icm©

Note: In our definition of $\mathfrak{W}^+$ on page 251, add the following requirements. Besides being a dense unbordered ordering of K, $\prec$ must also be weakly homogeneous in the sense that for every $A, B \in E(K)$, $A \simeq B$, there exists a $\prec$-monotone permutation of K which maps A onto B. The existence of such a $\prec$ can easily be proved with the aid of the axiom of choice. This note also applies to [2].

References

[1] P. J. Cohen, *The independence of the continuum hypothesis*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 50 (1963), pp. 1143-1148; 51 (1964), pp. 105-110.

[2] E. Ellentuck, *The universal properties of Dedekind finite cardinals*, Annals of Math. 82.2 (1965), pp. 225-248.

[3] A. Lévy, *The independence of various definitions of finiteness*, Fund. Math. 46 (1958), pp. 1-13.

[4] A. Mostowski, *Über die Unabhängigkeit des Wohlordnungssatzes vom Ordnungsprinzip*, Fund. Math. 32 (1939), pp. 201-252.

[5] J. Myhill, *Recursive equivalence types and combinatorial functions*, Bull. Amer. Math. Soc. 64 (1958), pp. 373-376.

[6] — *Ω—Λ, Recursive Function Theory*, Proc. Symp. Pure Math. 5 (1962), pp. 97-104.

[7] W. Sierpiński, *Cardinal and ordinal numbers*, Warszawa 1958.

[8] D. Scott, *Definitions by abstraction in axiomatic set theory*, Bull. Amer. Math. Soc. 61 (1955), p. 442.

[9] A. Tarski, *Sur quelques théorèmes qui équivalent à l'axiome de choix*, Fund. Math. 5 (1923), pp. 147-154.

[10] — *Cancellation laws in the arithmetic of cardinals*, Fund. Math. 36 (1949), pp. 79-92.

INSTITUTE FOR ADVANCED STUDY
Princeton, New Jersey

Reçu par la Rédaction le 8. 2. 1965

Несколько теорем о произведении топологических пространств

А. Мищенко (Москва)

Настоящая статья посвящена исследованию некоторых весовых характеристик топологических пространств и структуры отображений произведений топологических пространств. Ещё в 1949 году Есенин-Вольпин доказал в [11], что всякий диадический бикомпакт с первой аксиомой счётности метризуем. Отсюда следует, что если образ Y произведения дискретных двоеточий при непрерывном отображении удовлетворяет первой аксиоме счётности, то отображение можно разложить в композицию проекции произведения двоеточий на его грань, а именно, произведение счётного множества двоеточий, и некоторого отображения этой грани на пространство Y. Если мы уже заранее такое разложение осуществим, то метризуемость бикомпакта Y вытекает из того, что образ компакта при непрерывном отображении является компактом, а значит, метризуемым пространством.

Б. Ефимов в работах [9] и [12] дал некоторые достаточные условия, когда указанное выше разложение отображения возможно, а значить диадический бикомпакт метризуем. Задача об оценке веса образа произведения пространств разбивается на две части: 1) Найти условия разложения отображения в композицию проекции на грань меньшей мощности и отображения этой грани на образ, 2) Найти условия, чтобы вес образа не превосходил веса прообраза. Мы в данной статье займёмся первой задачей.

В настоящей статье находятся более широкие (почти окончательные в смысле, указанном ниже) достаточные условия, налагаемые на пространства X_a, чтобы отображение f произведения $\prod_{a\in A} X_a$ на пространство Y, локальный псевдовес которго не превосходит $\mathfrak{m}$, разлагалось в композицию двух отображений: проекции на грань мощности $\mathfrak{m}$ и отображения этой грани на пространство Y. Оказывается, таким свойством пространств X_a является наличие топологических калибров, введённых Шаниным в [4]. Если же хотя бы для одного из сомножителей X_a это свойство не имеет места, а локальный псевдовес пространства X_a не превосходит $\mathfrak{m}$, то можно построить отображение $\prod_{a\in A} X_a \to Y$, не разлагающееся в указанную композицию двух отображений, хотя локальный псевдовес пространства Y не превосходит $\mathfrak{m}$. В этом смысле достаточные условия являются почти необходимыми.

Мы несколько расширяем понятие калибра, так чтобы, например, свойство Суслина тоже выражалось в этих же терминах, и рассматриваем произведения $\prod X_a$ в более сильных топологиях, чем тихоновская, так называемые $\mathfrak{m}$-произведения (см. [13], [14]). Первые два параграфа посвящены именно этим произведениям и соотношению между калибрами сомножителей и калибрами произведения. Причём, оказывается, все трудности сводятся к рассмотрению некоторой теоретико-множественной конструкции, введённой еще Шаниным [4] (калибр множества относительно данного семейства подмножеств). К этой же конструкции сводятся и оценки на плотностный характер топологического пространства (см. [8], [7], [5]). В последнем параграфе исследовано разложение систем канонических окрестностей произведения пространств $\prod X_a$. Именно всякая точечно-счётная система окрестностей представляется в виде объединения счётного семейства локально-конечных (дискретных) систем, если в пространствах взять σ-локально-конечные (σ-дискретные) системы открытых множеств. Это свойство является в некотором роде аналогичным понятию калибра, только вместо мощности семейств рассматриваются локальная мощность. Предложения этого параграфа используются для оценки равномерного веса пространства Y, если пространство Y является образом пространства $\prod X_a$. Задача оценки веса пространств будет рассмотрена в следующей статье [17].

§ 1. $T^{\mathfrak{m}}$-топологии.

Определение 1.1. Пусть $\mathfrak{m}$ — кардинальное число, $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$, X — топологическое пространство. Топология в пространстве X называется *$T^{\mathfrak{m}}$-топологией,* если для любого семейства $\mathcal{G}$ открытых множеств, мощность которого строго меньше числа $\mathfrak{m}$, пересечение этого семейства $\bigcap \mathcal{G}$ является открытым множеством. При этом пространство X называется *$T^{\mathfrak{m}}$-пространством.*

Обычное топологическое пространство в нашей терминологии является $T^{\aleph_0}$-пространством.

Определение 1.2. Пусть X_a — топологические пространства, индекс a пробегает множество A. Введём в пространстве $\prod\limits_{a\in A} X_a$ топологию следующим образом. *Базой* окрестностей является семейство множеств вида:

$$\prod_{a\in Б} G_a \times \prod_{a\in A\setminus Б} X_a,$$

где множества G_a являются открытыми, а мощность множества $Б$ строго меньше $\mathfrak{m}$. Такое топологическое пространство будем обозначать через $\prod\limits_{a\in A}^{\mathfrak{m}} X_a$.

Обычное тихоновское произведение в наших обозначениях будет иметь вид: $\prod\limits_{a\in A}^{\aleph_0} X_a$.

Предложение 1.1. *Если пространства X_a являются $T^{\mathfrak{m}}$-пространствами, то пространство $\prod\limits_{a\in A}^{\mathfrak{m}} X_a$ является тоже $T^{\mathfrak{m}}$-пространством.*

Предложение 1.2. *Если X_a являются T_i-пространствами, то пространство $\prod\limits_{a\in A}^{\mathfrak{m}} X_a$ тоже является T_i-пространством* ($i \leqslant 3\frac{1}{2}$) (1).

Доказательство. При $i \leqslant 3$ утверждение тривиально. Докажем предложение при $i = 3\frac{1}{2}$. Пусть точка x_0 принадлежит пространству

$$X = \prod_{a\in A}^{\mathfrak{m}} X_a,$$

а множество O есть некоторая окрестность точки x_0, которая представима в виде $O = \prod\limits_{a\in Б} G_a \times \prod\limits_{a\in Б} X_a$. Так как пространства X_a вполне регулярны, то существуют непрерывные функции φ_a, $a\in Б$, отображающие пространства X_a в отрезок числовой оси $[0,1]$, причём выполнены условия:

$$\varphi_a\big(x_0(a)\big) = 0, \quad \varphi_a(X_a\setminus G_a) \subset \{1\}.$$

Определим функции Φ_a, отображающие пространство X в отрезок $[0,1]$, следующим образом. Для любой точки x из пространства X положим $\Phi_a(x) = \varphi_a\big(x(a)\big)$. Легко видеть, что функции Φ_a непрерывны. Докажем, что непрерывной является и функция, определённая с помощью равенства:

$$\Phi(x) = \sup_{a\in Б} \{\Phi_a(x)\}.$$

Действительно, пусть точка x принадлежит пространству X и задано число $\varepsilon > 0$. Для любого индекса $a\in Б$ существует окрестность D_a точки $x(a)\in X_a$, для которой выполнено условие: если точка $y(a)$ принадлежит окрестности D_a, то

$$|\Phi_a(x) - \Phi_a(y)| < \varepsilon,$$

или другими словами

$$\Phi_a(x) - \varepsilon < \Phi_a(y) < \Phi_a(x) + \varepsilon.$$

Значит имеют место и такие неравенства, если

$$y \in \prod_{a\in Б} D_a \times \prod_{a\notin Б} X_a,$$

$$\sup_{a\in Б} \{\Phi_a(x)\} - \varepsilon \leqslant \sup_{a\in Б} \{\Phi_a(y)\} \leqslant \sup_{a\in Б} \{\Phi_a(x)\} + \varepsilon,$$

(1) Если индекс i — целое число, то понятие T_i-пространства хорошо известно. Нуждается в определении случай $i = 3\frac{1}{2}$. $T_{3\frac{1}{2}}$-пространствами будем называть вполне регулярные пространства.

т. е. если точка y принадлежит окрестности $\prod\limits_{a\in Б} D_a \times \prod\limits_{a\notin Б} X_a$, то

$$|\Phi(x)-\Phi(y)| \leqslant \varepsilon .$$

Легко видеть, что $\Phi(x_0)=0$, $\Phi(X\setminus O)\subset\{1\}$.

Вопрос о нормальности произведения пространств решается, естественно, отрицательно. Можно лишь исследовать достаточные условия для нормальности произведения пространств.

Предложение 1.3. *Пусть X является $T^{\mathfrak{m}}$-пространством, а $\{\Phi_a\}$ — семейство непрерывных функций, мощность которого строго меньше числа $\mathfrak{m}$. Тогда функции, определённые с помощью равенств*

$$\varphi(x)=\inf_a\{\Phi_a(x)\}, \qquad \psi(x)=\sup_a\{\Phi_a(x)\},$$

являются непрерывными функциями.

Определение 1.3. Пространство X называется $[\mathfrak{a}, \infty)$-*компактным*, если для любого открытого покрытия существует подпокрытие, мощность которого строго меньше числа $\mathfrak{a}$. Пространство X называется $[\mathfrak{a}, \infty)$-*паракомпактным* (*паракомпактным*), если для любого открытого покрытия существует открытое покрытие, вписанное в исходное, причём любая точка имеет окрестность, которая пересекается лишь с подсемейством элементов измельчения мощности строго меньше $\mathfrak{a}$.

Обычная паракомпактность в наших терминах называется $[\aleph_0, \infty)$-*паракомпактностью*.

Предложение 1.4. *Пусть X — $T^{\mathfrak{m}}$-пространство. Если пространство X регулярно, $[\mathfrak{m}, \infty)$-паракомпактно, то X нормально.*

Доказательство. Покрытие ω назовём *локально мощности* $<\mathfrak{m}$, если всякая точка имеет такую окрестность, что семейство элементов покрытия, пересекающихся с этой окрестностью, имеет мощность строго меньше $\mathfrak{m}$. Достаточно показать, что всякое семейство множеств локально мощности $<\mathfrak{m}$ в $T^{\mathfrak{m}}$-топологии является консервативным семейством ([2]). Пусть точка не принадлежит замыканию $[\sigma]$ никакого элемента σ семейства ω локально мощности $<\mathfrak{m}$. Существует окрестность O_x точки x, такая что семейство $\overline{\omega}=\{\sigma\colon \sigma\cap O_x\neq\bigwedge\}$ имеет мощность строго меньше $\mathfrak{m}$. Для любого элемента σ из этого семейства $\overline{\omega}$ найдётся окрестность точки x, обозначенная через O_σ, причём $O_\sigma\cap\sigma=\bigwedge$. Пересечение $O=O_x\cap\bigcap\limits_{\sigma\in\overline{\omega}}O_\sigma$ будет открытым и для любого элемента $\sigma\in\omega$ имеет место $O\cap\sigma=\bigwedge$.

Предложение 1.5. *Пусть регулярное $T^{\mathfrak{m}}$-пространство X удовлетворяет условию: всякое открытое покрытие имеет замкнутое измельчение локально мощности $<\mathfrak{m}$. Тогда пространство X является $[\mathfrak{m}, \infty)$-паракомпактным пространством.*

([2]) Семейство множеств называется *консервативным*, если замыкание объединения любого подсемейства равняется объединению замыкании соответствующих множеств.

Предложение 1.6. *Пусть регулярное $T^{\mathfrak{m}}$-пространство X регулярно и удовлетворяет условию: всякое открытое покрытие имеет измельчение (неоткрытое) локально мощности $<\mathfrak{m}$. Тогда пространство X является $[\mathfrak{m}, \infty)$-паракомпактным пространством.*

Доказательство этих двух утверждений в точности повторяет доказательства аналогичных теорем в заметке Майкла ([1]). Из последнего предложения вытекает

Предложение 1.7. *Если регулярное $T^{\mathfrak{m}}$-пространство X является $[\mathfrak{m}', \infty)$-компактным, то пространство X является $[\mathfrak{m}, \infty)$-паракомактным и, следовательно, нормальным. Число $\mathfrak{m}'$ есть следующее за числом $\mathfrak{m}$.*

Предложение 1.8. *Если число $\mathfrak{m}$ несчётное, то не существует никаких регулярных счетно-компактных $T^{\mathfrak{m}}$-пространств, кроме конечных.*

Доказательство. Всякое G_δ в пространстве X является открытым множеством. Для любой окрестности O точки x существует такая меньшая окрестность O_1 точки x, что $O_1\subset[O_1]\subset O$ и $[O_1]$ является G_δ. Другими словами существует открыто-замкнутая окрестность O_2 точки x, лежащая в окрестности O. Пусть $x_0\in X$ — предельная точка. Это значит, что существует последовательность открыто-замкнутых окрестностей $X\supset O_1\supset O_2\supset \supset\ldots\supset O_n, \ldots\ni x_0$, причём $O_n\setminus O_{n+1}\neq\bigwedge$. Пересечение этих окрестностей является открытым множеством, следовательно, можно составить бесконечное дизъюнктное покрытие, состоящее из множеств $X\setminus O_1$, $O_n\setminus O_{n-1}$ и $\bigcap\limits_{n=1} O_n$.

Это противоречит условию счётной компактности, следовательно предельных точек нет, т. е. пространство конечно.

Но даже для конечных пространств X_a при $\mathfrak{m}>\aleph_0$ пространство $\prod^{\mathfrak{m}} X_a$ может быть не нормальным. А именно, верно следующее предложение, обобщающее теорему Стоуна ([2]):

Предложение 1.9. *Пусть X_a — дискретные пространства (следовательно, $T^{\mathfrak{m}}$-пространства), мощность каждого пространства X_a больше или равна регулярному числу $\mathfrak{m}$, индекс a пробегает множество A, мощность которого строго больше $\mathfrak{m}$. Тогда пространство $Y=\prod\limits_{a\in A}^{\mathfrak{m}} X_a$ ненормально.*

Доказательство. Будем считать, что пространства X_a являются копиями одного пространства X мощности $\mathfrak{m}$. Через F_x обозначим множество всех точек пространства Y, у которых никакие две координаты не принимают равные значения, отличные от точки a. Покажем, что множество F_x замкнуто. Пусть точка η не принадлежит множеству F_x. Это значит, что существует два различных индекса a и β, таких что $\eta(a)=\eta(\beta)\neq x$. Построим окрестность точки η, фиксируя для этого именно эти два индекса: $\{\eta(a)\}\times \times\{\eta(\beta)\}\times\prod\limits_{\gamma\in A\setminus\{a,\beta\}}X_\gamma$. Эта окрестность не пересекается с множеством F_x.

Далее, так как мощность множества A строго больше мощности множества X, то при $x\neq y$ имеем: $F_x\cap F_y=\bigwedge$.

Докажем, что множества F_x и F_y при $x \neq y$ нельзя отделить непересекающимися окрестностями. Пусть G — некоторое открытое множество, содержащее множество F_x. Определим точку ξ_1, принадлежащую множеству F_x следующим образом: для каждого индекса $\alpha \in A$ положим $\xi_1(\alpha) = x$. Через $H_Б^\xi$ будем обозначать множество всех точек η, для которых выполнены равенства $\xi(\alpha) = \eta(\alpha)$ для любого индекса $\alpha \in Б$. При этих обозначениях существует множество индексов $Б_1$, мощность которого строго меньше $\mathfrak{m}$, такое что $H_{Б_1}^{\xi_1} \subset G$. Точку $\xi_2 \in F_x$ определим так, чтобы для любого индекса $\alpha \in Б_1$ имело место неравенство $\xi_2(\alpha) \neq x$, а для остальных индексов имело место равенство $\xi_2(\alpha) = x$. Существует множество индексов $Б_2$ содержащее множество $Б_1$, причём мощность множества строго меньше $\mathfrak{m}$ и $H_{Б_2}^{\xi_2} \subset G$. Пусть ω — наименьшее порядковое число мощности $\mathfrak{m}$. Пусть, далее, построены точки ξ_α и множества $Б_\alpha$ для любого порядкового числа $\alpha < \beta < \omega$, удовлетворяющие следующим условиям: $\xi_\alpha \in F_x$; если $1 < \alpha_1 < \alpha_2$, то $Б_{\alpha_1} \subset Б_{\alpha_2}$ и для любого индекса $\gamma \in Б_{\alpha_1}$ имеет место: $\xi_{\alpha_2}(\gamma) = \xi_{\alpha_1}(\gamma)$; $H_{Б_\alpha}^{\xi_\alpha} \subset G$; если $\gamma \in Б$, то $\xi_{\alpha+1}(\gamma) \neq x$; если же $\gamma \notin Б_\alpha$, то $\xi_{\alpha+1}(\gamma) = x$; мощность каждого $Б_\alpha$ при $\alpha < \beta$ строго меньше $\mathfrak{m}$. Через $Б$ обозначим множество $\bigcup\limits_{\alpha<\beta} Б_\alpha$. Определим тогда точку ξ_β равенствами: если $\gamma \in Б_\alpha$, то $\xi_\beta(\gamma) = \xi_\alpha(\gamma)$, если же $\gamma \notin Б_\alpha$, то $\xi_\beta(\gamma) = x$. Ясно, что точка ξ_β принадлежит множеству F_x, следовательно существует множество $Б_\beta$, мощность которого строго меньше $\mathfrak{m}$, и выполняется условие: $H_{Б_\beta}^{\xi_\beta} \subset G$. Так как мощность множества $Б$ меньше $\mathfrak{m}$, то можно считать, что $Б \subset Б_\beta$. Итак, точки ξ_β и множества $Б_\beta$ можно построить для любого порядкового числа $\beta < \omega$. Определим точку ξ равенствами: если $\gamma \in Б_\alpha$ для некоторого $\alpha < \omega$, то $\xi(\gamma) = \xi_\alpha(\gamma)$, если же $\gamma \notin \bigcup\limits_{\alpha<\omega} Б_\alpha = Б_0$, то $\xi(\gamma) = y$. Точка ξ принадлежит множеству F_y. Докажем теперь, что точка ξ принадлежит замыканию множества G. Пусть $H_Б^\xi$ — произвольная окрестность точки ξ, следовательно, мощность множества $Б$ меньше $\mathfrak{m}$. Множество $Б$ можно разбить на две части: $Б = Б' \cup Б''$, так, чтобы $Б' \subset Б_0$, а $Б'' \cap Б_0 = \wedge$. Так как мощность $Б'$ меньше $\mathfrak{m}$, то существует порядковое число $\alpha < \omega$, такое что $Б' \subset Б_\alpha$. Отсюда легко видеть, что $H_{Б_\alpha}^{\xi_\alpha} \cap H_Б^\xi \neq \wedge$, т. е. $\xi \in [G]$. Предложение доказано.

Предложение 1.10. *Пусть число* $\mathfrak{m}$ — *непредельное,* X_α — *дискретные двоеточия. Тогда при условии* $|A| > \mathfrak{m}$ *пространство* $\prod\limits_{\alpha\in A}^{\mathfrak{m}} X_\alpha$ *ненормально.*

Доказательство. Так как число $\mathfrak{m}$ непредельное, то существует предыдущее кардинальное число, обозначим его через $\mathfrak{n}$. Множество A можно представить в виде $A = \bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma} A^\gamma$ мощность Γ строго больше $\mathfrak{m}$, мощность каждого A^γ равна $\mathfrak{n}$. Следовательно, множества $Y_\gamma = \prod\limits_{\alpha\in A^\gamma}^{\mathfrak{m}} X$ имеют дискретную топологию, и мощность равна $2^{\mathfrak{m}} \geqslant \mathfrak{m}$. Пространство $\prod^{\mathfrak{n}} \times Y_\alpha$ гомеоморфно пространству $\prod^{\mathfrak{n}} Y_\gamma$. Далее применяем предложение 1.9.

Замечание. Предложения 1.1, 1.2 и 1.3 допускают обобщение. Пусть на пространстве X задано семейство топологий $\{T_\alpha\}$. Назовём следующую топологию *произведением топологий из семейства* и обозначим через $\prod^{\mathfrak{m}} T_\alpha$; окрестностями этой топологии будут всевозможные пересечения открытых множеств G_α, по одному множеству из каждой топологии T_α, причём $G_\alpha \neq X$ только для множества индексов мощности меньше $\mathfrak{m}$. В случае произведения пространств эти топологии суть обратные образы топологий сомножителей при проекциях.

§ 2. Калибры множеств. Это понятие ввёл и исследовал поведение калибров произведения множеств Н. Шанин в [4]. Здесь мы исследуем несколько более широкое понятие, называя его всё так же — *калибром.*

Определение 2.1. Пусть X — некоторое множество, $\mathfrak{D}$ — некоторое семейство его подмножеств. Пару кардинальных чисел $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$, $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$, $\mathfrak{n} \geqslant \aleph_0$ мы будем называть *калибром множества* X *относительно семейства* $\mathfrak{D}$, если выполняется условие: Пусть M такое подмножество множества X, что любое подмножество Y множества M, являющееся одновременно элементом семейства $\mathfrak{D}$, имеет мощность не превосходящую $\mathfrak{m}$; тогда мощность множества M не превосходит $\mathfrak{n}$.

Связь нашего определения калибра с определением калибра по Шанину заключается в следующем утверждении: *если пара кардинальных чисел* $(\mathfrak{n}, \mathfrak{n})$ *является калибром в нашем смысле, то следующая мощность является калибром в смысле Шанина.*

Определение 2.2. Пусть X_α — некоторые множества, индекс α пробегает множество A, e — некоторая функция, которая каждому индексу α ставит в соответствие элемент $e(\alpha) \in X_\alpha$. Через $\sum\limits_{\alpha\in A}\nolimits_e^{\mathfrak{m}} X_\alpha$ обозначим подмножество множества $\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$, состоящее из всех таких элементов ξ, что мощность множества тех индексов, для которых $\xi(\alpha) \neq e(\alpha)$, строго меньше числа $\mathfrak{m}$.

Если мощность множество A меньше $\mathfrak{m}$, то $\sum\limits_{\alpha\in A}\nolimits_e^{\mathfrak{m}} X_\alpha = \prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$, если $\mathfrak{m} = \aleph_0$, то $\sum\limits_{\alpha\in A}\nolimits_e^{\mathfrak{m}} X_\alpha$ есть прямая сумма с фиксированной точкой. Через $A(\xi)$ обозначим множества тех индексов α, для которых $\xi(\alpha) \neq e(\alpha)$.

Через $\pi_\Gamma^Б$ обозначим проекцию множества $\sum\limits_{\alpha\in Б}\nolimits_e^{\mathfrak{m}} X_\alpha$ на множество $\sum\limits_{\alpha\in\Gamma} X_\alpha$ ($\Gamma \subset Б \subset A$). Если $Б = A$, то верхний индекс будем опускать, если множество Γ состоит из одного элемента α, то пишем попросту $\pi_\alpha^Б$.

Определение 2.3. Пусть X_α — некоторые множества, индекс α пробегает множество A, e — функция из определения 2.2. Пусть, далее, $\mathfrak{D}_\alpha$ — такие семейства подмножеств множеств X_α, что $\wedge \notin \mathfrak{D}_\alpha$, а всякое множество, состоящее из одного элемента, а также всякое множество вида $Y \cup \{e_\alpha\}$, где $Y \in \mathfrak{D}_a$, принадлежат семейству $\mathfrak{D}_a$. Под $\sum\limits_{a \in A} \mathfrak{D}_a$ будем понимать семейство всех множеств $Y \subset \sum\limits_{a \in A}^{\mathfrak{m}}{}_e X_a$, удовлетворяющих условию: для любого $a \in A$ $\pi_a(Y) \in \mathfrak{D}_a$.

Теорема 1. *Пусть пара кардинальных чисел* $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ *является калибром для множеств* $\sum\limits_{a \in Б}^{\mathfrak{k}}{}_e X_a$ *по отношению к семейству* $\sum\limits_{a \in Б} \mathfrak{D}_a$ *где* $Б$ — *произвольное подмножество множества* A, *мощность которого строго меньше* $\mathfrak{k}$. *Через* $\mathfrak{r}$ *обозначим* $\sum\limits_{s < \mathfrak{k}} \mathfrak{n}^s$. *Тогда пара* $(\mathfrak{m}, \mathfrak{r})$ *является калибром множества* $\sum\limits_{a \in A}^{\mathfrak{k}}{}_e X_a$ *по отношению к семейству* $\mathfrak{D} = \sum\limits_{a \in A} \mathfrak{D}_a$.

Доказательству предпошлём одну теоретико-множественную лемму.

Определение 2.4. Пусть Y — некоторое подмножество множества $\sum\limits_{a \in A}^{\mathfrak{m}}{}_e X_a$. Через $\ker Y$ обозначим $\bigcap \{A(\xi)\colon \xi \in Y\}$. Пусть $Б$ — некоторое подмножество множества $\ker Y$. Будем говорить, что множество Y *тривиально на множестве* $Б$, если для любого индекса $a \in Б$ и для любых элементов $\xi, \eta \in Y$ имеет место $\xi(a) = \eta(a)$. Семейство $\{A(\xi)\}$ называется *квазидизъюнктным*, если семейство, образованное множествами $A(\xi) \backslash \bigcap\limits_{\eta} A(\eta)$ дизъюнктно. Будем говорить, что множество Y *квазидизъюнктно*, если семейство $\{A(\xi)\colon \xi \in Y\}$ квазидизъюнктно. Если же семейство $\{A(\xi)\colon \xi \in Y\}$ дизъюнктно, то будем говорить, что множество Y *дизъюнктно*. Если множество Y квазидизъюнктно и тривиально на множестве $\ker Y$, то будем горить, что множество Y *звёздное*.

Лемма. *Пусть* Y — *произвольное подмножество множества* $\sum\limits_{a \in A}^{\mathfrak{m}}{}_e X_a$, *а число* ω *есть наименьшее порядковое число, мощность которого равна* $\mathfrak{m}$. *Тогда множество* Y *можно представить в виде объединения* $Y = \bigcup\limits_{\pi < \omega} Y_\pi$, $Y_\pi = \bigcup\limits_{\gamma} Y_\pi^\gamma$, *причём множества* Y_π^γ *квазидизъюнктны, а множества* $\ker Y_\pi^\gamma$ *попарно не совпадают и* $\ker Y_\pi^\gamma \subset \bigcup \{A(\xi)\colon \xi \in \bigcup\limits_{\nu < \pi} Y_\nu\}$.

Доказательство по существу содержится в статье Майкла [3], но в неявной форме. Мы воспроизведём здесь это доказательство. Пусть Y_0 — максимальное дизъюнктное подмножество множества Y. Обозначим через Y_0^γ множество Y_0, индекс γ принимает только одно значение. Пусть, далее, построены множества Y_π^γ для любого порядкового числа $\pi < \nu$, причём для всякого подмножества Γ, лежащего в множестве $\bigcup \{A(\xi)\colon \xi \in \bigcup\limits_{\mu < \pi} Y_\mu\}$ и представимого в виде $\Gamma = \ker Y'$ для некоторого $Y' \subset Y$, существует индекс γ, такой что $\ker Y_\pi^\gamma = \Gamma$, а множество Y_π^γ является максимальным квазидизъюнктным множеством. Если Γ не представимо в виде $\Gamma = \ker Y'$, но существует ξ, $A(\xi) \supset \Gamma$, то существует такой γ, что Y_π^γ состоит из одного элемента ξ и $A(\xi) \supset \Gamma$. Пусть множество Γ лежит в множестве $\bigcup \{A(\xi)\colon \xi \in \bigcup\limits_{\mu < \nu} Y_\mu\}$, а Y_ν^γ — максимальное квазидизъюнктное подмножество множества Y, для которого имеет место равенство: $\ker Y_\nu^\gamma = \Gamma$ [3]. Итак множества Y_π^γ построены для любого числа $\pi < \omega$. Остаётся показать, что $Y = \bigcup\limits_{\gamma, \pi} Y_\pi^\gamma$. Если бы это было не так, то существовал бы такой элемент ξ из множества Y, что для любого числа $\pi < \omega$ и любого индекса γ элемент ξ не принадлежал множеству Y_π^γ. Так как множества Y_π^γ выбирались максимальными, то мощность множества $A(\xi)$ не меньше $\mathfrak{m}$.

Действительно, $Б_0 = A(\xi) \cap \bigcup \{A(\eta)\colon \eta \in Y_0\} \neq \bigwedge$ [4], так как в противном случае имели бы $\xi \in Y_0$. Поскольку существует такое γ, что $\ker Y_1^\gamma = Б_0$ [5], то $Б_1 = (A(\xi) \backslash Б_0) \cap \bigcup \{A(\eta)\colon \eta \in Y_1^\gamma\} \neq \bigwedge$. Пусть построены $Б_\nu \neq \bigwedge$, γ, такие что $\bigcup\limits_{\mu < \nu} Б_\mu = \ker Y_\nu^{\gamma_\nu}$, $Б_\nu = (A(\xi) \backslash \bigcup\limits_{\mu < \nu} Б_\mu) \cap \{A(\eta)\colon \eta \in Y_\nu^{\gamma_\nu}\}$ — для любого $\nu < \pi < \omega$. Тогда $\bigcup\limits_{\nu < \pi} Б_\nu \subset \bigcup \{A(\eta)\colon \eta \in \bigcup\limits_{\nu < \pi} Y_\nu\}$, т. е. существует такое γ_π, что $\ker Y_\pi^{\gamma_\pi} = \bigcup\limits_{\nu < \pi} Б_\nu$. Поскольку $\xi \notin Y_\pi^{\gamma_\pi}$, то $Б_\pi = (A(\xi) \backslash \bigcup\limits_{\nu < \pi} Б_\nu) \cap \cap \{A(\eta)\colon \eta \in Y_\pi^{\gamma_\pi}\} \neq \bigwedge$. Тем самым множества $Б_\pi$ построены для любого $\pi < \omega$, причём множества $Б_\pi$ содержатся в $A(\xi)$ и непусты. Это значит, что мощность множества $A(\xi)$ не меньше $\mathfrak{m}$. Противоречие доказывает лемму.

Доказательство теоремы 1. Пусть сначала непустое подмножество Y множества $\sum\limits_{a \in A}^{\mathfrak{k}}{}_e X_a$ является квазидизъюнктным и любое его подмножество $Y' \subset Y$, которое одновременно принадлежит семейству $\mathfrak{D}$, имеет мощность не превосходящую $\mathfrak{m}$. Через $Б$ обозначим множество $\ker Y$, а через $Y_Б$ — множество $\pi_Б(Y)$. Пусть $Y'_Б$ — такое подмножество множества $\pi_Б(Y)$, что $Y'_Б \in \sum\limits_{a \in Б} \mathfrak{D}_a$. Рассмотрим множество $\pi_Б^{-1} Y_Б^1 \cap Y$. Если индекс a принадлежит множеству $Б$, то

$$\pi_a(\pi_Б^{-1} Y_Б^1 \cap Y) = \pi_a^Б Y_Б^1 \in \mathfrak{D}_a .$$

Если же индекс a не принадлежит множеству $Б$, то в силу квазидизъюнктности множества Y существует элемент $\xi \in Y$, удовлетворяющий условию: если элемент η, отличный от элемента ξ, принадлежит множеству Y, то $\eta(a) = e(a)$. Поэтому множество $\pi_a(\pi_Б^{-1} Y_Б^1 \cap Y)$ состоит или из одного элемента $e(a)$, или из двух элементов $e(a)$ и $\xi(a)$. Это означает, что множество $\pi_Б^{-1} Y_Б^1 \cap Y$ принадлежит семейству $\mathfrak{D}$, и, следовательно, мощность множеств $\pi_Б^{-1} Y'_Б \cap Y$ и $Y'_Б$ не превосходит $\mathfrak{m}$. Так как мощность множества $Б$ строго меньше $\mathfrak{k}$, то мощность множества $\pi_Б Y$ не превосходит $\mathfrak{n}$. Легко видеть, что прообраз точки при отображении $\pi_Б$ имеет мощность, не пре-

[3] Если такого множества Y_ν^γ не существует, а существует такой элемент ξ, что $A(\xi) \supset \Gamma$, то в качестве Y_ν^γ возьмем одно элементное множество $\{\xi\}$.

[4] Будем здесь считать, что $\bigcup \{A(\xi)\colon \xi \in \Lambda\} = \Lambda$.

[5] Или Y_1^γ состоит из одного элемента η, $A(\eta) \supset Б_0$.

восходящую $\mathfrak{m}$, ибо множество $\pi_B^{-1}\xi$ принадлежит семейству $\mathfrak{D}$, Значит мощность $Y \leqslant \mathfrak{n}$.

Пусть теперь непустое множество Y таково, что каждое его подмножество принадлежащее семейству $\mathfrak{D}$, имеет мощность $\leqslant \mathfrak{m}$.

Пусть кардинальное число $\mathfrak{s}$ строго меньше $\mathfrak{k}$. Через $Y_{\mathfrak{s}}$ обозначим множество всех элементов множества Y, для которых мощность множества $A(\xi)$ не превосходит $\mathfrak{s}$. Имеем: $Y = \bigcup_{\mathfrak{s}<\mathfrak{k}} Y_{\mathfrak{s}}$. Докажем, что мощность множества $Y_{\mathfrak{s}}$ не превосходит $\mathfrak{n}^{\mathfrak{s}}$. По лемме множество $Y_{\mathfrak{s}}$ можно представить в виде объединения $\bigcup_{\nu<\omega} Y_{\mathfrak{s},\nu}$, $Y_{\mathfrak{s},\nu} = \bigcup_{\gamma} Y^{\gamma}_{\mathfrak{s},\nu}$, причём множества $Y^{\gamma}_{\mathfrak{s},\nu}$ квазидизъюнктны и $\ker Y^{\gamma}_{\mathfrak{s},\nu} \subset \bigcup_{\xi\in\bigcup Y_{\mathfrak{s},\mu<\nu}} A(\xi)$. Мощность квазидизъюнктного множества не превосходит $\mathfrak{n}$. В случае $\nu = 0$ индекс γ принимает только одно значение. Значит, $|Y_{\mathfrak{s},0}| \leqslant \mathfrak{n} \leqslant \mathfrak{n}^{\mathfrak{s}}$, $|\bigcup\{A(\xi)\colon \xi\in\bigcup_{\nu<0} Y_{\mathfrak{s},\nu}\}| \leqslant \mathfrak{n}\cdot\mathfrak{s} \leqslant \mathfrak{n}^{\mathfrak{s}}$. Пусть доказано, что $|Y_{\mathfrak{s},\nu}| \leqslant \mathfrak{n}^{\mathfrak{s}}$ для любого $\nu<\pi<\omega$. Тогда $|\bigcup_{\nu<\pi} Y_{\mathfrak{s},\nu}| \leqslant \mathfrak{n}^{\mathfrak{s}}\cdot\mathfrak{s} \leqslant \mathfrak{n}^{\mathfrak{s}}$, и, следовательно, $|\bigcup\{A(\xi)\colon \xi\in\bigcup_{\nu\in\pi} Y_{\mathfrak{s},\nu}\}| \leqslant \mathfrak{n}^{\mathfrak{s}}\cdot\mathfrak{s} = \mathfrak{n}^{\mathfrak{s}}$. Для некоторых подмножеств $\Gamma \subset \bigcup\{A(\xi)\colon \xi\in\bigcup_{\nu<\pi} Y_{\mathfrak{s},\nu}\}$ существует такой индекс γ что $\Gamma = \ker Y^{\gamma}_{\mathfrak{s},\pi}$. Если $|\Gamma| > \mathfrak{s}$, то $Y^{\gamma}_{\mathfrak{s},\pi} = \wedge$, семейство же подмножеств Γ, мощности не превосходящей $\mathfrak{s}$, имеют мощность меньшую или равную $(\mathfrak{n}^{\mathfrak{s}})^{\mathfrak{s}} \leqslant \mathfrak{n}^{\mathfrak{s}}$, т. е. $|Y_{\mathfrak{s},\pi}| \leqslant \mathfrak{n}^{\mathfrak{s}}$. С другой стороны, мощность порядкового числа ω не превосходит $\mathfrak{s}$. Итак $|Y_{\mathfrak{s}}| \leqslant \mathfrak{n}^{\mathfrak{s}}$, $|Y| \leqslant \mathfrak{r}$.

Оценки теоремы 1 являются окончательными, т. е. число $\mathfrak{m}$ нельзя увеличить, а число $\mathfrak{r}$ уменьшить. Это вытекает из приведённого ниже предложения 2.2.

Предложение 2.1. *Существует топологическое пространство, для которого пара $(\aleph_0, \aleph_0)$ является калибром, а пара $(\aleph_1, \aleph_1)$ не является калибром (имеется в виду калибр множества открытых множеств относительно семейства множеств с непустым пересечением).*

Доказательство. Пусть X_α — дискретное двоеточие, $X_\alpha = \{0, 1\}$, индекс α пробегает множество A, мощность которого равна $\aleph_2$. Через E обозначим множество всех точек x произведения $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$, для которых множество координат, равных нулю, имеет мощность, равную $\aleph_2$. Искомое пространство определяется равенством: $X = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha \setminus E$. Докажем, что пара $(\aleph_0, \aleph_0)$ является калибром. Пусть $\{U_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ — точечно-счётное [6] семейство непустых открытых множеств, мощность которого строго больше $\aleph_0$. Тогда существует подмножество Γ_1 мощности $\aleph_1$. Для каждого $\gamma\in\Gamma_1$ в множестве $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ найдётся каноническая окрестность, т. е. множество вида $V_\gamma = O_{\alpha_1,\gamma}\times\ldots\times O_{\alpha_n,\gamma}\times\prod X_\alpha$, $V_\gamma \cap X \subset U_\gamma$, причём каждое множество $O_{\alpha_i,\gamma}$ состоит из одной точки. Так как для пространства $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ пара $(\aleph_0, \aleph_0)$ является калибром, то существует подмножество $\Gamma_2 \subset \Gamma_1$, мощность которого тоже равна $\aleph_1$, а семейство $\{V_\gamma\colon \gamma\in\Gamma_2\}$ имеет непустое пересечение. Пусть B — множество индексов, участвовавших в построении множеств V_γ, $\gamma\in\Gamma_2$, ξ — общая для всех множеств семейства $\{V_\gamma, \gamma\in\Gamma_2\}$ точка. Построим другую точку η следующим образом: для любого индекса $\alpha\in B$ положим $\xi(\alpha) = \eta(\alpha)$, для остальных индексов положим $\eta(\alpha) = 1$. Ясно, что эта точка не принадлежит множеству E, и поэтому пара $(\aleph_0, \aleph_0)$ является калибром.

Пусть теперь U_α — множество всех точек ξ множества X, для которых $\xi(\alpha) = 0$. Семейство этих множеств U_α имеет мощность, равную $\aleph_2$. Если бы существовало равномощное подсемейство с непустым пересечением, т. е. существовала общая точка ξ для этого семейства, то у этой бы точки имелась система индексов мощности $\aleph_2$, причём для любого индекса из этой системы $\xi(\alpha) \subset 0$, что невозможно, так как тогда бы точка принадлежала множеству E. Значит пара $(\aleph_1, \aleph_1)$ не является калибром.

Предложение 2.2. *Существуют такие топологические пространства X_α, что пара $(\aleph_0, \aleph_1)$ является калибром любого произведения $\prod_{\alpha\in B}^{\aleph_1} X_\alpha$, если $|B| < \aleph_1$, и, следовательно, калибром $\prod_{\alpha\in A}^{\aleph_1} X_\alpha$ для любого множества индексов A, но пары $(\aleph_0, \aleph_0)$ и $(\aleph_1, \aleph_1)$ не являются калибрами последнего пространства* (в предположении гипотезы континуума).

Доказательство. В качестве сомножителей X_α возьмём копии пространства X из предложения 2.1. Легко, следуя доказательству предложения 2.1, доказать, что пара $(\aleph_0, \aleph_1)$ является калибром для $\prod_{\alpha\in B}^{\aleph_1} X_\alpha$, где $|B| \leqslant \aleph_0$. Пара же $(\aleph_0, \aleph_0)$ не является калибром, так как существует $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ непересекающихся канонических окрестностей.

Предложение 2.1 можно обобщить следующим образом:

Предложение 2.3. *Для любой мощности $\mathfrak{m} > \aleph_0$ существует топологическое пространство X, для которого пара $(\aleph_0, \aleph_0)$ является калибром, а пара $(\mathfrak{n}, \mathfrak{n})$ на является калибром для любого кардинального числа $\mathfrak{n}$, удовлетворяющему неравенствам $\aleph_0 < \mathfrak{n} \leqslant \mathfrak{m}$.*

Пространство X строится аналогично пространству X в предложении 2.1.

Пусть нам известны калибры сомножителей X_α. Для того, чтобы найти калибр множества $\sum_{\alpha\in A}^{\mathfrak{m}}{}_e X_\alpha$, достаточно знать калибры меньших множеств $\sum_{\alpha\in B}{}_e X_\alpha$ для таких подмножеств B множества A, мощность которых строго меньше $\mathfrak{m}$. Неизвестно, как связаны калибры сомножителей и множеств $\sum_{\alpha\in B}^{\mathfrak{m}}{}_e X_\alpha$ при $|B| < \mathfrak{m}$. Однако верно следующее утверждение.

[6] Если каждая точка содержится не более чем в счётном подсемействе данного семейства, то последнее называется *точечно-счётным*.

Теорема 2. *Пусть семейства* $\mathfrak{D}_\alpha$ *удовлетворяют условию: если множество* Y *принадлежит семейству* $\mathfrak{D}_\alpha$, *то и любое его непустое подмножество принадлежит семейству* $\mathfrak{D}_\alpha$, *а* $\wedge \notin \mathfrak{D}_\alpha$. *Пусть пара* $(1, \mathfrak{n})$ *является калибром сомножителей* X, *индекс* α *пробегает множество* $Б$ *мощности* $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$. *Тогда пара* $(1, \mathfrak{m}^{\mathfrak{n}})$ *является калибром для множества* $\sum_{\alpha \in Б}^{\mathfrak{r}} X_\alpha$, *где* $\mathfrak{r}$ — *следующая за* $\mathfrak{m}$ *мощность.*

Доказательство. Пусть множество $Y \subset \sum_{\alpha \in Б}^{\mathfrak{r}} X_\alpha$ обладает свойством: если подмножество Y' множества Y содержит более чем один элемент, то это подмножество не принадлежит семейству $\mathfrak{D} = \sum_{\alpha \in A} \mathfrak{D}_\alpha$. Пусть ξ_s — некоторый элемент множества Y. Для любого элемента $\xi \in Y$, отличного от элемента ξ_1, будем иметь, что множество, состоящее из двух элементов: ξ и ξ_1, не принадлежит семейству $\mathfrak{D}$. Это значит, что существует индекс $\alpha \in Б$, зависящий от элемента ξ, т. е. $\alpha = \alpha(\xi)$, такой что множество $\{\xi(\alpha), \xi_1(\alpha)\}$ не принадлежит семейству $\mathfrak{D}_\alpha$. Тогда множество можно представить в виде объединения $\xi_1 \cup \bigcup_{\alpha_1 \in Б} Y_{\alpha_1}$, где Y_{α_1} — множество всех тех элементов $\xi \in Y$, для которых $\alpha(\xi) = \alpha_1$. Итак, имеем: $Y = \{\xi_1\} \cup \bigcup_{\alpha_1 \in Б} Y_{\alpha_1}$. В каждом множестве Y_{α_1} выберем по элементу ξ_{α_1}, если $Y_{\alpha_1} \neq \wedge$.

Пусть для любого числа $\beta < \gamma < \omega$ построены множества $Y_{\alpha_1 \ldots \alpha_\beta}$ и элементы $\xi_{\alpha_1 \ldots \alpha_\beta} \in Y_{\alpha_1 \ldots \alpha_\beta}$, если $Y_{\alpha_1 \ldots \alpha_\beta} \neq \wedge$, причём индексы α_i принимают значения из множества $Б$. Пусть выполняются следующие условия: если $\delta < \beta$, то $\xi_{\alpha_1 \ldots \alpha_\delta} \notin Y_{\alpha_1 \ldots \alpha_\delta \ldots \alpha_\beta}$, если β предельное число, то $Y_{\alpha_1 \ldots \alpha_\beta} = \bigcap_{\delta < \beta} Y_{\alpha_1 \ldots \alpha_\delta}$, если $\beta = \delta + 1$ и $Y_{\alpha_1 \ldots \alpha_\beta} \neq \wedge$, то $Y_{\alpha_1 \ldots \alpha_\delta} = \{\xi_{\alpha_1 \ldots \alpha_\delta}\} \cup \bigcup_{\alpha_{\delta+1} \in Б} Y_{\alpha_1 \ldots \alpha_\delta \alpha_{\delta+1}}$ и, если $\delta < \beta$ и $\xi \in Y_{\alpha_1, \ldots, \alpha_\beta}$, то множество, состоящее из двух элементов $\{\xi(\alpha_{\delta+1}), \xi_{\alpha_1 \ldots \alpha_\delta}(\alpha_{\delta+1})\}$ не принедлежит семейству $\mathfrak{D}_{\alpha_{\delta+1}}$. Если число γ предельное, то положим $Y_{\alpha_1 \ldots \alpha_\gamma} = \bigcap_{\beta < \gamma} Y_{\alpha_1 \ldots \alpha_\beta}$, и выберем некоторый элемент $\xi_{\alpha_1 \ldots \alpha_\gamma}$ из всякого множества $Y_{\alpha_1 \ldots \alpha_\gamma} \neq \wedge$. Опять, если ξ — некоторый элемент $Y_{\alpha_1 \ldots \alpha_\gamma}$, отличный от элемента $\xi_{\alpha_1 \ldots \alpha_\gamma}$, то существует индекс $\alpha_{\gamma+1}$, такой что множество $\{\xi(\alpha_{\gamma+1}), \xi_{\alpha_1 \ldots \alpha_\gamma}(\alpha_{\gamma+1})\}$ не принадлежит семейству $\mathfrak{D}_{\alpha_{\gamma+1}}$. Значит, множество $Y_{\alpha_1 \ldots \alpha_\gamma}$ можно представить в виде объединения $\{\xi_{\alpha_1 \ldots \alpha_\gamma}\} \cup \bigcup_{\alpha_{\gamma+1}} Y_{\alpha_1 \ldots \alpha_{\gamma+1}}$. Если число γ непредельное, то построение аналогичное. Итак, для любого порядкового числа γ можно построить множества $Y_{\alpha_1 \ldots \alpha_\gamma}$ и элементы $\xi_{\alpha_1 \ldots \alpha_\gamma}$, если только множество $Y_{\alpha_1 \ldots \alpha_\gamma}$ непусто. Покажем, что для любой последовательности $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_\gamma, \ldots\}$, $\gamma < \omega$, где ω — наименьшее порядковое число, мощность которого больше $\mathfrak{n}$, существует число $\delta < \omega$, для которого имеем: если число $\gamma > \delta$, то множество $Y_{\alpha_1 \ldots \alpha_\gamma}$ пусто. Если бы это было не так, то существовала бы конфинальная множеству $[1, \omega)$ часть, обозначенная буквой M, причём для любого числа $\gamma \in M$, $\alpha_\gamma = \alpha$, где α — некоторый индекс, не зависящий от порядкового числа γ. Для любых двух чисел γ и δ, принадлежащих множеству M, $\delta < \gamma$, множество, состоящее из элементов $\xi_{\alpha_1 \ldots \alpha_\delta}(\alpha)$ и $\xi_{\alpha_1 \ldots \alpha_\gamma}(\alpha)$ не принадлежит семейству $\mathfrak{D}_\alpha$. Но, с другой стороны, мощность семейства $\{\xi_{\alpha_1 \ldots \alpha_\gamma}\}_{\gamma \in M}$ строго больше $\mathfrak{n}$. Это противоречит условиям теоремы.

Из вышесказанного вытекает, что множество элементов вида $\xi_{\alpha_1 \ldots \alpha_\gamma}$ полностью исчерпывает множество Y. Множество же элементов вида $\xi_{\alpha_1 \ldots \alpha_\gamma}$ имеет мощность не превосходящую $\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}}$.

Из теорем 1 и 2 вытекает теорема Курепы ([5]): *если в топологических пространствах* X_α *всякая дизъюнктная система открытых множеств имеет мощность, не превосходящую* $\mathfrak{m}$, *то всякая дизъюнктная система открытых множеств пространства* $\prod_\alpha X_\alpha$ *имеет мощность, не превосходящую* $2^{\mathfrak{m}}$. В [10] показано, что оценка теоремы 2 точная.

§ 3. Условия независимости функций от координат. Под локальным псевдовесом топологического пространства X будем понимать такое наименьшее кардинальное число $\mathfrak{m}$, что для любой точки x пространства X существует система открытых множеств $\{G_\alpha\}$ мощности $\leqslant \mathfrak{m}$, которая в пересечении дает ровно одну точку x.

Пусть $f\colon \prod_\alpha X_\alpha \to Y$ — некоторое отображение. Будем говорить, что отображение f не зависит в точке ξ от индекса α, если для любой другой точки η, у которой все координаты $\eta(\beta)$ с индексом, отличным от индекса α, совпадают с соответствующими координатами точки ξ, имеет место: $f(\xi) = f(\eta)$.

Предложение 3.1. *Пусть отображение* $f\colon \prod_\alpha X_\alpha \to Y$ *является непрерывным отображением, а* Z_α — *множество всех точек пространства* $\prod_\alpha X_\alpha$, *в которых отображение* f *не зависит от индекса* α. *Если пространство* Y *хаусдорфово, то множество* Z_α *замкнуто.*

Доказательство. Пусть ξ — некоторая точка, принадлежащая границе множества Z, т. е. $\xi \in [Z_\alpha] \setminus Z_\alpha$. Легко видеть, что всякая другая точка, у которой все координаты кроме координаты с индексом α совпадают с соответствующими координатами точки ξ, тоже принадлежит границе множества Z_α. Пусть же η — такая точка, причём $f(\xi) \neq f(\eta)$. Так как пространство Y является хаусдорфовым, то существуют окрестности точек $f(\xi)$ и $f(\eta)$ с пустым пересечением. Обозначим их через O_1 и O_2 соответственно. Можно считать, что существуют окрестности вида:

$$\xi \in O_\alpha \times \prod_{\beta \in Б} O_\beta \times \prod_{\beta \notin Б \cup \alpha} X_\beta \subset f^{-1} O_1,$$

$$\eta \in O'_\alpha \times \prod_{\beta \in Б} O'_\beta \times \prod_{\beta \notin Б \cup \alpha} X_\beta \subset f^{-1} O_2, \qquad |Б| < \aleph_0.$$

Поскольку для любого индекса $\beta \neq \alpha$ имеет место: $\xi(\beta) = \eta(\beta)$, то можно считать, что $O'_\beta = O_\beta$, $\beta \in Б$, $O_\alpha \cap O'_\alpha = \wedge$. Так как точка ξ принадлежит границе множества Z_α, то существует точка $\xi' \in O_\alpha \times \prod_{\beta \in Б} O_\beta \times \prod X_\beta \cap Z_\alpha$. Тогда существует точка η', для которой $f(\xi') = f(\eta')$, $\eta' \in O'_\alpha \times \prod_{\beta \in Б} O_\beta \times \prod X_\beta \cap Z_\alpha$, а это значит что $f^{-1}O_1 \cap f^{-1}O_2 \neq \wedge$.

Предложение 3.2. *Пусть отображение $f\colon \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \to Y$ непрерывно, а локальный псевдовес пространства Y не превосходит $\mathfrak{m}$. Тогда для любой точки ξ пространства $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ семейство всех тех множеств $\prod_\alpha X_\alpha \setminus Z_\alpha$, которые содержат точку ξ, имеет мощность, не превосходящую $\mathfrak{m}$.*

Доказательство. Пусть точка ξ принадлежит пространству $\prod_\alpha X_\alpha$, а $y = f\xi$. Для точки y существует семейство открытых множеств $\{G_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$, содержащих точку y, причём мощность семейства не превосходит $\mathfrak{m}$, а пересечение всех множеств из этого семейства состоит ровно из одной точки y. Так как отображение f является непрерывным, то множества $f^{-1}G_\gamma$ являются открытыми множествами, причём точка ξ принадлежит множествам $f^{-1}G_\gamma$. Через $H_Б^\xi$ обозначим множество всех точек η пространства $\prod_\alpha X_\alpha$, таких что для любого индекса $\alpha \in Б$ имеет место: $\eta(\alpha) = \xi(\alpha)$. В силу определения топологии в произведении пространств для каждого индекса $\gamma \in \Gamma$ существует конечное множество $Б_\gamma$, лежащее в множестве A, для которого $H_{Б_\gamma}^\xi \subset f^{-1}G_\gamma$. Следовательно, $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} H_{Б_\gamma}^\xi \subset \bigcap_{\gamma \in \Gamma} f^{-1}G_\gamma$. Через $Б$ обозначим объединение $\bigcup_{\alpha \in \Gamma} Б_\gamma$. Тогда $H_Б^\xi \subset \bigcap_{\gamma \in \Gamma} f^{-1}G_\gamma = f^{-1}f\xi$, а мощность множества $Б$ не превосходит $\mathfrak{m}$. Легко видеть, что отображение f не зависит от индекса α в точке ξ, если индекс α не принадлежит множеству $Б$. Значит, если точка ξ принадлежит множеству $\prod_\alpha X_\alpha \setminus Z_\alpha$, то индекс α принадлежит множеству $Б$.

Предложение 3.3. *Пусть $f\colon \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \to Y$ — некоторое отображение множества $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ на множество Y. Пусть, далее, существует такое подмножество $Б$ множества A, что для любого индекса α, не принадлежащего множеству $Б$, отображение f не зависит от индекса α в каждой точке ξ пространства $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$. Тогда существует такое отображение g множества $\prod_{\alpha \in Б} X_\alpha$ на множество Y, что $f = g \circ \pi_Б^A$, где $\pi_Б^A$ — проекция множества $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ на его грань $\prod_{\alpha \in Б} X_\alpha$. Если отображение f непрерывно, то и отображение g непрерывно.*

Теорема 3. *Пусть пара $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ является топологическим калибром конечных произведений топологических пространств X_α, отображение $f\colon \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \to Y$*

является непрерывным отображением, а локальный псевдовес пространства Y не превосходит $\mathfrak{m}$. Тогда существует подмножество $Б$ множества A, мощность которого не превосходит $\mathfrak{n}$, а также существует такое отображение g пространства $\prod_{\alpha \in Б} X_\alpha$ на пространство Y, что $f = g \circ \pi_Б^A$, причём g — непрерывное отображение.

Доказательство. По предложению 1.1 множества $\prod_\alpha X_\alpha \setminus Z_\alpha$ являются открытыми множествами. По предложению 1.2 для каждой точки ξ пространства $\prod_\alpha X_\alpha$ семейство всех множеств $\prod_\alpha X_\alpha \setminus Z_\alpha$, содержащих точку ξ, имеет мощность, не превосходящую $\mathfrak{m}$. По теореме 1 пара $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ является топологическим калибром пространства $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$. Следовательно, множество A можно представить в виде объединения $A = \bigcup_{i \in I} A_i$, причём мощность множества I не превосходит $\mathfrak{n}$, а для любых индексов α и β из множества A_i имеет место $Z_\alpha = Z_\beta$. Если множества $\prod_\alpha X_\alpha \setminus Z_\alpha$, $\alpha \in A_i$ непусты, то мощность множества A_i не превосходит $\mathfrak{m}$. Значит, множество всех непустых множеств $\prod_\alpha X_\alpha \setminus Z_\alpha$. имеет мощность, не превосходящую $\mathfrak{n}$. Через $Б$ обозначим множество всех таких индексов $\alpha \in A$, что $\prod_\alpha X_\alpha \setminus Z_\alpha \neq \wedge$. Мощность множества $Б$ не превосходит $\mathfrak{n}$. Ясно, что для любого индекса α, не принадлежащего множеству $Б$ отображение f не зависит от индекса α в каждой точке ξ множества $\prod_{\alpha \in A} X$. По предложению 3.3 существует непрерывное отображение g пространства $\prod_{\alpha \in Б} X_\alpha$ на пространство Y, причём $f = g \circ \pi_Б^A$.

Предложение 3.4. *Если хотя бы для одного сомножителя X_{α_0} имеет место: локальный псевдовес пространства X_{α_0} не превосходит $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{n} \geqslant \aleph_0$ а пара $(\mathfrak{n}, \mathfrak{m})$ не является топологическим калибром пространства X_{α_0}, причём индекс α пробегает множество A, мощность которого строго больше $\mathfrak{m}$, то существует непрерывное отображение f пространства $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ на пространство Y, локальный псевдовес которого не превосходит $\mathfrak{n}$, а отображение f нельзя представить в виде суперпозиции проекции пространства $\prod_\alpha X_\alpha$ на его грань и некоторого отображения этой грани на пространство Y (X_α предполагаются вполне регулярными).'*

Доказательство. Можно считать, что для каждого сомножителя локальный псевдовес не превосходит $\mathfrak{n}$, ибо если это не так, то каждый сомножитель предварительно отобразим на пространство, состоящее более чем из одной точки, а локальный псевдовес которого не превосходит $\mathfrak{n}$.

Пусть в пространстве X_{α_0} существует система открытых множеств, мощность которой строго больше $\mathfrak{m}$, а каждая точка x пространства X_{α_0}

содержится в подсистеме мощности не более $\mathfrak{n}$. Занумеруем эти множества индексами из множества A, т. е. система будет иметь вид: $\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$. В произведении $X_{\alpha_0}\times\prod\limits_{\alpha\in A}X_\alpha$ введём отношение эквивалентности: точки ξ и η пространства $X_{\alpha_0}\times\prod\limits_{\alpha\in A}X_\alpha$ эквивалентны, если $\xi(\alpha_0)=\eta(\alpha_0)$ и для любого индекса $\alpha\in A$, для которого выполняется условие $\xi(\alpha_0)\in G_\alpha$, имеет место $\xi(\alpha)=\eta(\alpha)$. Класс эквивалентных точек является замкнутым множеством. Покажем, что пространство Y в факторной топологии является хаусдорфовым пространством. Пусть даны две различных точки пространства Y. Значит они имеют по представителю ξ и η, причём ξ не эквивалентно η. Это значит, что или $\xi(\alpha_0)\neq\eta(\alpha_0)$, или $\xi(\alpha_0)=\eta(\alpha_0)$, но существует индекс $\alpha\in A$, для которого $\xi(\alpha_0)\in G_\alpha$, а $\xi(\alpha)\neq\eta(\alpha)$. В первом случае существуют непересекающиеся окрестности O_1 и O_2 точек $\xi(\alpha_0)$ и $\eta(\alpha_0)$, соответственно, а, значит, существуют непересекающиеся окрестности точек ξ и η, а именно: $O_1\times\prod\limits_{\alpha\in A}X_\alpha$, $O_2\times\prod\limits_{\alpha\in A}X_\alpha$, являющиеся точными прообразами. Во втором случае существуют непересекающиеся окрестности O_1 и O_2 точек $\xi(\alpha)$ и $\eta(\alpha)$, соответственно, и, значит, окрестности вида: $G_\alpha\times O_1\times\prod\limits_{\gamma\in A\setminus\alpha}X_\gamma$, $G_\alpha\times O_2\times\prod\limits_{\gamma\in A\setminus\alpha}X_\gamma$, являются точными прообразами некоторых непересекающихся окрестностей точек $f\xi$ и $f\eta$ (отображение f — это отображение, порожденное отношением эквивалентности точек пространства $X_{\alpha_0}\times\prod\limits_{\alpha}X_\alpha$).

Докажем теперь, что локальный псевдовес пространства Y не превосходит $\mathfrak{n}$. Пусть точка y принадлежит пространству Y. Для любых точек ξ и η из прообраза $f^{-1}y$ имеет место: $\xi(\alpha_0)=\eta(\alpha_0)$. Через B обозначим множество всех таких индексов α, что $\xi(\alpha_0)$ принадлежит G_α. Тогда для любого индекса α, принадлежащего множеству B, имеет место: $\xi(\alpha)=\eta(\alpha)$. Так как локальный псевдовес всех сомножителей X_α не превосходит $\mathfrak{n}$, а мощность множества B не превосходит $\mathfrak{n}$, то существует семейство мощности $\mathfrak{n}$ открытых множеств, являющихся точными прообразами открытых множеств, пересечение которого в точности равняется $f^{-1}y$. Значит локальный псевдовес Y не превосходит $\mathfrak{n}$.

Предложение 1.4 показывает, что теорема 1 имеет почти окончательную формулировку.

В качестве следствия получаем следующие утверждения:

1. *Если пространство X_α имеют калибр $(\mathfrak{m},\mathfrak{m})$, а локальный псевдовес пространства Y не превосходит $\mathfrak{m}$, то отображение $f\colon\prod\limits_{\alpha\in A}X_\alpha\to Y$ разлагается в композицию проекции $\prod\limits_{\alpha\in A}X_\alpha\to\prod\limits_{\alpha\in B}X_\alpha$, $|B|\leqslant\mathfrak{m}$, и отображения $g\colon\prod\limits_{\alpha\in B}X_\alpha\to Y$.*

2. *Если пространства X_α сепарабельны, а пространство Y с первой аксиомой счётности, то отображение $f\colon\prod X_\alpha\to Y$ разлагается в композицию проекции на счётную грань пространства $\prod X_\alpha$ и отображения этой грани на пространство Y* (см. [16]).

3. *Диадический бикомпакт с первой аксиомой счётности метризуем.*

Последние два следствия основываются на том, что пара $(\aleph_0,\aleph_0)$ является калибром для сепарабельных пространств (см. § 4).

Если пара $(\mathfrak{m},\mathfrak{n})$ является калибром топологического пространства X, то она будет калибром и для любого его открытого подмножества. Исходя из этого замечания, нетрудно убедиться, что предложения 3.1, 3.2, 3.3 и теорема 3 верны и в том случае, когда рассматриваются отображение открытого множества G, лежащего в пространстве $\prod\limits_{\alpha\in A}X_\alpha$, на пространство Y ([16]). В частности, отсюда следует предложение, обобщающее теорему Бокштейна ([15]):

Пусть пара $(\aleph_0,\mathfrak{n})$ является калибром конечных произведений пространств X_α, а G_1 и G_2 — два непересекающиеся открытые множества в произведении $\prod\limits_{\alpha\in A}X_\alpha$. Тогда существует подмножество индексов $B\subset A$, $|B|\leqslant\mathfrak{n}$, такое что $\pi_B^A(G_1)\cap\pi_B^A(G_2)=\Lambda$.

§ 4. Плотность множеств.

Определение 4.1. Пусть X — некоторое множество, $\mathfrak{D}$ — некоторое семейство его подмножеств. Пусть, далее, Y — некоторое подмножество множества X. *Плотностью множества Y относительно семейства* $\mathfrak{D}$ называется такая наименьшая мощность $\mathfrak{m}$, что множество представляется в виде объединения $\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma}Y_\gamma$, причём множества Y_γ принадлежат семейству $\mathfrak{D}$, а мощность множества Γ не превосходит $\mathfrak{m}$.

Далее будем всегда предполагать, что вместе с каждым множеством семейство $\mathfrak{D}$ содержит и каждое его подмножество.

Предложение 4.1. *Пусть X_α — дискретные двоеточия $X=\prod\limits_{\alpha\in A}^{\mathfrak{m}}X_\alpha$. Если подмножество M пространства X имеет мощность, строго меньшую $\mathfrak{m}$, то существует дизъюнктная система θ окрестностей, содержащих ровно по одной точке множества M, причём $|A(\sigma)|\leqslant|M|$, для любого $\sigma\in\theta$.*

Теорема 4. *Пусть плотность множества X_α относительно семейства $\mathfrak{D}_\alpha$ не превосходит $\mathfrak{m}\geqslant\aleph_0$, индекс α пробегает множество B мощности $2^{\mathfrak{r}}$, $\mathfrak{r}\geqslant\aleph_0$. Через s обозначим число $\sum\limits_{\mathfrak{k}<\mathfrak{n}}(\mathfrak{r}\mathfrak{m})^{k}$. Тогда плотность множества $\sum\limits_{\alpha\in B}{}_e^{\mathfrak{n}}X_\alpha$ относительно семейства $\sum\limits_{\alpha\in B}\mathfrak{D}_\alpha$ не превосходит s.*

Доказательство. Каждое пространство X_α является объединением $\bigcup\limits_{\delta\in\Delta}X_\alpha^\delta$, $|\Delta|\leqslant\mathfrak{m}$, $X_\alpha^\delta\in\mathfrak{D}$. Можно считать, что элемент e_α принадлежит каждому множеству X_α^δ. Пусть C_α — дискретное двоеточие, A — множество индексов мощности $\mathfrak{r}$. Тогда множество B равномощно множеству $\prod\limits_{\alpha\in A}C_\alpha$. Введём в множестве $\prod_{\alpha\in A} C_\alpha$ топологию так, чтобы это было пространство $C=\prod^{\mathfrak{n}}_{\alpha\in A} C_\alpha$. Для каждой дизъюнктной системы θ канонических окрестностей в пространстве C, мощность которой равна $\mathfrak{k}<\mathfrak{n}$, а $|A(\sigma)|\leqslant k$, если $\sigma\in\theta$, рассмотрим семейство Φ_θ всех отображений $C\to\Delta$, постоянных на каждой окрестности из системы θ и на их дополнении. Мощность семейства Φ_θ не превосходит $\mathfrak{m}^{\mathfrak{k}}$. Через Φ обозначим объединение всех Φ_θ, когда θ пробегает множество всех дизъюнктных систем канонических окрестностей, причём, мощность этих систем строго меньше $\mathfrak{n}$, а $|A(\sigma)|\leqslant\mathfrak{k}<\mathfrak{n}$, если $\sigma\in\theta$. Мощность множества Φ не превосходит $\mathfrak{s}_{\mathfrak{n}}$. Через X^φ обозначим множество $\prod_{\alpha\in C} X_\alpha^{\varphi(\alpha)}\cap\sum^{\mathfrak{n}}_{e\,\alpha\in C=Б} X_\alpha\subset\sum^{\mathfrak{n}}_{e\,\alpha\in C} X_\alpha$. Из определения следует, что $X^\varphi\in\sum_{\alpha\in Б} D_\alpha$. Докажем, что $\bigcup_{\varphi\in\Phi} X^\varphi=\sum^{\mathfrak{n}}_{e\,\alpha\in Б} X_\alpha$. Пусть ξ — произвольный элемент множества $\sum^{\mathfrak{n}}_{e\,\alpha\in Б} X_\alpha$. Имеем: $|A(\xi)|<\mathfrak{n}$. В силу предложения 4.1 существует такая дизъюнктная система θ канонических окрестностей, что каждая окрестность содержит ровно один элемент из множества $A(\xi)$. Рассмотрим следующую функцию $\varphi\in\Phi_\theta$. Если $\alpha\in\sigma\in\theta$, то существует такое $\alpha'\in\sigma$, что $\alpha'\in A(\xi)$, тогда существует и такое $\delta\in\Delta$, что $\xi(\alpha')\in X^\delta_{\alpha'}\in\mathfrak{D}_{\alpha'}$. Положим в этом случае $\varphi(\alpha)=\delta$. Если α не принадлежит ни одному из $\sigma\in\theta$, то пусть $\varphi(\alpha)$ равно некоторому (одному и тому же) значению. Теперь уже легко видеть, что $\xi\in X^\varphi$. Теорема доказана.

Предложение 4.2. *Пусть X — некоторое множество, $\mathfrak{D}$ — семейство его подмножеств. Если всякое подмножество Y множества X, мощность которого не превосходит $\mathfrak{m}$, но строго больше $\mathfrak{n}$, имеет плотность строго меньшую чем мощность множества Y, то пара $(\mathfrak{n},\mathfrak{n})$ является калибром множества X относительно семейства $\mathfrak{D}$, где $\mathfrak{n}$ — любое кардинальное число меньше $\mathfrak{m}$ и бесконечное.*

Теорема 5. *Пусть X_α — некоторые множества, $\mathfrak{D}_\alpha$ — семейства подмножеств, причём всякое подмножество Y мощности $>\mathfrak{m}$ множества X_α имеет плотность строго меньшую чем мощность множества Y. Тогда для множества $\sum^{\mathfrak{k}}_{\alpha\in A} X_\alpha$, где мощность множества A строго меньше $\mathfrak{k}$, калибрами будут являться пары $(\mathfrak{m},\mathfrak{m})$, где $\mathfrak{m}\geqslant\mathfrak{k}$ и регулярное* (7).

Доказательство. Пусть $\mathfrak{m}$ — кардинальное число $\geqslant\mathfrak{k}$, и Y — некоторое подмножество множества $\sum^{\mathfrak{k}}_{e\,\alpha\in A} X_\alpha$, удовлетворяющее условию: если Y' — подмножество множества Y, одновременно являющееся элементом семейства $\mathfrak{D}$, то мощность множества не превосходит $\mathfrak{m}$. Допустим, что мощность множества равна $\mathfrak{m}'$, тогда для любого индекса $\alpha\in A$ выполняется неравенство: мощность множества $\prod_\alpha(Y)$ не превосходит $\mathfrak{m}'$, где $\mathfrak{m}'$ — следующая за $\mathfrak{m}$ мощность. Следовательно, плотность множеств $\prod_\alpha(Y)$ не превосходит $\mathfrak{m}$.

(7) В предложении обобщенное гипотезы континуума.

Если число $\mathfrak{k}$ непредельное, то плотность множества Y не превосходит $(\mathfrak{k}_1\cdot\mathfrak{m})^{\mathfrak{k}_1}$, $\mathfrak{k}_1<\mathfrak{k}$ а, значит, и мощность множества Y не превосходит $\mathfrak{m}$ (8). Если же число $\mathfrak{k}$ предельное, но регулярное, то имеет место: существует число $\mathfrak{k}_1<\mathfrak{k}$, для которого $\sum^{\mathfrak{k}}_e X_\alpha=\sum^{\mathfrak{k}_1}_e X_\alpha$. Плотность множества Y не превосходит $(\mathfrak{k}_1\cdot\mathfrak{m})^{\mathfrak{k}_1}$, но $\mathfrak{m}^{\mathfrak{k}_1}=\mathfrak{m}$ (8). Значит мощность множества Y не превосходит $\mathfrak{m}$.

Предложение 4.3. *Топологическое пространство имеет плотное множество M, мощность которого не превосходит $\mathfrak{m}$ тогда и только тогда, когда множество всех открытых множеств имеет плотность, не превосходящую $\mathfrak{m}$, относительно семейства множеств открытых множеств с непустым пересечением.*

Из теоремы 4 и предложения 4.3 вытекает следующее предложение (см. [6], [7], [8]):

Если плотность топологических пространств X_α не превосходит $\mathfrak{m}$, а мощность множества индексов не превосходит $2^{\mathfrak{m}}$, то плотность тихоновского произведения $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ не превосходит $\mathfrak{m}$.

Предложение 4.4. *Пусть топологические пространства X_α имеют плотные подмножества M_α, мощность которых не превосходит $\mathfrak{m}$, а индекс α пробегает множество A мощности $2^{\mathfrak{k}}$. Тогда в пространстве $\prod^{\mathfrak{n}}_{\alpha\in A} X_\alpha$ имеется плотное множество M, мощность которого не превосходит $\sum\{(\mathfrak{k}\cdot\mathfrak{m})^{\mathfrak{r}}\colon\ \mathfrak{r}<\mathfrak{n}\}$.*

§ 5. Локально конечные дискретные системы множеств.

Определение 5.1. *Пусть Y — подмножество $\sum^{\mathfrak{m}}_{e\,\alpha\in A} X_\alpha$, ω — наименьшее порядковое число, мощность которого равна $\mathfrak{m}$. Если существует порядковое число $\beta<\omega$ и для каждого элемента ξ множества Y существует функция $\varphi_\xi\colon(1,\beta)\to A(\xi)$, удовлетворяющие следующим условиям: для любых двух элементов $\xi_1,\eta\in Y$, $\xi\neq\eta$, существует порядковое число $\pi<\beta$, такое что $\varphi_\xi(\varrho)=\varphi_\eta(\varrho)$ для любого $\varrho\leqslant\pi$ и $\xi\big(\varphi_\xi(\varrho)\big)=\eta\big(\varphi_\eta(\varrho)\big)$ для любого $\varrho<\pi$, а $\xi\big(\varphi_\xi(\pi)\big)\neq\eta\big(\varphi_\eta(\pi)\big)$, тогда множество Y называется рассыпанным.*

Теорема 6. *Пусть Y — некоторое подмножество множества $\sum^{\mathfrak{m}}_{e\,\alpha\in A} X_\alpha$, такое что всякое звёздное подмножество* (см. определение 2.4) *множества Y имеет мощность не большую, чем $\mathfrak{n}$. При этих условиях множество Y можно представить в виде объединения $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} Y_\gamma$ рассыпанных множеств Y_γ, причём мощность множества Γ не превосходит $\sum\{\mathfrak{n}^{\mathfrak{k}}\colon\ \mathfrak{k}<\mathfrak{m}\}$.*

Доказательство. Для любого элемента ξ множества Y существует кардинальное число $\mathfrak{k}<\mathfrak{m}$, такое что $|A(\xi)|\leqslant\mathfrak{k}$. Следовательно, множество Y

(8) См., например, [18], стр. 167.

можно представить в виде объединения $Y = \bigcup_{\mathfrak{t}<\mathfrak{m}} Y_{\mathfrak{t}}$, причём для любого элемента $\xi \in Y_{\mathfrak{t}}$ имеет место: $|A(\xi)| = \mathfrak{t}$. Достаточно показать, что множество $Y_{\mathfrak{t}}$ можно представить в виде объединения $Y_{\mathfrak{t}} = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} Y_{\mathfrak{t}}^{\gamma}$, где множества $Y_{\mathfrak{t}}^{\gamma}$ рассыпанные, а мощность множества Γ не превосходит $\mathfrak{n}^{\mathfrak{t}}$. Чтобы не загромождать текста обозначениями, мы множество $Y_{\mathfrak{t}}$ опять будем обозначать через Y.

Пусть Y_0 — максимальное дизъюнктное подмножество множества Y. Множество Y_0 является звездным и, следовательно, его мощность не превосходит $\mathfrak{n}$. Тогда мощность множества $\bigcup\{A(\xi)\colon \xi\in Y_0\}$ не превосходит $\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{t}$. Тогда для любого другого элемента η из множества Y множество $A(\eta)$ пересекается с множеством $\bigcup\{A(\xi)\colon \xi \in Y_0\}$. Следовательно, множество Y можно представить в виде объединения $Y=\bigcup\{Y_\gamma\colon \gamma\in\Gamma\}$, где Γ имеет мощность $\leqslant \mathfrak{n}\cdot\mathfrak{t}$, причём $B_\gamma = \ker Y_\gamma \neq \bigwedge$. Далее, каждое множество Y_γ можно представить в виде объединения $Y_\gamma = \bigcup_\delta Y_\gamma^\delta$, где каждое множество $Y_\gamma^\delta \neq \bigwedge$ и тривиально на множестве β_γ. Пусть $Y_{\gamma,0}^\delta$ — максимальное квазидизъюнктное подмножество множества Y_γ^δ, такое что $\ker Y_\gamma = \ker Y^\delta_{\gamma,0}$, (9). Поскольку множество $Y^{\delta'}_{\gamma,0}$ есть подмножество тривиального множества Y^δ_γ, то множество $Y^\delta_{\gamma,0}$ — звёздное и, следовательно, мощность его не превосходит $\mathfrak{n}$. Значит мощность множества $\bigcup\{A(\xi)\colon \xi\in Y^\delta_{\gamma,0}\}$ не превосходит $\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{t}$. Каждое множество Y^δ_γ можно представить в виде объединения $Y^\delta_\gamma = \bigcup\{Y^\delta_{\gamma\gamma_1}\colon \gamma_1\in\Gamma\}$, причём мощность множества Γ не превосходит $\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{t}$ и выполнены условия: $B^\delta_{\gamma\gamma_1}\setminus B_\gamma\neq\bigwedge$, где $B^\delta_{\gamma\gamma_1} = \ker Y^\delta_{\gamma\gamma_1}$. Множество $Y^\delta_{\gamma\gamma_1}$ тоже будет тривиальным на множестве B_γ. Положим $Y_{\gamma\gamma_1} = \bigcup_\delta Y^\delta_{\gamma\gamma_1}$.
Определим функцию φ_ξ^2 для произвольного элемента ξ из множества $Y_{\gamma\gamma_1}$, определённую на отрезке порядковых чисел $[1, 2]$ со значениями в множестве $A(\xi)$, следующим образом: $\varphi_\xi(1)\in B_\gamma$; если $\xi\in Y^\delta_{\gamma\gamma_1}$, то $\varphi_\xi(2)\in B^\delta_{\gamma\gamma_1}\setminus B_\gamma$. Функция φ_ξ определена неоднозначно, но мы возьмем какую нибудь функцию, удовлетворяющую вышеуказанным условиям.

Далее проведём доказательство по трансфинитной индукции по числу β. Пусть построены множества $Y^{\delta_1,\ldots,\delta_\sigma,\ldots}_{\gamma_1,\ldots,\gamma_\sigma,\ldots,\gamma_\alpha}$ (индекс σ в верху пробегает все значения $<\alpha$) для любого порядкового числа $\alpha<\beta$, удовлетворяющие следующим условиям. Каждый индекс γ_σ пробегает множество Γ, мощность которого не превосходит $\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{t}$. Для любого числа $\sigma<\alpha$ выполняется равенство:

$$Y^{\delta_1,\ldots}_{\gamma_1,\ldots,\gamma_\sigma} = \bigcup Y^{\delta_1,\ldots,\delta_\sigma,\ldots}_{\gamma_1,\ldots,\gamma_\sigma,\ldots,\gamma_\alpha}$$

(суммирование по всем индексам невходящим в левую часть). Для каждого элемента $\xi\in Y$ построена взаимно-однозначная функция $\varphi^\alpha_\xi\colon[1, \alpha]\to A(\xi)$,

(9) Если такого $Y^\delta_{\gamma,0}$ не существует, то за $Y^\delta_{\gamma,0}$ примем произвольное одноэлементное подмножество из Y^δ_γ.

такая что, если элементы ξ и η принадлежат множеству $Y^{\delta_1,\ldots}_{\gamma_1,\ldots,\gamma_\alpha}$, то выполнены равенства:

$$\varphi^\alpha_\xi(\pi)=\varphi^\alpha_\eta(\pi) \quad \text{для любого} \quad \pi\leqslant\alpha,$$
$$\xi(\varphi^\alpha_\xi(\pi)) = \eta(\varphi^\alpha_\eta(\pi)) \quad\text{для любого}\quad \pi<\alpha,$$

если $\alpha_1<\alpha_2$, то $\varphi^{\alpha_1}_\xi$ и $\varphi^{\alpha_2}_\xi$ совпадают на общей части области определения.
Если число β предельное, то через Y' обозначим пересечение $\bigcap_{\alpha<\beta} Y^{\delta_1,\ldots}_{\gamma_1,\ldots,\gamma_\alpha}$; φ^β_ξ определяется очевидным образом на $[1, \beta)$. Тогда для любых элементов ξ и η из множества Y' и любого числа $\pi<\beta$ будем иметь:

$$\varphi^\beta_\xi(\pi)=\varphi^\eta_\xi(\pi), \quad \xi(\varphi^\beta_\xi(\pi))=\eta(\varphi^\beta_\eta(\pi)).$$

Пусть Y_0 — максимальное квазидизъюнктное подмножество множества Y', удовлетворяющее условию $\ker Y_0 = \varphi^\beta_\xi([1, \beta))$ (10). Легко видеть, что множество Y_0 является звёздным, и, следовательно, мощность его не превосходит $\mathfrak{n}$. Значит множество Y' можно представить в виде объединения $Y'=\bigcup_{\gamma_\beta\in\Gamma} Y'_{\gamma_\beta}$, причём мощность множества Γ не превосходит $\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{t}$, а $\ker Y'_{\gamma_\beta}\setminus\varphi^\beta_\xi([1, \beta))\neq\bigwedge$, где ξ — некоторый элемент множества Y'_{γ_β}.
Положим $\varphi^\beta_\xi(\beta)\in\ker Y'_{\gamma_\beta}\setminus\varphi_\xi([1, \beta),)$ где $\xi\in Y'_{\gamma_\beta}$ $Y^{\delta_1,\ldots}_{\gamma_1,\ldots,\gamma_\beta} = Y'_{\gamma_\beta}$.
Если число β непредельное, т. е. $\beta=\beta_1+1$, то через Y' обозначим множество $Y^{\delta_1,\ldots}_{\gamma_1,\ldots,\gamma_{\beta_1}}$. Множество Y' можно представить в виде объединения $Y'=\bigcup Y^{\delta\beta_1}$, причём для любых элементов ξ и η из множества $Y^{\delta\beta_1}$ имеет место: $\xi(\varphi_\xi(\beta_1))=\eta(\varphi_\eta(\beta_1))$ (причём если $Y'\neq\bigwedge$, то и все $Y^{\delta\beta_1}\neq\bigwedge$).
Пусть $Y_0^{\delta\beta_1}$ — максимальное квазидизъюнктное подмножество (10) множества $Y^{\delta\beta_1}$, удовлетворяющее условию: $\ker Y_0^{\delta\beta_1} = \varphi_\xi(]1, \beta_1])$. Опять легко заметить, что множество $Y_0^{\delta\beta_1}$ является звёздным, а, значит, мощность его не превосходит $\mathfrak{n}$. Тогда множество $Y^{\delta\beta_1}$ можно представить в виде объединения $\bigcup_{\gamma_\beta\in\Gamma} Y^{\delta\beta_1}_{\gamma_\beta}$, причём мощность множества Γ не превосходит $\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{t}$, а $\ker Y^{\delta\beta_1}_{\gamma_\beta}\setminus\varphi_\xi([1, \beta))\neq\bigwedge$. Положим

$$\varphi_\xi(\beta)\in\ker Y^{\delta\beta_1}_{\gamma_\beta}\setminus\varphi_\xi([1, \beta)),\qquad Y^{\delta_1,\ldots,\delta\beta_1}_{\gamma_1,\ldots,\gamma_{\beta_1},\gamma_\beta} = Y^{\delta\beta_1}_{\delta\beta}.$$

Итак, множества $Y^{\delta_1,\ldots}_{\gamma_1,\ldots,\gamma_\alpha}$ построены для любого порядкового числа α. Пусть ω — наименьшее порядковое число, мощность которого строго больше $\mathfrak{t}$. Положим, далее, $Y^{\delta_1,\ldots,\delta_\alpha,\ldots}_{\gamma_1,\ldots,\gamma_\alpha,\ldots} = \bigcap_{\alpha<\omega} Y^{\delta_1,\ldots}_{\gamma_1,\ldots,\gamma_\alpha}$. Для любого такого множества $Y^{\delta_1,\ldots,\delta_\alpha,\ldots}_{\gamma_1,\ldots,\gamma_\alpha,\ldots}$ существует порядковое число $\beta<\omega$, такое что множество $Y^{\delta_1,\ldots}_{\gamma_1,\ldots,\gamma_\beta}$ уже состоит из одного элемента. Следовательно, семейство всех множеств вида $Y^{\delta_1,\ldots,\delta_\alpha,\ldots}_{\gamma_1,\ldots,\gamma_\alpha,\ldots}$ можно разбить по этому признаку на классы Z_β, $\beta<\omega$. Другими словами, если множество $Y^{\delta_1,\ldots,\delta_\alpha,\ldots}_{\gamma_1,\ldots,\gamma_\alpha,\ldots}$ принадлежит классу Z_β, то

(10) Если Y_0 не существует, то берем в качестве Y_0 произвольное одноэлементное подмножество из Y'. Аналогично для множества $Y_0^{\delta\beta_1}$

множество $Y^{\delta_1,\ldots}_{\gamma_1,\ldots,\gamma_\beta}$ состоит из одного элемента. Для каждого $\beta < \omega$ положим:

$${}^{\beta}Y_{\gamma_1,\ldots,\gamma_\beta} = \bigcup\{Y^{\delta_1,\ldots}_{\gamma_1,\ldots,\gamma_\beta} \in Z_\beta\}\,.$$

Легко заметить, что множество ${}^{\beta}Y_{\gamma_1,\ldots,\gamma_\beta}$ является рассыпанным, а все такие множества образуют семейство, мощность которого не превосходит $(\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{k})^{\mathfrak{k}} = \mathfrak{n}^{\mathfrak{k}}$. Тем самым теорема доказана.

Предложение 5.1. *Пусть X_a некоторые множества, а Y_a — такие семейства подмножеств X_a, что $X_a \in Y_a$, и пусть $e(a) = X_a$. Пусть, далее, $X = \prod\limits_a X_a$, $Y = \sum_e^{\mathfrak{m}} Y_a$. Если подмножество Z множества Y удовлетворяет условию, что для любого элемента ξ из множества X множество всех элементов z, принадлежащих множеству Z и содержащих элемент ξ, имеет мощность, не превосходящую $\mathfrak{n}$, то всякое звёздное подмножество Z_1 множества Z имеет мощность, не превосходящую $\mathfrak{n}$.*

Предложение 5.2. *Пусть X_a — некоторые множества, Y_a — семейства подмножеств, причём для любого элемента x из множества X_a мощность множества всех элементов семейства Y_a содержащих элемент x, не превосходит $\mathfrak{n}$. Если подмножество Y множества $\sum\limits_a{}_e^{\mathfrak{m}} Y_a^{\,i}$ является рассыпанным, то для любого элемента $\{x_a\}$ из множества $\prod\limits_a X_a$ мощность всех элементов множества Y, содержащих элемент $\{x_a\}$, не превосходит $\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_1}$, где $\mathfrak{m}_1$ — некоторая мощность меньшая $\mathfrak{m}$.*

Доказательство. По определению 5.1. существует порядковое число $\beta < \omega$, мощность числа β меньше $\mathfrak{m}$, а для любого элемента ξ из множества Y существует функция $\varphi_\xi\colon [1,\beta) \to A(\xi)$, причём, если $\xi, \eta \in Y$, $\xi \neq \eta$, то существует число $\pi \in [1,\beta)$, такое что $\varphi_\xi(\varrho) = \varphi_\eta(\varrho)$ для всех $\varrho \leqslant \pi$, $\xi(\varphi_\xi(\varrho)) = \eta(\varphi_\eta(\varrho))$ для всех $\varrho < \pi$ и $\xi(\varphi_\xi(\pi)) \neq \eta(\varphi_\eta(\pi))$. Это значит, что для всех элементов ξ и η из множества Y $\varphi_\xi(1) = \varphi_\eta(1)$. Пусть x — некоторый элемент множества $\prod\limits_a X_a$. Можно считать, что все элементы ξ множества Y содержат элемент x. Тогда для любого индекса a имеем: $\xi(a) \ni x(a)$ для любого элемента ξ множества Y. Множество Y можно представить в виде объединения $\bigcup\limits_{\delta\in\Delta} Y_\delta$, где мощность множества Δ не превосходит $\mathfrak{n}$, а для любых элементов ξ и η множества Y_{δ_1} имеет место $\xi(\varphi_\xi(1)) = \eta(\varphi_\xi(1))$. Рассмотрим множество Y_{δ_1}. Ясно, что для любых элементов ξ и η множества Y_{δ_1} имеет место $\varphi_\xi(2) = \varphi_\eta(2)$. Тогда множество Y_{δ_1} можно представить в виде объединения $\bigcup\{Y_{\delta_1\delta_2}\colon \delta_2 \in \Delta\}$, причём для любых элементов ξ и η из множества Y_{δ_1,δ_2} имеет место $\xi(\varphi_\xi(2)) = \eta(\varphi_\eta(2))$. Пусть построены множества $Y_{\delta_1,\ldots,\delta_\gamma}$, $\gamma < \varepsilon < \beta$, причём для любых элементов ξ и η из множества $Y_{\delta_1,\ldots,\delta_\gamma}$ и любого $\tau \leqslant \gamma$ имеет место $\varphi_\xi(\tau) = \varphi_\eta(\tau)$, $\xi(\varphi_\xi(\tau)) = \eta(\varphi_\eta(\tau))$. Тогда будет иметь место следующее равенство: $\varphi_\xi(\gamma+1) = \varphi_\eta(\gamma+1)$. Положим $Y_{\delta_1,\ldots,\delta_\gamma} = \bigcap\limits_{\gamma<\varepsilon} Y_{\delta_1,\ldots,\delta_\gamma}$. Если $\xi, \eta \in Y_{\delta_1,\ldots,\delta_\gamma}$, $\gamma < \varepsilon$, то $\varphi_\xi(\varepsilon) = \varphi_\eta(\varepsilon)$. Множество $Y_{\delta_1,\ldots,\delta_\gamma}$ тоже можно представить в виде объединения $\{Y_{\delta_1,\ldots,\delta_\varepsilon}\colon \delta_\varepsilon \in \Delta\}$, причём для любых элементов ξ и η из множества $Y_{\delta_1,\ldots,\delta_\varepsilon}$ имеет место $\xi(\varphi_\xi(\varepsilon)) = \eta(\varphi_\eta(\varepsilon))$. Далее, ясно, что множество $Y_{\delta_1,\ldots,\delta_\gamma,\ldots}$, $\gamma < \beta$, состоит не более, чем из одного элемента. Значит мощность множества Y не превосходит $\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}_1}$, где $\mathfrak{m}_1$ — мощность порядкового числа β.

Предложение 5.3. *Пусть X_a — некоторые множества, Y_a — дизъюнктные семейства. Если подмножество Y множества $\sum\limits_a{}_e^{\mathfrak{m}} Y_a$ является рассыпанным, то множество Y — дизъюнктно.*

Доказательство. Следствие из 5.2, т. к. $1^{\mathfrak{m}} = 1$.

Предложение 5.4. *Пусть X_a — топологические пространства, Y_a — локально конечные семейства открытых множеств. Пусть Y — рассыпанное подмножество множества $\sum\limits_a{}_e^{\aleph} Y_a$, где $e(a) = X_a$. Тогда множество Y тоже является локально конечным.*

Доказательство. Существует целое число N и функции $\varphi_\xi\colon [1,N] \to A(\xi)$ в соответствии с определением. Пусть x — точка пространства $\prod\limits_a X_a$. Для любых элементов ξ и η множества Y имеет место $\varphi_\xi(1) = \varphi_\eta(1) = a_1$. Существует окрестность O_{a_1} точки $x(a_1)$, которую пересекает лишь конечное число множеств вида $\xi(a_1)$, $\xi \in Y$. Множество Y можно представить в виде объединения конечного числа множеств Y_i, причём, для любого элемента ξ из множества Y_1 имеет место $\xi(a_1) \cap O_{a_1} = \wedge$, а для любых элементов ξ, η из множества Y_i, $i \neq 1$, имеет место $\xi(a_1) = \eta(a_1)$. Тогда для любого $i \neq 1$ и для любых элементов ξ, η из множества Y_i имеем: $\varphi_\xi(2) = \varphi_\eta(2) = a_2^i$. Существует окрестность $O_{a_2^i}$ точки $x(a_2^i)$, пересекающая всего лишь конечное множество элементов множества Y_i. Далее доказательство нужно проводить по индукции по номеру шага, число шагов не превосходит N.

Пусть множество Y представлено в виде объединения

$$Y_1 \cup \bigcup_{i_1\geqslant 2} Y_{i_1,1} \cup \ldots \cup \bigcup_{i_1\geqslant 2,\ldots,i_{k-1}\geqslant 2,\, i_k>1} Y_{i_1,\ldots,i_{k-1},i_k}\,,$$

каждый индекс i_s принимает лишь конечное число значений, $k \leqslant N$. Пусть, при этом, выполнены условия: если $\xi, \eta \in Y_{i_1,\ldots,i_s}$, $i_r \geqslant 2$, $r \leqslant s$, $\varphi_\xi(r) = \varphi_\eta(r)$ и $\xi(\varphi_\xi(r)) = \eta(\varphi_\eta(r))$; если $\xi \in Y_{i_1,\ldots,i_{s1}}$, то $\xi(\varphi_\xi(s)) \cap O_{\varphi_\xi(s)} = \wedge$, $O_{\varphi_\xi(s)} \ni x_{\varphi_\xi(s)}$. Если $k < N$, то каждое множество $Y_{i_1,\ldots,i_k}$, $i_s \neq 1$, представляется в виде объединения множеств $Y_{i_1,\ldots,i_k,i_{k+1}}$, причём, если $i_{k+1} = 1$, а $\xi \in Y_{i_1,\ldots,i_k,i_{k+1}}$, то $\xi(\varphi_\xi(k+1)) \cap O_{\varphi_\xi(k+1)} = \wedge$. А если же $i_{k+1} \neq 1$, $\xi, \eta \in Y_{i_1,\ldots,i_{k+1}}$, то $\varphi_\xi(k+1) = \varphi_\eta(k+1)$ и $\xi(\varphi_\xi(k+1)) = \eta(\varphi_\eta(k+1))$. Если $k = N$, то множество индексов $\{\varphi_\xi(s)\colon \xi \in Y_{i_1,\ldots,i_s},\ s < N,\ i_s \neq 1\}$ определяет окрестность, пересекающую только конечное множество элементов множества Y.

Предложение 5.5. *Пусть X_a — топологические пространства, Y_a — дискретные семейства открытых множеств, $e(a) = X_a$. Если подмножество Y*

множества $\sum_{\alpha}^{\mathfrak{m}}{}_{e}\, Y_\alpha$ *является рассыпанным, то множество* Y *является дискретным семейством пространства* $\prod_\alpha^{\mathfrak{m}} X_\alpha$.

Доказательство. Существует порядковое число β, мощность которого строго меньше $\mathfrak{m}$, и функции $\varphi_\xi\colon [1, \beta) \to A(\xi)$ удовлетворяющие условиями определения. Пусть точка x принадлежит пространству $\prod_\alpha^{\mathfrak{m}} X_\alpha$. Для любого индекса α существует окрестность точки $O_\alpha \ni x_\alpha$, которая пересекается не более, чем с одним элементом множества Y_α, а именно, с элементом $y_\alpha \in Y_\alpha$. Для любых элементов ξ и η множества Y имеет место $\varphi_\xi(1) = \varphi_\eta(1) = \alpha_1$. Через Y_1 обозначим множество всех элементов ξ множества Y, для которых $\xi(\alpha_1) = y_{\alpha_1}$. Для любых элементов ξ и η множества Y_1 имеет место $\varphi_\xi(2) = \varphi_\eta(2) = \alpha_2$. Через Y_2 обозначим множество всех элементов ξ множества Y_1, для которых $\xi(\alpha_2) = y_{\alpha_2}$. Пусть построены индексы α_γ и множества Y_γ для любого порядкового числа $\gamma < \varepsilon < \beta$, удовлетворяющие условиям: $Y_\gamma \supset Y_{\gamma'}$, если $\gamma' > \gamma$; для любого элемента ξ из множества Y_γ и любого числа $\delta < \gamma$ имеет место $\varphi_\xi(\delta) = \alpha_\delta$, $\xi(\alpha_\delta) = y_{\alpha_\delta}$. Положим $Y_\varepsilon^* = \bigcap_{\gamma<\varepsilon} Y_\gamma$. Тогда для любых элементов ξ и η множества Y_ε^* имеет место $\varphi_\xi(\varepsilon) = \varphi_\eta(\varepsilon) = \alpha_\varepsilon$. Через Y_ε обозначим множество всех тех элементов ξ множества Y_ε^*, для которых $\xi(\alpha_\varepsilon) = y_{\alpha_\varepsilon}$. Тогда индексы α_ε и множества Y_ε можно построить для любого числа $\varepsilon < \beta$. Пусть $O(x) = \prod_{\varepsilon<\beta} O_{\alpha_\varepsilon} \times \prod X_\alpha$, это окрестность точки x. Ясно, что окрестность $O(x)$ пересекает не более, чем один элемент множества Y, а именно, элемент ξ, принадлежащий пересечению $\bigcap_{\varepsilon<\beta} Y_\varepsilon$.

Предложение 5.6. *Пусть* X_α — *топологические пространства,* Y_α — *локально конечные системы открытых множеств,* $e(\alpha) = X_\alpha$. *Пусть* Y — *такое подмножество множества* $\sum_\alpha^{\aleph_0}{}_e\, Y_\alpha$, *что каждая точка* x *пространства содержится не более, чем в множестве мощности* $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$, *элементов* ξ *множества* Y. *Тогда множество* Y *можно представить в виде объединения* $\bigcap_{\gamma\in\Gamma} Y_\gamma$, *мощность множества* Γ *не превосходит* $\mathfrak{m}$, *а каждое множество* Y_γ *является локально конечной системой пространства* $\prod_\alpha^{\aleph_0} X_\alpha$.

Доказательство. Из предложения 5.1 вытекает, что всякое звёздное подмножество Y' множества Y имеет мощность, не превосходящую $\mathfrak{m}$. Из теоремы 6 вытекает, что множество Y можно представить в виде объединения $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} Y_\gamma$, мощность множества Γ не превосходит $\sum_{\mathfrak{k}<\aleph_0} \mathfrak{m}^{\mathfrak{k}} = \mathfrak{m}$, а множества Y_γ являются рассыпанными. По предложению 5.4 эти множества Y_γ являются локально конечными.

Предложение 5.7. *Пусть* X_α — *топологические пространства,* Y_α — *дискретные системы открытых множеств,* $e(\alpha) = X_\alpha$. *Пусть* Y — *такое подмножество множества* $\sum_{\alpha\in A}^{\mathfrak{m}}{}_e\, Y_\alpha$, *что каждая точка пространства* x *содержится не более, чем в множестве мощности* $\mathfrak{n}$ *элементов* ξ *из множества* Y. *Тогда множество* Y *можно представить в виде объединения* $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} Y_\gamma$, *мощность множества* Γ *не превосходит* $\sum_{\mathfrak{k}<\mathfrak{m}} \mathfrak{n}^{\mathfrak{k}}$, *а каждое множество* Y_γ *является дискретным семейством в пространстве* $\prod_\alpha^{\mathfrak{m}} X_\alpha$.

Доказательство в точности повторяет доказательство предложения 5.6, только вместо предложения 5.4 надо применить предложение 5.5.

Предложение 5.8. *Пусть каждое множество* Y_α *представлено в виде объединения* $\bigcup_{\beta\in Б} Y_\alpha^\beta$, *причём мощность множества* $Б$ *не превосходит* $\mathfrak{n}$. *Пусть, далее,* Y — *некоторое рассыпанное помножество множества* $\sum_{\alpha\in A}^{\mathfrak{m}}{}_e\, Y_\alpha$. *Тогда множество* Y *можно представить в виде объединения* $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} Y_\gamma$, *мощность множества* Γ *не превосходит* $\mathfrak{n}^{\mathfrak{k}}$, $\mathfrak{k} < \mathfrak{m}$, *каждое множество* Y_γ *удовлетворяет условию: если элементы* ξ *и* η *принадлежат множеству* Y_γ, $\xi \neq \eta$, *то существует порядковое число* δ, *такое что для любого числа* $\pi \leqslant \delta$ *имеет место* $\varphi_\xi(\pi) = \varphi_\eta(\pi)$, *для любого числа* $\pi < \delta$ *имеет место* $\xi(\varphi_\xi(\pi)) = \eta(\varphi_\eta(\pi))$, $\xi(\varphi_\xi(\delta)) \neq \eta(\varphi_\eta(\delta))$, *и, наконец, существует индекс* β *из множества* $Б$, *такой что оба элемента:* $\xi(\varphi_\xi(\delta))$ *и* $\eta(\varphi_\eta(\delta))$ *принадлежат множеству* $Y^\beta_{\varphi_\xi(\delta)}$.

Предложение 5.9. *Предложения* 5.6 *и* 5,7 *можно усилить, заменив системы* Y_α *на системы* Y_α', *представимые в виде объединения локально конечных (соответственно, дискретных) систем* $\bigcup_{\alpha\in\Gamma} Y_\alpha^\gamma$, *причём мощность множества* Γ *не превосходит* $\mathfrak{m}$ *(соответственно,* $\mathfrak{n}$).

Литература

[1] E. Michael, *A note on paracompact spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 4 (1953), стр. 831-838.

[2] H. Stone, *Paracompactness and product spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. 54 (1948), стр. 977-982.

[3] E. Michael, *A note on intersections*, Proc. Amer. Math. Soc. 13 (1962), стр. 281-283.

[4] Н. А. Шанин, *О произведении топологических пространств*, Труды мат. инст. АН СССР 24 (1948).

[5] D. Kurepa, *The Cartesian multiplication and cellularity number*, Publ. Acad. Serb. Sci. Inst. Math. 2 (1962), стр. 120-139.

[6] E. Marczewski, *Séparabilité et multiplication cartésienne des espaces topologiques*, Fund. Math. 34 (1947), стр. 127-143.

[7] E. Hewitt, *A remark on density characters*, Bull. Amer. Math. Soc. 52 (1946), стр. 641-643.
[8] E. S. Pondiczery, *Power problems in abstract spaces*, Duke Math. J. 11 (1944), стр. 835-837.
[9] Б. Ефимов, *О диадических бикомпактах*, Докл. АН СССР 149 (1963), стр. 1011-1014.
[10] W. Sierpiński, *Sur un problème de la théorie générale des ensembles*, Fund. Math. 33 (1945), стр. 299-302.
[11] А. С. Есенин-Вольпин, *О зависимости между локальным и интегральным весом в диадических бикомпактах*, Докл. АН СССР 68 (1949).
[12] Б. Ефимов, *О диадических пространствах*, Докл. АН СССР 151 (1963), стр. 1021-1024.
[13] Wang Shu-tang, *Remarks on ω_μ-additive spaces*, Fund. Math. 55 (1964), pp. стр. 101-112.
[14] R. Sikorski, *Remarks on some topological spaces of high power*, Fund. Math. 37 (1950), стр. 125-136.
[15] M. Bockstein, *Un théorème de séparabilité pour les produits topologiques*, Fund. Math. 35 (1948), стр. 242-246.
[16] I. R. Isbell, *Uniform spaces*, Providence 1964, стр. 130-132.
[17] А. Мищенко, *О равномерно замкнутых отображениях*, Fund. Math. этот том, стр. 285-308.
[18] W. Sierpiński, *Hypothèse du continu*, Warszawa, 1934.

Reçu par la Rédaction le 11. 1. 1965

О равномерно замкнутых отображениях

А. Мищенко (Москва)

Статья посвящена изучению веса равномерных пространств, являющихся образами произведений пространств. Как известно, диадический бикомпакт с первой аксиомой счётности метризуем ([4]), т. е. если образ произведения метрических бикомпактов удовлетворяет первой аксиоме счётности, то он метризуем. Возникает задача расширить класс пространств, для которых выполняются теоремы аналогичного содержания. Можно доказать, что если образ произведения бикомпактов метризуем, то отображение можно разложить в композицию проекции на счётную грань и отображения этой грани на образ. Поэтому естественно задачу разбить на две части: 1) исследовать условия, достаточные для существования такого разложения отображения, и 2) найти такие классы отображений, при которых вес образа не превосходит веса прообраза. Первая задача решается в [6]. Второй задаче посвящена настоящая статья. Именно, изучается класс отображений равномерных пространств, называемых здесь *равномерно замкнутыми отображениями*, причём, эти отображения не повышают равномерного веса образа. Этот класс достаточно широк, так что все непрерывные отображения бикомпактов, все открытые гомоморфизмы топологических групп и проекции произведений на их сомножители входят в этот класс. Итак, основной результат заключается в том, что, если равномерный вес пространств X_a не превосходит $\mathfrak{m}$, то необходимым и достаточным условием неравенства вес $Y \leqslant \mathfrak{n}$, где Y — образ пространства $\prod_{a\in A} X_a$ при равномерно замкнутом отображении, локальный вес пространства Y не превосходит $\mathfrak{m}$, является наличие калибра $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ у всех пространств $\prod_{a\in B} X_a$, $|B| < \aleph_0$. Но это отнюдь не значит, что не существует у пространства Y другой равномерности, совместимой с топологией пространства Y, вес которой не превосходит $\mathfrak{n}$. Действительно, для более узкого класса отображений, которые названны *сильно равномерно замкнутыми отображениями*, можно отбросить условие существования калибров пространств $\prod_{a\in B} X_a$, а добавить условие существования изолированной точки в каждом пространстве X_a (1). Этот класс отображений продолжает включать в себя все открытые гомоморфизмы групп и проекции пря-

(1) На самом деле, можно отбросить и это условие.