

Quelques remarques au sujet de la notion de l'objet et de l'objet géométrique

par S. MIDURA (Rzeszów) et Z. MOSZNER (Kraków)

Introduction. Dans la première partie de ce travail nous répondons à la question suivante: quand un objet est un objet géométrique? Nous y donnons quelques conditions nécessaires et suffisantes (les théorèmes 1 et 2 et le corollaire 3) ou bien seulement nécessaires (corollaire 2) pour qu'un objet soit un objet géométrique. Il résulte de ces conditions, en vertu du théorème 3, que le problème de détermination de tous les objets géométriques se réduit, selon la conception admise dans ce travail, à la détermination de toutes les *décompositions invariantes* (définition 1 et 2), *d'indices* (définition 4) au plus égaux au continu, de l'ensemble de transformations déterminant les systèmes admissibles des coordonnées.

Dans la deuxième partie nous considérons la possibilité de compléter l'objet f pour obtenir l'objet géométrique par l'augmentation du nombre des coordonnées dans la composante de l'objet f (les théorèmes 5 et 6). Ce problème était traité aussi par Schouten et Haantjes dans [10].

Dans la troisième partie nous donnerons les conditions nécessaires et suffisantes pour que deux objets (théorème 7) ou deux objets géométriques (corollaires 4 et 5) soient équivalents.

Dans la quatrième partie enfin nous donnerons les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un objet géométrique donné soit un comitant algébrique d'un autre objet géométrique (théorème 8 et 9).

Certains problèmes traités dans les parties I, III, et IV furent traités aussi par M. V. V. Wagner [11] à l'aide des notions plus compliquées. Aussi M. A. Zajtz s'occupe à présent d'une généralisation de certains problèmes présentés par M. V. V. Wagner.

I. Les objets et les objets géométriques

§ 1. Considérations générales. La notion d'objet et, en conséquence, d'objet géométrique se base sur la notion d'ensemble de systèmes admissibles des coordonnées, que nous obtenons d'un système primitif des coordonnées à l'aide d'un ensemble fixé Z de transformations. Nous

allons désigner les transformations de Z par T, T_1, T_2, \bar{T}^* , etc. et leurs superposition $T_1(T_2)$ par T_1T_2 . On admet, en général, dans la théorie des objets géométriques, que l'ensemble Z est une pseudogroupe des transformations [5] par rapport à la superposition, ou bien un groupoïde au sens de Brandt [2]. De plus on admet qu'il existe pour chaque deux transformations T_1 et T_2 de Z une transformation T de Z pour laquelle $T_2 = TT_1$ ⁽¹⁾. Ces suppositions nous admettons dans la suite de ce travail.

Les définitions de l'objet et de l'objet géométrique, données dans la suite, ne sont pas identiques à celles introduites par J. A. Schouten et J. Haantjes [10] (pour l'objet) et par A. Wundheiler [12] (pour l'objet géométrique), mais il y a une liaison stricte entre ces notions.

L'objet est une fonction f qui a l'ensemble Z pour domaine et un sous-ensemble de m -ième puissance cartésienne (m est un nombre entier positif) de l'ensemble de nombres réelles (ou complexes) comme son ensemble des valeurs, pendant que dans la définition classique, l'application f a comme source l'ensemble des systèmes admissibles des coordonnées.

Nous désignons les éléments de ce sous-ensemble (c'est-à-dire les suites à m éléments de nombres réels (complexes)) par $\omega_1, \omega_2, \dots$, etc. et nous les appelons *composantes* de l'objet f . Nous dirons que les termes de ces suites sont les *coordonnées* des composantes ou plus simplement les coordonnées de l'objet. Nous désignons par Ω l'image de l'ensemble Z par la fonction f : $\Omega = f(Z)$.

En utilisant la définition classique de l'objet géométrique et en la transformant en nouveau langage on peut appeler un objet f comme géométrique si l'on peut calculer sa composante ω_2 pour la transformation T_2 à l'aide de sa composante ω_1 pour la transformation T_1 et à l'aide de la transformation T de l'ensemble Z satisfaisant à la relation $T_2 = TT_1$, c'est-à-dire si l'on peut donner la règle de transformations de la forme

$$(1.1) \quad f(T_2) = F(f(T_1), T) \quad \text{ou} \quad \omega_2 = F(\omega_1, T),$$

où F ne dépend ni de T_1 ni de T_2 .

Comme on le sait bien il y a des objets qui ne sont pas géométriques.

Il se pose la question: quand un objet est un objet géométrique, c'est-à-dire à quelles conditions doit satisfaire la fonction f , pour qu'on puisse donner la règle de transformation de la forme (1.1) pour l'objet f ? Le théorème 1 donne une réponse à cette question.

Avant de formuler ce théorème, nous allons donner quelques définitions.

⁽¹⁾ Il existe des groupoïdes n'ayant pas de cette propriété et il existe des groupoïdes avec cette propriété qui ne sont pas des groupes (voir [9], p. 13-15).

DÉFINITION 1. La famille $\{Z_t\}_{t \in S}$ des ensembles Z_t (où l'indice t parcourt un ensemble S) disjoints et non vides est appelée *décomposition* de l'ensemble Z , si $Z = \bigcup_{t \in S} Z_t$. Les ensembles Z_t sont appelés les *composantes* de cette décomposition.

DÉFINITION 2. La décomposition $\{Z_t\}$ est appelée *invariante* par rapport à une opération " \circ " définie dans l'ensemble Z (dans le cas considéré par rapport à la superposition des transformations) s'il existe, pour toute transformation T de Z et tout t_1 de S , un t_2 de S tel que

$$T \cdot Z_{t_1} \subset Z_{t_2}$$

où

$$T \cdot Z_{t_1} \stackrel{\text{df}}{=} \{T_2: \bigvee_{T_1} (T_1 \in Z_{t_1} \text{ et } T_2 = T \cdot T_1)\}.$$

DÉFINITION 3. La décomposition de l'ensemble Z *déterminée* par un objet f (défini sur l'ensemble Z) est une décomposition définie comme suit. Nous formons l'ensemble

$$f^{-1}(\{\omega\}) \stackrel{\text{df}}{=} \{T: (T \in Z \text{ et } f(T) = \omega)\},$$

pour chaque ω de l'ensemble Ω , et nous posons

$$Z = \bigcup_{\omega \in \Omega} f^{-1}(\{\omega\}).$$

Nous désignons par $\{\omega\}$ l'ensemble qui ne contient qu'un élément ω . Par analogie nous allons désigner par $\}A\{$ un seul élément de l'ensemble A qui n'a qu'un élément.

THÉORÈME 1. *Pour qu'un objet f , défini dans l'ensemble Z , soit un objet géométrique il faut et il suffit que la décomposition déterminée par f sur l'ensemble Z soit invariante par rapport à la superposition des transformations de Z .*

Pour démontrer que la condition est suffisante, il suffit de donner pour l'objet f une règle de transformation de la forme (1.1). Supposons que $\omega_1 = f(T_1)$, $\omega_2 = f(T_2)$ et $T_2 = TT_1$. Considérons les ensembles $f^{-1}(\{\omega_1\})$ et $T \cdot f^{-1}(\{\omega_1\})$. La décomposition de Z déterminée par l'objet f étant invariante, la fonction f est constante sur l'ensemble $T \cdot f^{-1}(\{\omega_1\})$ et puisque $T_1 \in f^{-1}(\{\omega_1\})$, nous avons $TT_1 \in T \cdot f^{-1}(\{\omega_1\})$. Il en résulte, en vertu de $T_2 = TT_1$ et $\omega_2 = f(T_2)$, que la valeur constante de objet f sur l'ensemble $T \cdot f^{-1}(\{\omega_1\})$ est égale à ω_2 . Posons

$$F = \}f(T \cdot f^{-1}(\{\omega\}))\{$$

pour un ω arbitraire, appartenant à l'ensemble Ω et pour une transformation T arbitraire, appartenant à l'ensemble Z . La fonction F ne dépend que de f , T et ω . En outre $\omega_2 = F(\omega_1, T)$. Alors nous voyons

que F est une fonction, qui définit la règle de transformation pour l'objet f , donc la condition énoncée dans le théorème 1 est suffisante.

Pour démontrer que cette condition est aussi nécessaire, supposons que l'objet f soit un objet géométrique de la règle de transformation (1.1) et considérons la décomposition de l'ensemble Z déterminée par l'objet f . Supposons que cette décomposition ne soit pas invariante, c'est-à-dire qu'il existe un T_3 de l'ensemble Z et un ω_3 dans l'ensemble Ω , tel que pour tout ω appartenant à l'ensemble Ω , il n'est pas vrai que $T_3 \cdot f^{-1}(\{\omega_3\}) \subset f^{-1}(\{\omega\})$. Il en résulte que la fonction f prend sur l'ensemble $T_3 \cdot f^{-1}(\{\omega_3\})$ au moins deux valeurs distinctes ω_1 et ω_2 , c'est-à-dire qu'il existe deux transformations T_1 , et T_2 (de l'ensemble $T_3 \cdot f^{-1}(\{\omega_3\})$) telles que $\omega_1 = f(T_1) \neq f(T_2) = \omega_2$. Il existe donc dans l'ensemble $f^{-1}(\{\omega_3\})$ des \bar{T}_i tels que $T_i = T_3 \bar{T}_i$. Mais comme $\bar{T}_i \in f^{-1}(\{\omega_3\})$, nous avons $f(\bar{T}_i) = \omega_3$. En substituant dans (1.1) la transformation T_i (pour $i = 1, 2$) au lieu de la transformation T_1 , nous obtenons: $\omega_i = f(T_i) = F(f(\bar{T}_i), T_3) = F(\omega_3, T_3)$, ce que contredit à l'inégalité $\omega_1 \neq \omega_2$. La condition du théorème 1 est donc nécessaire.

D'une façon analogue nous pouvons démontrer le

THÉORÈME 2. *Pour qu'un objet f défini dans l'ensemble Z soit un objet géométrique il faut et il suffit que l'ensemble $f(T \cdot f^{-1}(\{\omega\}))$ soit au plus de puissance 1, pour tout ω de l'ensemble Ω et pour toute transformation de l'ensemble Z .*

Il en résulte que chaque objet constant (c'est trivial, car dans ce cas cet objet est un scalaire) ainsi tout objet univalent (c'est-à-dire un objet pour lequel la fonction f est biunivoque) est un objet géométrique.

A tout objet géométrique défini sur l'ensemble Z correspond une décomposition invariante de l'ensemble Z , notamment la décomposition déterminée par cet objet. On peut poser la question suivante: peut on choisir pour chaque décomposition invariante de l'ensemble Z un objet tel que cette décomposition donnée soit identique à la décomposition de Z dictée par cet objet? Le théorème 3 donne la réponse à cette question. Avant d'énoncer ce théorème, nous allons donner la définition suivante:

DÉFINITION 4. Nous appelons *indice* de la décomposition d'un ensemble Z la puissance de la famille des composantes de cette décomposition.

THÉORÈME 3. *Pour qu'une décomposition invariante d'un ensemble Z soit une décomposition déterminée par un objet géométrique défini sur Z il faut et il suffit que l'indice de cette décomposition soit au plus égal au continu.*

Ce théorème résulte du fait que la puissance de m -ième (où m est un entier positif) puissance cartésienne de l'ensemble des nombres réels est égale au continu.

Il résulte de nos considérations précédentes que pour obtenir tous les objets géométriques définis sur l'ensemble Z , il suffit d'indiquer toutes les décompositions invariantes de l'ensemble Z , ayant l'indice au plus égal au continu. Dans le cas où la puissance de l'ensemble Z est au plus continu, toute décomposition invariante de l'ensemble Z satisfait à cette condition.

Supposons maintenant que l'ensemble Z des transformations déterminant les systèmes admissibles des coordonnées forme un groupe que nous désignerons par G . C'est le cas, par exemple, si l'on considère les objets géométriques purement différentiels où le groupe L_n^s , considéré par J. Haantjes et G. Laman [8], joue le rôle de l'ensemble Z .

Dans la suite nous allons considérer de façon plus exacte les décompositions invariantes du groupe G .

THÉORÈME 4. *Pour qu'une décomposition $\{G_t\}$, où $t \in S$, du groupe G soit invariante il faut et il suffit qu'elle soit une décomposition de l'ensemble G en classes d'équivalence à gauche par rapport à un sous-groupe G^* .*

Pour la démonstration il suffit de remarquer que:

(a) la décomposition de l'ensemble Z définit de façon connue la relation d'équivalence R ,

(b) l'invariabilité de la décomposition de l'ensemble Z est équivalente à la condition suivante

$$\bigwedge_{a,b,c \in Z} [aRb \Rightarrow (c \cdot a)R(c \cdot b)],$$

c'est-à-dire à la compatibilité à gauche de la relation R avec la loi „ \cdot ”,

(c) le fait que la relation R est compatible à gauche avec la loi „ \cdot ” du groupe G est équivalent au fait que la décomposition initiale est la décomposition de ce groupe en classes à gauche suivant un sous-groupe G^* (voir [3], p. 68, 69).

COROLLAIRE 1. *Pour qu'une décomposition $\{G_t\}_{t \in S}$ du groupe G soit invariante il faut et il suffit qu'il existe pour tout T de l'ensemble G et tout t_1 de l'ensemble S une valeur t_2 telle que $T \cdot G_{t_1} = G_{t_2}$.*

Pour la démonstration remarquons que la suffisance est triviale et la nécessité résulte du fait que la multiplication à gauche d'une classe d'équivalence à gauche par une transformation arbitraire donne une classe d'équivalence à gauche.

COROLLAIRE 2. *Pour qu'un objet f soit un objet géométrique il faut que tous les ensembles $f^{-1}(\{\omega\})$, où $\omega \in \Omega$, aient la même puissance; en d'autres termes, il faut que la fonction f prenne chacune de ses valeurs dans le même nombre de points.*

En effet, il résulte du théorème 1 que les ensembles $f^{-1}(\{\omega\})$, où ω appartient à l'ensemble Ω , forment (quand f est un objet géométrique)

une décomposition invariante du groupe G ; ils sont alors les classes d'équivalence à gauche de G par rapport à un sous-groupe G^* . Mais on sait que toutes les classes d'équivalences ont la même puissance.

Il en résulte en particulier que l'objet

$$\Phi(T_k) = \begin{cases} 0 & \text{pour } k \neq 0, \\ 1 & \text{pour } k = 0, \end{cases}$$

où T_k est la translation sur la droite de la forme $\xi' = \xi + k$, considéré par M. M. Kucharzewski et M. M. Kuczma dans [9], p. 16, n'est pas un objet géométrique.

COROLLAIRE 3. *Pour qu'un objet f soit un objet géométrique il faut et il suffit que la décomposition de G déterminée par f soit une décomposition de cet ensemble en classes d'équivalence à gauche par rapport à l'ensemble $f^{-1}(\{f(I)\})$, qui doit former un sous-groupe du groupe G .*

Ce corollaire résulte des théorèmes 1 et 4. L'ensemble $f^{-1}(\{f(I)\})$ doit être un groupe (par rapport auquel nous décomposons G en classes d'équivalence dans le cas où f est un objet géométrique), parce que $I \in f^{-1}(\{f(I)\})$. La condition „l'ensemble $f^{-1}(\{f(I)\})$ forme un sous-groupe du groupe G ” est nécessaire pour qu'un objet f soit l'objet géométrique, mais elle n'est pas suffisante, parce que la condition du corollaire 2 peut ne pas être remplie.

§ 2. Remarques et exemples.

1. Le corollaire 2 nous permet de déterminer sans difficultés les objets qui ne sont pas les objets géométriques.

2. La condition dans le corollaire 2 n'est pas suffisante pour qu'un objet soit un objet géométrique. En effet, les ensembles distincts de même puissance (au moins égale à 2), étant une décomposition de l'ensemble G , ne doivent pas être les classes d'équivalence parce que, par exemple, le sous-ensemble contenant I ne doit pas être le sous-groupe de G . Par contre il résulte du théorème 2 qu'un objet f est un objet géométrique si les puissances des ensembles $f^{-1}(\{\omega\})$, pour $\omega \in \Omega$, sont égales à 1.

Il résulte donc de nos considérations précédentes, que si l'on a un groupe donné G , alors il suffit de déterminer tous les sous-groupes du groupe G , ayant les indices au plus égaux au continu, pour avoir tous les objets géométriques définis sur G . Dans le cas où la puissance de G est au plus égale au continu, ce sont les sous-groupes arbitraires de G . Dans le cas où la puissance de G est plus grande que continu ce ne seront que les sous-groupes de même puissance que G , ayant les indices au plus égaux au continu.

La même décomposition invariante de l'ensemble G correspond à infinité des objets géométriques (de même nombre des coordonnées),

qui la déterminent. Il serait intéressant de classer les objets géométriques selon les sous-groupes qui les déterminent.

Pour illustrer nos résultats, nous allons montrer quels sous-groupes du groupe affine déterminent les objets géométriques connus.

Soit l'ensemble des transformations affines G_a :

$$x^{k'} = a_i^{k'} w^i + b^{k'} \quad (2)$$

où

$$i = 1, 2, \dots, n, \quad k' = 1', 2', \dots, n' \quad \text{et} \quad \det \| a_i^{k'} \| \neq 0,$$

un ensemble des transformations déterminant les systèmes admissibles des coordonnées.

Considérons la densité de Weyl du poids -1 , dont la règle de transformation prend la forme:

$$\omega_2 = |J| \omega_1,$$

où J est le jacobien de la transformation T satisfaisant à la condition $T_2 = T T_1$, T_1 et T_2 étant les transformations pour lesquelles la densité donnée a les composantes égales respectivement à ω_1 et à ω_2 .

Dans le cas où $Z = G_a$ nous avons $J = \det \| a_i^{k'} \|$. Supposons que cette densité ait la composante $\omega_0 \neq 0$ pour la transformation identique. Cherchons les transformations de l'ensemble G_a pour lesquelles la densité donnée a la composante ω_0 . Ces transformations satisfont à la condition:

$$\omega_0 = |J| \omega_0.$$

Alors $|J| = 1$, donc

$$(1.2) \quad \det \| a_i^{k'} \| = 1.$$

Ces transformations de l'ensemble G_a qui satisfont à la condition (1.2) forment le sous-groupe connu du groupe G_a , nommé groupe unimodulaire.

Si nous considérons la densité ayant la règle de transformation

$$\omega_2 = J \omega_1,$$

alors les transformations pour lesquelles cette densité a la même composante $\omega_0 \neq 0$ que pour la transformation identique, satisfont à la condition

$$\omega_0 = J \omega_0.$$

De là $J = 1$ donc

$$(1.3) \quad \det \| a_i^{k'} \| = 1.$$

L'ensemble des transformations affines satisfaisant à la condition (1.3) est le sous-groupe connu du groupe G_a , nommé groupe unimodulaire spécial.

(²) Nous utilisons, ici et dans la suite, la convention d'Einstein pour la sommation.

Nous allons maintenant démontrer que l'ensemble des transformations affines, pour lesquelles le tenseur contrevariant v^{ik} prend comme coordonnées δ^{ik} (où $\delta^{ik} = 0$ pour $i \neq k$, $\delta^{ik} = 1$ pour $i = k$) pour la transformation identique, forme les sous-groupe orthogonal du groupe G_a . On sait que le tenseur contrevariant à la règle de transformation

$$v^{i'k'} = A_i^{i'} A_k^{k'} v^{ik},$$

où

$$i', k' = 1', 2', \dots, n'; \quad i, k = 1, 2, \dots, n \quad \text{et} \quad A_i^{i'} = \left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \right)_{x_0},$$

v^{ik} sont les coordonnées pour la transformation T_1 , $v^{i'k'}$ sont les coordonnées du même tenseur pour la transformation T_2 , et $x^{i'} = \varphi(x^i)$ est la transformation T satisfaisant à la condition $T_2 = TT_1$. Pour les transformations affines $A_i^{i'} = a_i^{i'}$, donc les transformations, pour lesquelles $v^{i'k'} = \delta^{i'k'}$ (où $\delta^{i'k'} = 1$ pour $i' = k'$ et $\delta^{i'k'} = 0$ pour $i' \neq k'$) doivent satisfaire à la condition

$$\delta^{i'k'} = a_i^{i'} a_k^{k'} \delta^{ik}.$$

Il en résulte que

$$(1.4) \quad \delta^{i'k'} = \sum_{i=1}^n a_i^{i'} a_i^{k'}.$$

Les conditions (1.4) disent que les dites transformations forment le sous-groupe orthogonal du groupe affine.

Supposons que le vecteur v^i (non égal à zéro) de la règle de transformation

$$v^{i'} = a_i^{i'} v^i$$

ait les coordonnées v_0^i pour la transformation identique. Les transformations, pour lesquelles ce vecteur a les mêmes coordonnées, satisfont à la condition

$$(1.5) \quad v_0^{i'} = a_i^{i'} v_0^i.$$

Ces transformations forment un sous-groupe du groupe affine en vertu des théorèmes 1 et 4 (en particulier c'est le groupe G_a tout entier, si l'on prend $v_0^i = 0$).

Nous allons maintenant envisager à l'aide de l'objet de Pensov un sous-groupe des transformations affines. La règle de cet objet est

$$\omega' = \frac{a_1^{2'} + a_2^{2'} \omega}{a_1^{1'} + a_2^{1'} \omega}.$$

Les transformations pour lesquelles cet objet a la même composante ω_0 (ω_0 est un nombre arbitraire) que pour la transformation identique satisfont à la condition suivante:

$$\omega_0 = \frac{a_1^{2'} + a_2^{2'} \omega_0}{a_1^{1'} + a_2^{1'} \omega_0},$$

d'où

$$(1.6) \quad \omega_0(a_1^{1'} + a_2^{1'} \omega_0) = a_1^{2'} + a_2^{2'} \omega_0.$$

Ces transformations forment, en vertu des théorèmes 1 et 4 un sous-groupe du groupe G_a .

II. Le complément d'un objet à un objet géométrique

En considérant la possibilité de compléter un objet donné pour avoir un objet géométrique en augmentant par un nombre fini la quantité des coordonnées de la composante de l'objet nous allons donner quelques théorèmes.

THÉORÈME 5. *Pour qu'on puisse compléter un objet f , par l'augmentation par un nombre fini la quantité des coordonnées de sa composante, à un objet géométrique f^* il suffit que la puissance de l'ensemble Z ne soit pas plus grande que celle du continu.*

Démonstration. Il suffit d'ajouter la $(m+1)$ -ème coordonnée à la composante de l'objet f de façon à obtenir un objet f^* biunivoque, qui est un objet géométrique d'après la remarque qui suit du théorème 2.

Remarquons que les ensembles connus des transformations: le groupe affine, le groupe L_n^a , le pseudogroupe G_r (défini dans [7], p. 19), sur lesquelles nous basons dans la théorie des objets géométriques, satisfont à la condition donnée dans le théorème 5.

Nous allons maintenant démontrer (dans le cas où l'ensemble Z est un groupe) une généralisation de l'inversion du théorème 5.

THÉORÈME 6. *S'il existe pour tout objet f défini sur un groupe G , un nombre entier non négatif r tel que l'on puisse compléter l'objet f jusqu'à l'objet géométrique f^* , en augmentant de r la quantité des coordonnées de la composante de l'objet f , alors la puissance de l'ensemble G n'est pas plus grande que celle du continu.*

Démonstration. Supposons que la puissance de l'ensemble G soit plus grande que le continu. Considérons l'objet f défini de la façon suivante: $f(I) = 0$, $f(T) = 1$ pour tout $T \neq I$. Soit f^* un objet que nous obtenons de f en complétant ses m coordonnées de façon arbitraire à r coordonnées (où r est un nombre entier non négatif arbitraire). D'une part on a $f^*(I) \neq f^*(T)$ pour tout $T \neq I$. D'autre part l'ensemble des suites à r termes formants des nombres réels (complexes) a la puissance

du continu, alors il résulte de la condition que la puissance de G est plus grande que le continu, qu'il existe deux éléments T_1 et T_2 tel que $T_1 \neq T_2$ et $f^*(T_1) = f^*(T_2)$. Il résulterait donc d'après le corollaire 2 que f^* ne peut pas être un objet géométrique. Ainsi la démonstration du théorème 6 est terminée.

III. L'équivalence des objets et des objets géométriques

Désignons les coordonnées de l'objet f pour une transformation T de l'ensemble Z par $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p$, et celles de l'objet g pour la même transformation par $\omega_1^*, \omega_2^*, \dots, \omega_m^*$. Désignons dans la suite l'ensemble des valeurs de la fonction f par Ω et celui de la fonction g par Ω^* . Nous introduisons la définition suivante de l'équivalence des objets:

DÉFINITION 5. Nous dirons que l'objet f est *équivalent* à l'objet g s'il existe un système des m -fonctions ψ_j ($j = 1, 2, \dots, m$) tel que

$$(3.1) \quad \omega_j^* = \psi_j(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p)$$

pour tous les T de l'ensemble Z , où la transformation (3.1) (de l'ensemble Ω sur Ω^*) est réversible dans l'ensemble Ω .

Cette définition est une simple généralisation de la définition d'équivalence des objets géométriques ayant la même quantité des coordonnées des composantes, qui est formulé par S. Gołab dans [6].

En rapport avec la définition ci-dessus, nous allons démontrer le

THÉORÈME 7. *Pour que deux objets f et g , définis sur l'ensemble Z , soient équivalents il faut et il suffit que la décomposition de l'ensemble Z déterminée par f , soit identique à celle déterminée par g .*

Démonstration. Supposons que deux objets équivalents, f et g , déterminent les décompositions différentes:

$$(3.2) \quad \{f^{-1}(\{\omega\})\}_{\omega \in \Omega},$$

$$(3.3) \quad \{g^{-1}(\{\omega^*\})\}_{\omega^* \in \Omega^*}$$

de l'ensemble Z . Il en résulterait:

(1) qu'il existe une composante $f^{-1}(\{\bar{\omega}\})$ de la décomposition (3.2) ayant les éléments communs avec deux composantes différentes, $g^{-1}(\{\bar{\omega}^*\})$ et $g^{-1}(\{\bar{\omega}^*\})$, de la décomposition (3.3), ou bien

(2) qu'il existe une composante $g^{-1}(\{\bar{\omega}^*\})$ de la décomposition (3.3), ayant des éléments communs avec deux composantes différentes, $f^{-1}(\{\bar{\omega}\})$ et $f^{-1}(\{\bar{\omega}\})$, de la décomposition (3.2).

Dans le cas (1) nous obtenons la contradiction avec (3.1), car il correspondrait à deux transformations différentes T_1 et T_2 le même $\bar{\omega}$ et différents $\bar{\omega}^*$ et $\bar{\omega}^*$.

Dans le cas (2) nous obtenons la contradiction avec supposition que (3.1) est réversible (la même valeur $\bar{\omega}^*$ correspondrait par (3.1) à deux $\bar{\omega}$ et $\bar{\omega}$ différents).

Pour démontrer que la condition est aussi suffisante il suffit de démontrer que si les décompositions de Z déterminées par f et g sont identiques, il existe alors une fonction F (dépendante de ω), biunivoque, pour laquelle $\omega^* = F(\omega)$ (où ω et ω^* désignent les composantes de f et g pour la même transformation T de l'ensemble Z). Posons

$$F(\omega) = \}g(f^{-1}(\{\omega\}))\{.$$

Nous constatons que:

(1) F est une fonction définie sur l'ensemble Ω . Il suffit de remarquer que si $\omega \in \Omega$, alors l'ensemble $f^{-1}(\{\omega\})$ est une composante de la décomposition de Z , déterminée par f . En vertu de l'hypothèse $f^{-1}(\{\omega\})$ est une composante de la décomposition de Z déterminée par g . Alors l'ensemble $g(f^{-1}(\{\omega\}))$ n'a qu'un élément.

(2) F est une fonction biunivoque. En effet, soit $\omega_1 \neq \omega_2$. Alors $f^{-1}(\{\omega_1\})$ et $f^{-1}(\{\omega_2\})$ sont des composantes différentes de la décomposition déterminée par f et par suite ainsi par g , sur Z ; alors g prend les valeurs différentes sur $f^{-1}(\{\omega_1\})$ et $f^{-1}(\{\omega_2\})$.

(3) Si ω et ω^* sont respectivement les composantes de f et de g pour la même transformation T , alors $\omega^* = F(\omega)$, car la relation $\omega = f(T)$ entraîne la relation $T \in f^{-1}(\{\omega\})$, et en conséquence la fonction g prendrait la valeur $g(T) = \omega^*$ sur l'ensemble $f^{-1}(\{\omega\})$:

(4) F ne dépend pas de T .

Comme une conséquence du théorème 7 et du corollaire 3, nous obtenons le

COROLLAIRE 4. *Pour que deux objets géométriques f et g définis sur un groupe G des transformations, soient équivalents il faut et il suffit que*

$$f^{-1}(\{f(I)\}) = g^{-1}(\{g(I)\}),$$

c'est-à-dire que les objets f et g prennent sur le même sous-ensemble de G les mêmes composantes que pour la transformation identique.

Nous pouvons généraliser ce corollaire comme suit:

COROLLAIRE 5. *Pour que deux objets géométriques f et g , définis sur un groupe G des transformations, soient équivalents, il faut et il suffit qu'il existe des transformations T_1 et T_2 du groupe G telles que*

$$f^{-1}(\{f(T_1)\}) = g^{-1}(\{g(T_2)\}).$$

La nécessité de la condition résulte évidemment du corollaire 4. L'ensemble formant le premier membre de la formule ci-dessus est une

classe d'équivalence à gauche de la décomposition déterminée par f sur G et le deuxième membre est une classe d'équivalence (à gauche) de la décomposition déterminée par g sur G . Nous pouvons alors déduire (en vertu du théorème 7) que la condition est suffisante d'après le lemme suivant.

LEMME. *Si une classe d'équivalence à gauche du groupe G par rapport à un sous-groupe G^* est identique à une classe d'équivalence à gauche de G par rapport à sous-groupe G^{**} , alors $G^* = G^{**}$.*

Démonstration du lemme. Supposons qu'il existe a et b appartenant à G tels que $aG^* = bG^{**}$. Nous en obtenons que $G^* = (a^{-1}b)G^{**}$. Comme l'élément neutre du groupe G appartient à G^* , alors il appartient aussi à $(a^{-1}b)G^{**}$. L'ensemble $(a^{-1}b)G^{**}$ étant une classe d'équivalence à gauche du G par rapport à G^{**} , on a $(a^{-1}b)G^{**} = G^{**}$, de là $G^* = G^{**}$, ce qui achève la démonstration.

Remarquons que si les objets f et g , définis sur l'ensemble Z , sont équivalents, alors ils sont tous les deux des objets géométriques ou bien ni l'un ni l'autre n'est pas un objet géométrique.

Maintenant nous allons nous occuper des considérations analogiques pour les comitants algébriques.

IV. Comitants algébriques

Soit un objet f , ayant la composante $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p)$, défini sur l'ensemble Z . Désignons par $F(\omega)$ une fonction transformant l'ensemble Ω des valeurs de l'objet f dans un sous-ensemble Ω^* de k -ième (k un nombre entier positif) puissance cartésienne de l'ensemble des nombres réels. Nous allons désigner les éléments de l'ensemble Ω^* par ω^* , $\bar{\omega}^*$ etc. La fonction $F(f(T))$ définit un objet g sur l'ensemble Z . On sait, que si f et g sont des objets géométriques, dans ces cas on appelle g le comitant algébrique de l'objet f (voir [4]).

Remarquons que si F est une fonction biunivoque alors f et g sont des objets équivalents, donc f et g sont ou ne sont pas simultanément des objets géométriques.

Nous allons admettre la définition suivante:

DÉFINITION 6. Une décomposition donnée d'un ensemble Z est dite *contenue* dans une autre décomposition de cet ensemble, si toute composante de la décomposition donnée est contenue dans une composante de l'autre décomposition.

En rapport avec la notion du comitant algébrique, nous allons démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME 8. *Pour qu'un objet géométrique g , défini sur un ensemble Z , soit le comitant algébrique d'un objet géométrique f défini sur le*

même ensemble il faut et il suffit que la décomposition de l'ensemble Z déterminée par f soit contenue dans celle déterminée par g (les deux décompositions étant invariantes et leurs indices ne sont pas plus grands que le continu).

Démonstration de la nécessité de la condition. Si l'objet g est un comitant algébrique de l'objet f , alors il existe, pour un ω arbitraire appartenant à Ω , un ω^* de Ω^* tel que $f^{-1}(\{\omega\}) \subset g^{-1}(\{\omega^*\})$ (il suffit de prendre $\omega^* = F(\omega)$). Cela signifie que la décomposition de l'ensemble Z déterminée par f est contenue dans celle déterminée par g . Notre condition est donc nécessaire.

Pour la démonstration de la suffisance de la condition nous procéderons d'une façon analogue à celle dans la démonstration du théorème 7 (la fonction F définie au cours de cette démonstration, ne doit pas être biunivoque et en conséquence f et g ne doivent pas être équivalents; g est seulement un comitant algébrique de f).

Le théorème 8 a ramené le problème de trouver tous les comitants algébriques d'un objet géométrique f défini sur un ensemble Z à la détermination de toutes les décompositions invariantes de Z dans lesquelles est contenue la décomposition de Z déterminée par f .

Il résulte du théorème 8 que tout objet géométrique défini sur l'ensemble Z est un comitant d'un objet géométrique biunivoque défini sur Z .

Si l'ensemble des systèmes admissibles des coordonnées est défini par un groupe des transformations, alors nous pouvons démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME 9. *Pour qu'un objet géométrique g , défini sur un groupe G , soit un comitant algébrique d'un objet géométrique f , défini sur le groupe G , il faut et il suffit que le groupe $f^{-1}(\{f(I)\})$ soit un sous-groupe du groupe $g^{-1}(\{g(I)\})$.*

Démonstration de la nécessité de la condition. Si g est un comitant algébrique de f , alors, en vertu du théorème 8, la décomposition de Z déterminée par f est contenue dans celle déterminée par g . Il en résulte que l'ensemble $f^{-1}(\{f(I)\})$ est contenu dans une composante de la décomposition de Z déterminée par g et puisque $I \in f^{-1}(\{f(I)\})$ ainsi que $I \in g^{-1}(\{g(I)\})$, nous avons $f^{-1}(\{f(I)\}) \subset g^{-1}(\{g(I)\})$. La nécessité de notre condition est ainsi démontrée.

Démonstration de la suffisance. Soit $f^{-1}(\{f(I)\}) \subset g^{-1}(\{g(I)\})$. Alors la décomposition en classes d'équivalence à gauche par rapport à $f^{-1}(\{f(I)\})$ est contenue dans celle par rapport à $g^{-1}(\{g(I)\})$. Nous en concluons, en vertu du théorème 8, que l'objet géométrique g est un comitant algébrique de l'objet géométrique f , ce qui démontre que notre condition est aussi suffisante.

Le théorème 9 donne une méthode pour la détermination de tous les comitants algébriques de l'objet géométrique f , défini sur un groupe G . En effet considérons $f^{-1}(\{f(I)\})$ et soit G^* une groupe arbitraire contenant $f^{-1}(\{f(I)\})$. Nous décomposons G en classes d'équivalence à l'aide de G^* . Un objet g arbitraire qui détermine une décomposition de G identique à la décomposition donnée de G , à l'aide de G^* , est un comitant algébrique de l'objet f .

Quelques exemples

Dans les exemples ci-dessous nous allons considérer les objets géométriques et leurs comitants algébriques, définis sur le groupe G_a des transformations affines qui déterminent les systèmes de coordonnées admissibles.

Nous allons démontrer que dans l'espace à deux dimensions un objet de Pensov est le comitant algébrique d'un vecteur.

Supposons qu'un vecteur v ait les coordonnées (v^1, v^2) pour la transformation identique et que $v^1 \neq 0$. Les transformations affines, pour lesquelles ce vecteur a les mêmes coordonnées, satisfont aux conditions suivantes:

$$(4.1) \quad v^i = a_i^{i'} v^{i'}$$

Les transformations, pour lesquelles l'objet de Pensov a la même coordonnée v^2/v^1 prise pour la transformation identique, satisfont à la condition

$$(4.2) \quad \frac{v^2}{v^1} = \frac{a_i^{2'} v^{i'}}{a_i^{1'} v^{i'}}$$

Nous voyons que les transformations affines satisfaisant aux conditions (4.1) (ces transformations forment, comme nous le savons, un groupe), satisfont aussi à la condition (4.2). Alors, l'ensemble des transformations satisfaisant aux conditions (4.1) est un sous-groupe de l'ensemble des transformations satisfaisant à la condition (4.2) (qui est aussi un groupe, comme il résulte des considérations précédentes). Il s'ensuit que l'objet de Pensov v^2/v^1 est, en vertu du théorème 9, un comitant algébrique du vecteur v .

Puisqu'un groupe unimodulaire spécial est un sous-groupe du groupe unimodulaire, alors la densité de Weyl du poids -1 est, en vertu du théorème 9, un comitant algébrique de la densité du poids -1 .

La densité de Weyl du poids -1 est, comme il résulte du théorème 9, aussi un comitant algébrique du tenseur contrevariant v^{ik} prenant les coordonnées δ^{ik} pour la transformation identique, parce que les transformations orthogonales satisfont à la condition (1.2).

Donnerons encore un exemple. Deux objets de Pensov $\overset{1}{\omega}$ et $\overset{2}{\omega}$, dont les règles des transformations sont de la forme

$$\begin{aligned}\bar{\overset{1}{\omega}} &= F_1 \left(\frac{a_{11}f_1(\overset{1}{\omega}) + a_{12}}{a_{21}f_1(\overset{1}{\omega}) + a_{22}} \right), & (f_1(F_1(\tau)) = \tau), \\ \bar{\overset{2}{\omega}} &= F_2 \left(\frac{a_{11}f_2(\overset{2}{\omega}) + a_{12}}{a_{21}f_2(\overset{2}{\omega}) + a_{22}} \right), & (f_2(F_2(\tau)) = \tau)\end{aligned}$$

et qui ont les composantes $\overset{1}{\omega}_0$ et $\overset{2}{\omega}_0$ pour la transformation identique, sont équivalents seulement dans le cas où

$$(4.3) \quad f_1(\overset{1}{\omega}_0) = f_2(\overset{2}{\omega}_0)$$

(comparer avec [1], p. 65).

De plus si (4.3) n'a pas lieu, aucun des objets $\overset{1}{\omega}$ et $\overset{2}{\omega}$ n'est pas le comitant algébrique de l'autre.

En effet, les sous-groupes B_1 et B_2 du groupe affine qui déterminent ces objets

$$\begin{aligned}B_1 &= \left[(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}) : \overset{1}{\omega}_0 = F_1 \left(\frac{a_{11}f_1(\overset{1}{\omega}_0) + a_{12}}{a_{21}f_1(\overset{1}{\omega}_0) + a_{22}} \right) \right], \\ B_2 &= \left[(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}) : \overset{2}{\omega}_0 = F_2 \left(\frac{a_{11}f_2(\overset{2}{\omega}_0) + a_{12}}{a_{21}f_2(\overset{2}{\omega}_0) + a_{22}} \right) \right],\end{aligned}$$

ne sont identiques que dans le cas si (4.3) a lieu.

De plus nous avons

$$\left(-\frac{1}{2}, f_1(\overset{1}{\omega}_0), 0, \frac{1}{2}\right) \in B_1 \quad \text{et} \quad \left(-\frac{1}{2}, f_2(\overset{2}{\omega}_0), 0, \frac{1}{2}\right) \in B_2$$

et si (4.3) n'a pas lieu

$$\left(-\frac{1}{2}, f_1(\overset{1}{\omega}_1), 0, \frac{1}{2}\right) \notin B_2 \quad \text{et} \quad \left(-\frac{1}{2}, f_2(\overset{2}{\omega}_1), 0, \frac{1}{2}\right) \notin B_1,$$

donc ni $B_1 \subset B_2$ ni $B_2 \subset B_1$.

De même façon on peut démontrer facilement qu'aucun des objets de Pensov n'est le comitant algébrique d'aucun des objets du type J et inversement (comparer avec [1], p. 66).

Travaux cités

[1] J. Aczél und S. Goląb, *Funktionalgleichungen der Theorie der geometrischen Objekte*, Warszawa 1960.

[2] H. Brand, *Über eine Verallgemeinerung des Gruppenbegriffs*, Math. Ann. 96 (1926), p. 360-366.

- [3] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique, Livre II, Algèbre, Chapitre I, Structures algébriques*, Paris 1951.
- [4] S. Gołąb, *Sur quelques points concernant la notion du comitant*, Ann. Soc. Polon. Math. 17 (1938), p. 177-192.
- [5] — *Über den Begriff der pseudogruppe von Transformationen*, Math. Ann. 116 (1939), p. 768-780.
- [6] — *La notion de similitude parmi les objets géométriques*, Bull. Acad. Polon. Sci. (1950), p. 1-7.
- [7] — *Rachunek tensorowy*, Warszawa 1956.
- [8] J. Haantjes and G. Laman, *On the definition of geometric objects, I, II*, Neder Akad. Wetensch. Proc., Ser. A, 56, Indagationes Math. 15 (1953), p. 208-215 et 216-222.
- [9] M. Kucharzewski and M. Kuczma, *Basic concepts of the theory of geometric objects*, Rozprawy Mat. 43, Warszawa 1964.
- [10] J. A. Schouten and J. Haantjes, *On the theory of the geometric object*, Proc. London Math. Soc. 42 (1936), p. 356-376.
- [11] В. В. Вагнер, *Теория дифференциальных объектов и основания дифференциальной геометрии*, Supplement au livre O. Veblen et J. H. C. Whitehead, *Основания дифференциальной геометрии*, Moskou 1949, p. 135-210.
- [12] A. Wundheiler, *Objekte, Invarianten und Klassifikation der Geometrien*, (I Intern. Konf. f. tens. Diff. Geom. u. i. Anw., Moskau 17-23. V. 1934), Abhandlungen Sem. Vekt. An. Mosk. 4 (1937), p. 366-376.

Reçu par la Rédaction le 30. 7. 1965
