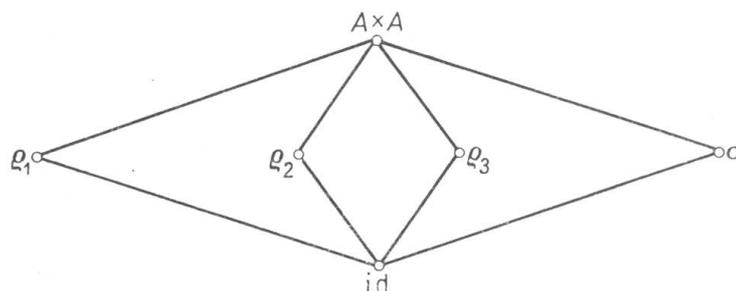


von  $A - A \times A$  ausgenommen —, denn in solchen Algebren sind die Zerlegungskongruenzen ja gerade die von  $A \times A$  verschiedenen Kongruenzrelationen mit Komplement in  $C(A)$ .

Ist die Komplementbildung im Bereich der Zerlegungskongruenzen eindeutig — etwa in distributivem  $C(A)$  —, so hat man eine Kennzeichnung der endlichen direkten Zerlegungen als Mengen von Zerlegungskongruenzen mit rein verbandstheoretischen Bedingungen: Die endlichen direkten Zerlegungen sind dann nämlich gerade die endlichen Mengen  $R$  von Zerlegungskongruenzen mit den Eigenschaften (i) des Satzes 2 und (c) des Korollars zu Hilfssatz 2. Im allgemeinen ist eine solche Charakterisierung jedoch nicht möglich.

Beispiel 6. Sei  $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$  mit den Operationen  $f, g, h$ :

$a$	0	1	2	3	4	5
$fa$	2	3	4	5	0	1
$ga$	4	5	0	1	2	3
$ha$	1	0	5	4	3	2



Man rechnet leicht nach, daß  $C(A) = \{\text{id}, \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \sigma, A \times A\}$  mit

$$\begin{aligned} A/\varrho_1 &= \{\{0, 1\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}\}, & A/\varrho_2 &= \{\{0, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 5\}\}, \\ A/\varrho_3 &= \{\{0, 5\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}\}, & A/\sigma &= \{\{0, 2, 4\}, \{1, 3, 5\}\}. \end{aligned}$$

Alle  $\varrho_i$  und  $\sigma$  sind Zerlegungskongruenzen wegen  $\varrho_i \cdot \sigma = A \times A$ ,  $\varrho_i \cap \sigma = \text{id}$  für  $i = 1, 2, 3$ . Die direkte Zerlegung  $\{\varrho_1, \sigma\}$  ist verbandstheoretisch nicht von  $\{\varrho_1, \varrho_3\}$  zu unterscheiden; trotzdem ist  $\{\varrho_1, \varrho_3\}$  keine direkte Zerlegung von  $A$ .

**§ 4. Das geordnete System der fastdirekten Zerlegungen.** Man wird die fastdirekte Darstellung  $((A_t)_{t \in T}, \varphi)$  der Algebra  $A$  feiner nennen als die fastdirekte Darstellung  $((B_u)_{u \in U}, \psi)$  von  $A$ , wenn jede Algebra  $B_u$  durch gewisse  $A_t$  kanonisch fastdirekt zerlegt wird, präzise: wenn es zu jedem  $u \in U$  eine Teilmenge  $T_u$  von  $T$  und dazu eine Injektion  $\beta_u$  von  $B_u$  in  $\prod_{t \in T_u} A_t$  gibt mit  $\text{pr}_t \beta_u \text{pr}_u \psi = \text{pr}_t \varphi$  für alle  $t \in T_u$ ;  $\beta_u$  ist dann eo ipso

ein Isomorphismus auf das fastdirekte Produkt  $\beta_u B_u$  der  $(A_t)_{t \in T_u}$ . Diese Relation ist verträglich mit der Äquivalenz von Darstellungen, und man rechnet leicht nach, daß die Darstellung  $\mathfrak{A}$  feiner ist als die Darstellung  $\mathfrak{B}$  genau dann, wenn jede der durch  $\mathfrak{B}$  in  $A$  induzierten Kongruenzrelationen Durchschnitt gewisser durch  $\mathfrak{A}$  in  $A$  induzierter Kongruenzrelationen ist. Das rechtfertigt die

**Definition 4.** Die fastdirekte Zerlegung  $R$  von  $A$  heißt *feiner* als die fastdirekte Zerlegung  $S$  von  $A$  — symbolisch:  $R < S$  —, wenn jedes  $\sigma \in S$  Durchschnitt geeigneter  $\varrho \in R$  ist.

Zum Nachweis der Tatsache, daß das System  $\mathfrak{F}(A)$  aller fastdirekten Zerlegungen von  $A$  durch die Feiner-Relation geordnet wird, bedarf es nur noch des Beweises der Antisymmetrie: Ist  $R < S$  und  $S < R$ , so hat man zu  $\sigma_0 \in S$  jedenfalls ein  $\varrho \in R$  mit  $\sigma_0 \subset \varrho$  und dazu ein  $\sigma_1 \in S$  mit  $\varrho \subset \sigma_1$ , also nach Hilfssatz 1  $\sigma_1 = \sigma_0$  und daher  $\sigma_0 = \varrho \in R$ . Zur Gewinnung eines einfachen Kriteriums für das Bestehen der Relation  $<$  zunächst

**HILFSSATZ 3.** Sei  $R$  fastdirekte Zerlegung von  $A$ , und sei jedem  $\varrho \in R$  ein  $\varrho^* \in C(A)$  zugeordnet mit  $\varrho^* \supset \varrho$  und  $\bigcap_{\varrho \in R} \varrho^* = \text{id}$ . Dann ist  $\varrho^* = \varrho$  für alle  $\varrho \in R$ .

**Beweis.** Zu  $\varrho_0 \in R$  und  $x\varrho_0^*y$  ist  $\bigcap_{\substack{\varrho \in R \\ \varrho \neq \varrho_0}} \varrho \cap \varrho_0^* = \text{id}$  und deshalb

$$\emptyset \neq \left( \bigcap_{\substack{\varrho \in R \\ \varrho \neq \varrho_0}} \varrho \right) x \cap \varrho_0 y \subset \left( \bigcap_{\substack{\varrho \in R \\ \varrho \neq \varrho_0}} \varrho \right) x \cap \varrho_0^* y = \{x\};$$

mithin  $x\varrho_0 y$ .

Damit beweist man leicht

**SATZ 8.** Die fastdirekte Zerlegung  $R$  von  $A$  ist feiner als die fastdirekte Zerlegung  $S$  von  $A$  genau dann, wenn zu jedem  $\varrho \in R$  ein  $\sigma \in S$  existiert mit  $\sigma \subset \varrho$ .

**Beweis.** Sei  $R < S$  und  $R'$  das System aller  $\varrho \in R$ , zu denen es ein  $\sigma \in S$  gibt mit  $\sigma \subset \varrho$ ; dann ist

$$\bigcap_{\varrho \in R} \varrho = \text{id} = \bigcap_{\sigma \in S} \sigma = \bigcap_{\substack{\sigma \in S \\ \varrho \supset \sigma}} \left( \bigcap_{\varrho \in R} \varrho \right) = \bigcap_{\varrho \in R'} \varrho,$$

mit Hilfssatz 1 also  $R' = R$ . Liegt umgekehrt unter jedem  $\varrho \in R$  ein  $\sigma \in S$ , so setze man für jedes  $\sigma \in S$

$$\sigma^* = \bigcap_{\substack{\varrho \in R \\ \varrho \supset \sigma}} \varrho \supset \sigma$$

und man erhält mit

$$\bigcap_{\sigma \in S} \sigma^* = \bigcap_{\substack{\sigma \in S \\ \varrho \supset \sigma}} \left( \bigcap_{\varrho \in R} \varrho \right) = \bigcap_{\varrho \in R} \varrho = \text{id},$$

via Hilfssatz 3,  $\sigma = \sigma^*$ .

Man beachte, daß im Falle  $R < S$  zwar zu jedem  $\sigma \in S$  ein  $\varrho \in R$  mit  $\varrho \supset \sigma$  existiert, daß diese Bedingung aber nicht hinreicht für  $R < S$ :

Beispiel 7. Sei  $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ , ohne Operationen,  $R = \{\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3\}$ ,  $S = \{\sigma_1, \sigma_2\}$  mit  $\sigma_1 = \varrho_1$  und

$$A/\varrho_1 = \{\{0, 1, 2, 3\}, \{4, 5, 6, 7\}\},$$

$$A/\varrho_2 = \{\{0, 2, 4, 6\}, \{1, 3, 5, 7\}\},$$

$$A/\varrho_3 = \{\{0, 1, 4, 7\}, \{2, 3, 5, 6\}\},$$

$$A/\sigma_2 = \{\{0, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 6\}, \{3, 7\}\}.$$

$R$  und  $S$  sind direkte Zerlegungen von  $A$ , es gibt zu jedem  $\sigma \in S$  ein  $\varrho \in R$  mit  $\varrho \supset \sigma$ , aber es gilt nicht  $R < S$ .

Man übersieht leicht sämtliche Vergrößerungen einer fastdirekten Zerlegung  $R$ : Ist  $S > R$ , so ist das System aller  $R_\sigma = \{\varrho \in R : \varrho \supset \sigma\}$  ( $\sigma \in S$ ) eine Klasseneinteilung von  $R$  — kein  $R_\sigma$  ist leer, jedes  $\varrho \in R$  kommt in einem  $R_\sigma$  vor, aus  $\varrho \in R_{\sigma_1} \cap R_{\sigma_2}$  und  $\sigma_1 \neq \sigma_2$  würde  $\varrho \supset \sigma_1 + \sigma_2 = A \times A$  folgen —, und zu beliebiger Klasseneinteilung  $P$  von  $R$  ist  $\{\bigcap_{\varrho \in U} \varrho : U \in P\}$

fastdirekte Zerlegung und Vergrößerung von  $R$ . Diese nach Hilfssatz 1 eineindeutige Korrespondenz zwischen Klasseneinteilungen und Vergrößerungen einer fastdirekten Zerlegung  $R$  liefert einen Ordnungs- isomorphismus zwischen dem vollständigen Verband der Äquivalenz- relationen in  $R$  und dem geordneten System aller Vergrößerungen von  $R$ . Damit hat man

**SATZ 9.** *Die Vergrößerungen einer fastdirekten Zerlegung  $R$  bilden bei der Relation  $<$  einen vollständigen Verband mit dem Nullelement  $R$  und dem Einselement  $\{\text{id}\}$ .*

**KOROLLAR 1.** *Besitzt  $A$  eine feinste fastdirekte Zerlegung, so ist  $\mathfrak{F}(A)$  ein vollständiger Verband.*

**KOROLLAR 2.** *Gibt es zu  $\mathcal{R} \subset \mathfrak{F}(A)$  eine gemeinsame Verfeinerung  $R$ , so existiert eine maximale gemeinsame Verfeinerung  $S$  von  $\mathcal{R}$  mit  $S > R$ , nämlich die größte gemeinsame Verfeinerung zu  $\mathcal{R}$  im Verband aller Vergrößerungen von  $R$ .*

**KOROLLAR 3.**  *$\mathcal{R} \subset \mathfrak{F}(A)$  besitzt eine größte gemeinsame Verfeinerung in  $\mathfrak{F}(A)$  genau dann, wenn es genau eine maximale Verfeinerung zu  $\mathcal{R}$  in  $\mathfrak{F}(A)$  gibt.*

Wenn also  $\mathcal{R}$  überhaupt eine gemeinsame Verfeinerung besitzt, kann die Existenz einer größten gemeinsamen Verfeinerung sozusagen nur daran scheitern, daß es mehrere nicht vergrößerbare gemeinsame Verfeinerungen gibt; daß dieser Fall in der Tat eintreten kann — sogar für ein System  $\mathcal{R}$  von lauter direkten Zerlegungen —, zeigt das

Beispiel 8. Sei  $A = \{0, 1\}^N$ , ohne Operationen,  $\varrho_n = \varrho_{\text{pr}_n}$  ( $n \in N$ ); dann ist  $R = \{\varrho_n : n \in N\}$  direkte Zerlegung von  $A$  und für  $n \geq 1$

$$R_n = \left\{ \bigcap_{\nu=1}^n \varrho_\nu, \varrho_0 \cap \bigcap_{\nu=n+1}^{\infty} \varrho_\nu \right\}$$

als Vergrößerung von  $R$  ebenfalls direkte Zerlegung von  $A$ . Das System  $\mathfrak{R} = \{R_n : n \in N\}$  hat eine grösste gemeinsame Verfeinerung im System aller Vergrößerungen von  $R$ , welche sich durch Berechnung des Durchschnittes der durch die  $R_n$  in  $R$  induzierten Äquivalenzrelationen als  $R$  selbst erweist. Es sei nun  $\sigma$  diejenige Äquivalenzrelation in  $A$ , die zwischen  $a, b \in A$  genau dann besteht, wenn mindestens eine der drei folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- (i)  $\text{pr}_0 a = \text{pr}_0 b$  und  $\text{pr}_n a = \text{pr}_n b = 1$  für fast alle  $n \in N$ ,
- (ii)  $\text{pr}_0 a = \text{pr}_0 b$  und für kein  $c \in \{a, b\}$  ist  $\text{pr}_n c = 1$  für fast alle  $n \in N$ ,
- (iii)  $\text{pr}_0 a \neq \text{pr}_0 b$  und für genau ein  $c \in \{a, b\}$  ist  $\text{pr}_n c = 1$  für fast alle  $n \in N$ .

Man bestätigt leicht, daß für eine beliebige Folge  $(a_n)_{n \in N}$  von Elementen  $a_n \in A$

$$|\sigma a_0 \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} \varrho_n a_n| = 1$$

ist; mithin ist  $S = \{\sigma\} \cup \{\varrho_n : n \geq 1\}$  direkte Zerlegung von  $A$ . Weiter ist für alle  $n \in N$

$$\sigma \cap \bigcap_{\nu=n}^{\infty} \varrho_\nu = \varrho_0 \cap \bigcap_{\nu=n}^{\infty} \varrho_\nu,$$

daher  $S$  gemeinsame Verfeinerung zu  $\mathfrak{R}$  und schließlich die grösste gemeinsame Verfeinerung zu  $\mathfrak{R}$  unter den Vergrößerungen von  $S$ . Mit  $S \neq R$  hat  $\mathfrak{R}$  also zwei nicht vergrößerbare gemeinsame Verfeinerungen in  $\mathfrak{F}(A)$ .

Dieses Beispiel lehrt zugleich, daß es nicht einmal zu zwei direkten Zerlegungen eine feinste gemeinsame Vergrößerung in  $\mathfrak{F}(A)$  zu geben braucht (eine gemeinsame Vergrößerung gibt es immer, nämlich  $\{\text{id}\}$ ): eine feinste gemeinsame Vergrößerung zu  $R$  und  $S$  müßte ja gemeinsame Verfeinerung zu  $\mathfrak{R}$  sein. Immerhin gilt aber

**SATZ 10.** *Zu jedem endlichen System  $\mathfrak{R}$  von fastdirekten Zerlegungen von  $A$  mit gemeinsamer Verfeinerung  $R$  gibt es eine grösste gemeinsame Verfeinerung  $S$ . Besteht dabei  $\mathfrak{R}$  aus lauter direkten Zerlegungen, so ist auch  $S$  direkt.*

**Beweis.** Sei  $\mathfrak{R} = \{R_1, R_2\}$ ,  $S = \{\varrho_1 + \varrho_2 : \varrho_1 \in R_1, \varrho_2 \in R_2\} - \{A \times A\}$ . Dann hat man mit Hilfssatz 2 für jedes  $\sigma \in S$

$$\sigma = \bigcap_{\substack{\varrho \in R \\ \varrho \supset \sigma}} \varrho;$$

weiter, zu jedem  $\varrho \in R$ ,  $\varrho_1 \in R_1$ ,  $\varrho_2 \in R_2$  mit  $\varrho \supset \varrho_1$ ,  $\varrho \supset \varrho_2$ , also  $\varrho \supset \varrho_1 + \varrho_2 \in S$ ; schließlich folgt für  $\varrho \in R$  aus  $\varrho \supset \varrho_1 + \varrho_2$  und  $\varrho \supset \varrho'_1 + \varrho'_2$  ( $\varrho_1, \varrho'_1 \in R_1$ ,  $\varrho_2, \varrho'_2 \in R_2$ )  $\varrho_1 = \varrho'_1$  und  $\varrho_2 = \varrho'_2$ . Somit ist  $S$  fastdirekte Zerlegung und Vergrößerung von  $R$ , selbstverständlich Verfeinerung zu  $R_1$  und  $R_2$  und wegen der Unabhängigkeit von  $R$  sogar grösste gemeinsame Verfeinerung. Sind  $R_1, R_2$  direkte Zerlegungen von  $A$ , so ist für eine beliebige Folge  $(a_\sigma)_{\sigma \in S}$  von Elementen  $a_\sigma \in A$

$$\bigcap_{\sigma \in S} \sigma a_\sigma = \bigcap_{\varrho_1 \in R_1} \left( \bigcap_{\substack{\varrho_2 \in R_2 \\ \varrho_1 + \varrho_2 \neq A \times A}} (\varrho_1 + \varrho_2) a_{\varrho_1 + \varrho_2} \right) \supset \bigcap_{\varrho_1 \in R_1} \varrho_1 a'_{\varrho_1} \neq \emptyset$$

mit geeigneten

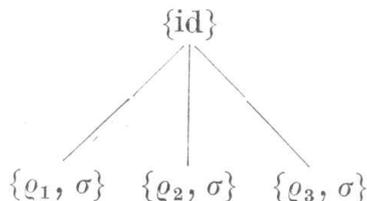
$$a'_{\varrho_1} \in \bigcap_{\substack{\varrho_2 \in R_2 \\ \varrho_1 + \varrho_2 \neq A \times A}} (\varrho_1 + \varrho_2) a_{\varrho_1 + \varrho_2} \supset \bigcap_{\substack{\varrho_2 \in R_2 \\ \varrho_1 + \varrho_2 \neq A \times A}} \varrho_2 a_{\varrho_1 + \varrho_2} \neq \emptyset.$$

Dem letzten Teil dieses Beweises entnimmt man noch das

**KOROLLAR.** Die direkten Zerlegungen  $R_1, R_2$  besitzen eine grösste gemeinsame Verfeinerung in  $\mathfrak{F}(A)$  genau dann, wenn  $\bigcap_{\substack{\varrho_1 \in R_1 \\ \varrho_2 \in R_2}} (\varrho_1 + \varrho_2) = \text{id}$ .

Für fastdirekte Zerlegungen gilt das Korollar nicht <sup>(7)</sup>.

Nach Satz 10 gibt es zu jedem nichtleeren System  $\mathfrak{R}$  von fastdirekten Zerlegungen mit insgesamt nur endlich vielen gemeinsamen Vergrößerungen eine feinste gemeinsame Vergrößerung; diese Bedingung ist insbesondere dann erfüllt, wenn eine endliche Zerlegung zu  $\mathfrak{R}$  gehört. Ist sogar  $\mathfrak{F}(A)$  endlich — also auch jedes  $R \in \mathfrak{F}(A)$  endlich und daher direkt —, so besitzt jedes nichtleere System von direkten Zerlegungen von  $A$  eine feinste gemeinsame Vergrößerung; mithin ist  $\mathfrak{F}(A)$  in diesem Falle ein Supremum-Halbverband. Eine gemeinsame Verfeinerung braucht es aber selbst in endlichem  $\mathfrak{F}(A)$  nicht zu geben; man betrachte etwa das zu der Algebra  $A$  aus Beispiel 6 gehörende  $\mathfrak{F}(A)$ :



Existiert zu einem endlichen System  $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{F}(A)$  die grösste gemeinsame Verfeinerung  $S$ , so ergibt sich  $S$  aus dem Beweis zu Satz 10 als  $\left\{ \sum_{R \in \mathfrak{R}} \varrho_R : \varrho_R \in R \text{ für alle } R \in \mathfrak{R} \right\} - \{A \times A\}$ . Zu beliebigem  $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{F}(A)$  ist dieses Summensystem grösste gemeinsame Verfeinerung, wenn es fastdirekte Zerlegung von  $A$  ist. Indes kann es zu unendlichem  $\mathfrak{R}$  eine grösste gemeinsame Verfeinerung geben, ohne daß  $\left\{ \sum_{R \in \mathfrak{R}} \varrho_R : \varrho_R \in R \text{ für alle } R \in \mathfrak{R} \right\}$

(7) Siehe Teil II dieser Arbeit, Beispiel 15.

$R \in \mathcal{R}$  —  $\{A \times A\}$  fastdirekte Zerlegung ist. In einem extremen Spezialfall, nämlich wenn  $C(A)$  alle Äquivalenzrelationen in  $A$  enthält, ist jedes Element einer größten gemeinsamen Verfeinerung zu beliebigem  $\mathcal{R} \subset \mathfrak{F}(A)$  darstellbar als  $\sum_{R \in \mathcal{R}} \varrho_R$  mit  $\varrho_R \in R$  für alle  $R \in \mathcal{R}$ ; der Beweis dieses Sachverhaltes ist relativ verwickelt und braucht wegen der geringen Bedeutung der Aussage für die allgemeine Theorie hier nicht wiedergegeben zu werden. Als eine Art Umkehrung für beliebige Algebren gilt

SATZ 11. Sei  $\mathcal{R} \subset \mathfrak{F}(A)$  und  $S$  eine fastdirekte Zerlegung von  $A$ , derart daß jedes  $\sigma \in S$  darstellbar ist als  $\sum_{R \in \mathcal{R}} \varrho_R$  mit  $\varrho_R \in R$  für alle  $R \in \mathcal{R}$ .

Dann ist  $S$  grösste gemeinsame Verfeinerung zu  $\mathcal{R}$ .

Beweis. Mit Satz 8 ist  $S$  gemeinsame Verfeinerung zu  $\mathcal{R}$ . Ist  $T$  eine beliebige Verfeinerung zu  $\mathcal{R}$ , so folgt, wieder mit Satz 8,  $T < S$ : Läge nämlich unter  $\tau_0 \in T$  kein  $\sigma \in S$ , das heißt  $\tau_0 \not\supset \sigma$  für alle  $\sigma \in S$ , so gäbe es zu jedem  $\sigma \in S$  wegen  $\sigma = \sum_{R \in \mathcal{R}} \varrho_R^{(\sigma)}$  mit geeigneten  $\varrho_R^{(\sigma)} \in R$  für alle  $R \in \mathcal{R}$  ein  $R_\sigma \in \mathcal{R}$  (Auswahlaxiom) mit  $\tau_0 \not\supset \varrho_{R_\sigma}^{(\sigma)}$ , also

$$\text{id} = \bigcap_{\sigma \in S} \sigma = \bigcap_{\sigma \in S} \left( \sum_{R \in \mathcal{R}} \varrho_R^{(\sigma)} \right) \supset \bigcap_{\sigma \in S} \varrho_{R_\sigma}^{(\sigma)} = \bigcap_{\substack{\sigma \in S \\ \tau \in T \\ \tau \supset \varrho_{R_\sigma}^{(\sigma)}}} (\bigcap \tau) \supset \bigcap_{\substack{\tau \in T \\ \tau \neq \tau_0}} \tau \neq \text{id}.$$

Ist  $C(A)$  der ganze Äquivalenzrelationsverband von  $A$ , so ist also die Existenz einer größten gemeinsamen Verfeinerung zu beliebigem  $\mathcal{R} \subset \mathfrak{F}(A)$  eine innere Eigenschaft von  $\mathcal{R}$ : eine grösste gemeinsame Verfeinerung existiert genau dann, wenn  $\{ \sum_{R \in \mathcal{R}} \varrho_R : \varrho_R \in R \text{ für alle } R \in \mathcal{R} \}$  eine fastdirekte Zerlegung  $S$  enthält;  $S$  ist dann die grösste gemeinsame Verfeinerung zu  $\mathcal{R}$ . Ist dabei  $S$  und damit jedes  $R \in \mathcal{R}$  direkt — sämtliche Vergrößerungen einer direkten Zerlegung sind ja direkt —, so besteht  $S$  gerade aus denjenigen Komposita  $\sum_{R \in \mathcal{R}} \varrho_R \neq A \times A$ , die sich bereits als  $\sum_{R \in \mathcal{R}'} \varrho_R$  mit endlichem  $\mathcal{R}' \subset \mathcal{R}$  darstellen lassen; denn man hat allgemeiner zunächst

SATZ 12. Sei  $C(A)$  induktiv,  $\mathcal{R} \subset \mathfrak{F}(A)$  und  $S$  eine direkte gemeinsame Verfeinerung zu  $\mathcal{R}$ . Dann ist jedes  $\sigma_0 \in S$ , welches sich als Kompositum  $\sum_{R \in \mathcal{R}} \varrho_R$  ( $\varrho_R \in R$  für alle  $R \in \mathcal{R}$ ) darstellen läßt, bereits das Kompositum  $\sum_{R \in \mathcal{R}'} \varrho_R$  über ein endliches  $\mathcal{R}' \subset \mathcal{R}$ .

Beweis. Bekanntlich ist bei induktivem  $C(A)$  das Kompositum von Kongruenzrelationen darstellbar als mengentheoretische Vereinigung aller endlichen Komposita der betreffenden Relationen, also

$$\sigma_0 = \sum_{R \in \mathcal{R}} \varrho_R = \bigcup_{\substack{\mathcal{R}' \subset \mathcal{R} \\ \mathcal{R}' \text{ endl.}}} \left( \sum_{R \in \mathcal{R}'} \varrho_R \right).$$

Man wähle ein beliebiges  $a \in A$  und dazu eine Folge  $(a_\sigma)_{\sigma \in S}$  von Elementen  $a_\sigma \in A$ , derart daß  $a_{\sigma_0} = a$  und, für  $\sigma \neq \sigma_0$ ,  $\sigma a_\sigma \neq \sigma a$ , was wegen  $\sigma \neq A \times A$  per Auswahlaxiom möglich ist. Sei schließlich  $b$  das Element von  $\bigcap_{\sigma \in S} \sigma a_\sigma$ ; dann gibt es wegen  $a_{\sigma_0} b$  ein endliches  $\mathcal{R}' \subset \mathcal{R}$ , so daß  $a \sigma b$  für alle  $\sigma \in S$  mit  $\sigma \supset \sum_{R \in \mathcal{R}'} \varrho_R$ , und weil für kein von  $\sigma_0$  verschiedenes  $\sigma \in S$ ,  $a \sigma b$ , nach Konstruktion von  $b$ , hat man

$$\sigma_0 = \bigcap_{\substack{\sigma \in S \\ \sigma \supset \sum_{R \in \mathcal{R}'} \varrho_R}} \sigma = \sum_{R \in \mathcal{R}'} \varrho_R,$$

denn  $S$  ist Verfeinerung zu jedem  $R \in \mathcal{R}$ .

Die Direktheit der Verfeinerung  $S$  in Satz 12 ist wesentlich:

Beispiel 9. Sei  $A$  die Menge aller  $a \in \{0, 1\}^N$  mit  $\text{pr}_n a = 0$  für fast alle  $n \in N$ , ohne Operationen; weiter sei für  $n \in N$   $\varrho_n = \varrho_{\text{pr}_n}$  und für  $n \geq 1$

$$R_n = \left\{ \bigcap_{v=1}^n \varrho_v, \varrho_0 \cap \bigcap_{v=n+1}^{\infty} \varrho_v \right\}.$$

Die  $R_n$  sind direkte Zerlegungen von  $A$ , und ihre grösste gemeinsame Verfeinerung in  $\mathfrak{F}(A)$  ist  $R = \{\varrho_n : n \in N\}$  nach Satz 11;

$$\varrho_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \varrho_0 \cap \bigcap_{v=n+1}^{\infty} \varrho_v \right)$$

ist aber nicht als endliches Kompositum darstellbar.

Ferner gilt als Ergänzung zu Satz 11 der

SATZ 13. Sei  $\mathcal{R} \subset \mathfrak{F}(A)$  und  $S$  eine fastdirekte Zerlegung von  $A$ , derart daß sich jedes  $\sigma \in S$  darstellen läßt als  $\sum_{R \in \mathcal{R}} \varrho_R$  mit  $\varrho_R \in R$  für alle  $R \in \mathcal{R}$ . Dann gehört jede Relation

$$\sigma_0 = \sum_{R \in \mathcal{R}} \varrho_R \quad (\varrho_R \in R),$$

die sich als endliches Kompositum  $\sum_{R \in \mathcal{R}'} \varrho_R$  darstellen läßt und von  $A \times A$  verschieden ist, zu  $S$ .

Beweis. Als  $\sum_{R \in \mathcal{R}'} \varrho_R$  über ein endliches  $\mathcal{R}' \subset \mathcal{R}$  ist

$$\sigma_0 = \bigcap_{\substack{\sigma \in S \\ \sigma \supset \sigma_0}} \sigma;$$

wegen  $\sigma_0 \neq A \times A$  gibt es ein  $\sigma \in S$  mit  $\sigma \supset \sigma_0$ , aber ein von  $\sigma_0$  verschiedenes  $\sigma = \sum_{R \in \mathcal{R}'} \varrho'_R$  müßte an mindestens einer Stelle  $R_0$  einen anderen Summanden  $\varrho'_{R_0}$  haben als  $\sigma_0 = \sum_{R \in \mathcal{R}} \varrho_R$ , also wäre  $\sigma + \sigma_0 \supset \varrho'_{R_0} + \varrho_{R_0} = A \times A$ .

Im allgemeinen ist weder die Existenz einer größten gemeinsamen Verfeinerung zu  $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{F}(A)$  noch die Existenz einer gemeinsamen Verfeinerung zu  $\mathfrak{R}$  eine innere Eigenschaft des Systems  $\mathfrak{R}$ . Eine sehr spezielle Aussage entnimmt man noch dem Korollar zu Satz 10: Bei distributivem  $C(A)$  besitzen zwei endliche direkte Zerlegungen von  $A$  stets eine (direkte) größte gemeinsame Verfeinerung in  $\mathfrak{F}(A)$ . Auch die Frage nach der Existenz von nicht verfeinerbaren fastdirekten Zerlegungen ist im allgemeinen schon bei endlichstelligen Operationen negativ zu beantworten:

Beispiel 10. Sei  $A$  die Menge aller  $a \in \{0, 1\}^N$  mit  $\text{pr}_n a = 0$  für fast alle  $n \in N$  oder  $\text{pr}_n a = 1$  für fast alle  $n \in N$ , mit den zweistelligen Operationen  $f_m$  ( $m \in N$ ):

$$\text{pr}_n f_m(a, b) = \begin{cases} \text{pr}_n a & \text{für } n = m \\ \text{pr}_n b & \text{für } n \neq m \end{cases} \quad (n, m \in N; a, b \in A).$$

Die Relationen  $\varrho_n = \varrho_{\text{pr}_n}$  ( $n \in N$ ) sind Kongruenzrelationen dieser Algebra und Zerlegungskongruenzen —  $\{\varrho_n, \bigcap_{\substack{m \in N \\ m \neq n}} \varrho_m\}$  ist direkte Zerlegung

von  $A$  —, und jede Zerlegungskongruenz  $\varrho$  ist Durchschnitt gewisser  $\varrho_n$ , das heißt  $\varrho = \bigcap_{n \in N} (\varrho_n + \varrho)$ , denn  $\varrho_n + \varrho$  ist entweder  $\varrho_n$  oder  $A \times A$ : Sei

$a(\varrho_n + \varrho)b$  für alle  $n \in N$ ; dann gibt es, zu jedem  $n \in N$ ,  $u_n, v_n \in A$  mit  $\text{pr}_n u_n = \text{pr}_n a$ ,  $\text{pr}_n v_n = \text{pr}_n b$  und  $u_n \varrho v_n$  per Auswahlaxiom (denn ist  $\text{pr}_n a = \text{pr}_n b$ , so genügt  $u_n = v_n = a$ , andernfalls gibt es  $u'_n, v'_n \in A$  mit  $u'_n \varrho v'_n$  und  $\text{pr}_n u'_n \neq \text{pr}_n v'_n$ ); zu einem mit  $\varrho$  vertauschbaren Komplement  $\varrho'$  existiert sodann ein  $c \in A$  mit  $a \varrho c$  und  $c \varrho' b$ ; somit, für beliebiges  $n \in N$ ,  $a = f_n(u_n, a) \varrho f_n(v_n, c)$ ,  $f_n(v_n, c) \varrho' f_n(v_n, b) = b$ , also — wegen  $\varrho \cap \varrho' = \text{id}$  —  $c = f_n(v_n, c)$  und daher  $\text{pr}_n c = \text{pr}_n v_n = \text{pr}_n b$ ; mithin ist  $c = b$  und deshalb  $a \varrho b$ . Man erhält demnach jede fastdirekte Zerlegung von  $A$  durch eine Klasseneinteilung von  $R = \{\varrho_n : n \in N\}$ , aber höchstens endliche Klasseneinteilungen von  $R$  definieren fastdirekte Zerlegungen: Hat man nämlich eine Einteilung von  $R$  in die unendlich vielen Klassen  $K_n$  ( $n \in N$ ), so kommen sowohl in der Vereinigung  $R_1$  aller  $K_n$  mit ungeradem  $n$  als auch in der Vereinigung  $R_2$  aller  $K_n$  mit geradem  $n$  Relationen  $\varrho_\nu$  mit beliebig hohem Index  $\nu$  vor, so daß also, mit  $a = (0)_{n \in N}$ ,  $b = (1)_{n \in N} \in A$ ,  $(\bigcap_{\varrho \in R_1} \varrho)a \cap (\bigcap_{\varrho \in R_2} \varrho)b = \emptyset$ .

Eine endliche fastdirekte Zerlegung  $S$  ist hier aber immer verfeinerbar: Mindestens ein  $\sigma_0 \in S$  ist Durchschnitt unendlich vieler  $\varrho_n$ , darunter  $\varrho_{n_0}$ ; ersetzt man in  $S$  die Relation  $\sigma_0$  durch  $\varrho_{n_0}$  und  $\bigcap_{\substack{\varrho_n \supset \sigma_0 \\ n \neq n_0}} \varrho_n$ , so

erhält man eine fastdirekte Zerlegung von  $A$ , welche echte Verfeinerung von  $S$  ist.

Trivialerweise gibt es zu jedem endlichen  $A$  eine nicht verfeinerbare fastdirekte Zerlegung; nicht ganz so evident ist

SATZ 14. Enthält  $C(A)$  alle Äquivalenzrelationen in  $A$ , so gibt es eine nicht verfeinerbare fastdirekte Zerlegung von  $A$ .

Beweis. Bekanntlich gibt es bei unendlichem  $A$  eine Bijektion  $\varphi$  von  $A$  auf die Menge aller  $x \in \{0, 1\}^A$  mit  $\text{pr}_a x = 0$  für fast alle  $a \in A$ ; offenbar ist das System aller  $\varrho_{\text{pr}_a \varphi}$  ( $a \in A$ ) eine nicht verfeinerbare fastdirekte Zerlegung von  $A$  <sup>(8)</sup>.

Eine nicht verfeinerbare direkte Zerlegung braucht es selbst in diesem Spezialfall nicht zu geben; man betrachte dazu nur eine abzählbar unendliche Menge ohne Operationen, in der es aus Mächtigkeitsgründen nur endliche direkte Zerlegungen gibt, von denen jede eine direkte echte Verfeinerung besitzt.

Allgemein gibt es immerhin eine in der Praxis wichtige hinreichende Bedingung für die Existenz einer nicht verfeinerbaren fastdirekten Zerlegung:

SATZ 15. Ist das System der Zerlegungskongruenzen von  $A$  aufsteigend oder absteigend längenendlich, so ist  $\mathfrak{F}(A)$  längenendlich, jede fastdirekte Zerlegung von  $A$  endlich und somit direkt (vgl. [5], S. 154, Theorem 9).

Beweis. Sei  $\mathfrak{R}$  eine nichtleere Kette von fastdirekten Zerlegungen von  $A$ ,  $R, S \in \mathfrak{R}$  und  $U \subset R \cap S$ . Dann ist

$$\bigcap_{\varrho \in R-U} \varrho = \bigcap_{\sigma \in S-U} \sigma:$$

denn sei etwa  $R < S$ ; dann gibt es einerseits zu jedem  $\varrho \in R-U$  ein  $\sigma \in S-U$  mit  $\varrho \supset \sigma$ , andererseits ist jedes  $\sigma \in S-U$  Durchschnitt gewisser  $\varrho \in R-U$ . Also kann man jeder Menge  $U \subset K = \bigcup_{R \in \mathfrak{R}} R$ , zu der es ein  $R \in \mathfrak{R}$  gibt mit  $U \subset R$ , die von  $R$  unabhängige Relation  $\tau_U = \bigcap_{\varrho \in R-U} \varrho$  zuordnen;  $\tau_U$  ist entweder Zerlegungskongruenz oder  $A \times A$ . Weiter gibt es zu jedem endlichen System  $V$  von in  $K$  maximalen Relationen ein  $R \in \mathfrak{R}$  mit  $V \subset R$ ; denn ist  $V_1 \subset R_1 \in \mathfrak{R}$ ,  $V_2 \subset R_2 \in \mathfrak{R}$ , jedes  $\varrho \in V_i$  ( $i = 1, 2$ ) maximal in  $K$  und etwa  $R_1 < R_2$ , so gibt es zu jedem  $\varrho_2 \in V_2$  ein  $\varrho_1 \in R_1$  mit  $\varrho_1 \supset \varrho_2$ , wegen der Maximalität von  $\varrho_2$  also  $\varrho_1 = \varrho_2$ , mithin  $V_2 \subset R_1$ . Ist nun das System  $Z(A)$  aller Zerlegungskongruenzen von  $A$  einschließlich  $A \times A$  aufsteigend längenendlich, so ist jede auf-

<sup>(8)</sup> Das System der  $\varrho_{\text{pr}_a \varphi}$  ist sogar nicht verfeinerbare subdirekte Zerlegung von  $A$ ; vgl. Birkhoff [2], p. 92, Theorems 9 und 10.

steigende Kette von endlichen Systemen von in  $K$  maximalen Relationen endlich: Sei  $\mathfrak{R}$  eine solche Kette, dann ist  $\{\tau_U : U \in \mathfrak{R}\}$  eine aufsteigende Kette in  $Z(A)$  und daher endlich; denn zu  $U_1, U_2 \in \mathfrak{R}$  existiert ein  $R \in \mathfrak{R}$  mit  $U_1 \cup U_2 \subset R$ , weshalb aus  $U_1 \subset U_2$  stets  $\tau_{U_1} \subset \tau_{U_2}$  folgt. Außerdem ist die Zuordnung  $U \rightarrow \tau_U$  auf  $\mathfrak{R}$  eineindeutig, weil  $\tau_{U_1} = \tau_{U_2}$  und  $U_1 \cup U_2 \subset R$  mit Hilfssatz 1 die Gleichheit  $U_1 = U_2$  nach sich zieht. Daraus schließt man sofort, daß die Menge  $M$  aller maximalen Elemente von  $K$  endlich ist, so daß es also auch ein  $R_{\max} \in \mathfrak{R}$  gibt mit  $M \subset R_{\max}$ . Ist aber  $\varrho \in R_{\max}$ , so enthält die Menge aller  $\varrho' \in K$  mit  $\varrho' \supset \varrho$  ein maximales Element  $\varrho^*$ , welches zugleich maximal in  $K$  ist, daher zu  $M$  gehört und wegen  $M \subset R_{\max}$  gleich  $\varrho$  ist:  $M = R_{\max}$ . Jedes  $R \in \mathfrak{R}$  ist nun Vergrößerung von  $R_{\max}$ , und wegen der Endlichkeit von  $R_{\max}$  sind alle  $R \in \mathfrak{R}$  und  $\mathfrak{R}$  selbst endlich. Ist  $Z(A)$  absteigend längenendlich, so ist für jede aufsteigende Kette  $\mathfrak{R}$  von endlichen Systemen von in  $K$  maximalen Relationen das System  $\{\bigcap_{\varrho \in U} \varrho : U \in \mathfrak{R}\}$  eine absteigende Kette in  $Z(A)$  und daher endlich: Aus  $U_1 \subset U_2$  folgt ja  $\bigcap_{\varrho \in U_1} \varrho \supset \bigcap_{\varrho \in U_2} \varrho$ . Die Zuordnung  $U \rightarrow \bigcap_{\varrho \in U} \varrho$  ist überdies auf  $\mathfrak{R}$  eineindeutig; denn aus  $\bigcap_{\varrho \in U_1} \varrho = \bigcap_{\varrho \in U_2} \varrho$  und  $U_1 \cup U_2 \subset R \in \mathfrak{R}$  folgt, nach Hilfssatz 1,  $U_1 = U_2$ . Daraus entnimmt man wie oben die Endlichkeit des Systems  $M$  aller in  $K$  maximalen Relationen, weiterhin  $M \subset R_{\max} \in \mathfrak{R}$ ; ist schließlich  $\varrho \in R_{\max}$ , so hat das System aller  $\tau_{\varrho'}$  mit  $\varrho' \in K$  und  $\varrho' \supset \varrho$  ein minimales Element  $\tau_{\varrho^*}$ . Dann ist aber  $\varrho^*$  maximal in  $K$ : Wäre nämlich  $\varrho' \in K$  mit  $\varrho' \supset \varrho^*$ ,  $\varrho' \neq \varrho^*$  und  $\varrho' \in R_1 \in \mathfrak{R}$ ,  $\varrho^* \in R_2 \in \mathfrak{R}$ , so hätte man notwendig  $R_1 < R_2$ , hieraus sofort  $\tau_{\varrho'} \subset \tau_{\varrho^*}$  und  $\tau_{\varrho'} \neq \tau_{\varrho^*}$ , was der Minimalität von  $\tau_{\varrho^*}$  widerspräche. Die weiteren Schlüsse sind dieselben wie oben.

Zusammen mit dem Korollar zu Satz 10 gewinnt man hieraus noch das

**KOROLLAR.** *Ist  $C(A)$  distributiv und  $Z(A)$  aufsteigend oder absteigend längenendlich, so gibt es eine feinste fastdirekte Zerlegung  $R$  von  $A$ ;  $R$  ist endlich, also direkt, und weil jede Zerlegungskongruenz Durchschnitt gewisser  $\varrho \in R$  ist, ist  $Z(A)$  sogar endlich.*

#### LITERATURNACHWEIS

- [1] M. Armbrust, *Quasi-direct products and decompositions*, dieser Band, S. 364-367.
- [2] G. Birkhoff, *Lattice theory*, New York 1948.
- [3] A. W. Goldie, *On direct decompositions. I*, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 48 (1952), S. 1-22.
- [4] J. Hashimoto, *Direct, subdirect decompositions and congruence relations*, Osaka Mathematical Journal 9 (1957), S. 87-112.

- [5] N. Jacobson, *Lectures in abstract algebra. I*, New York 1951.  
[6] Л. Н. Каролинская, *Прямые разложения абстрактных алгебр с отмеченными подалгебрами*, Успехи Математических Наук 14. 5 (89) (1959), S. 230-231.  
[7] A. E. Taylor, *Introduction to functional analysis*, New York 1958.  
[8] O. Zariski and P. Samuel, *Commutative algebra. I*, New York 1958.

*Reçu par la Rédaction le 15. 1. 1965*

---