

Ein homogen wilder Knoten

von

H. G. Bothe (Berlin)

1. Einleitung Ist A eine Teilmenge des dreidimensionalen euklidischen Raumes E^3 und h ein Autohomöomorphismus von A, d.h. ein Homöomorphismus von A auf sich, so soll h auf E^3 fortsetzbar genannt werden, falls es einen Autohomöomorphismus von ganz E3 gibt, dessen Einschränkung auf A mit h übereinstimmt. Ist z.B. A = K eine einfach geschlossene zahme Kurve, so lassen sich alle Autohomöomorphismen von K bzw. alle orientierungserhaltenden Autohomöomorphismen von K auf E3 fortsetzen, je nachdem K einen invertierbaren oder nicht invertierbaren Knoten repräsentiert. (Eine einfach geschlossene Kurve K in E3 heißt zahm, falls es einen Autohomöomorphismus von E³ gibt, der K auf ein Polygon abbildet. Eine nicht zahme einfach geschlossene Kurve wird wild genannt.) Komplizierter wird die Situation, wenn man wilde einfach geschlossene Kurven betrachtet. Das Ziel dieser Arbeit ist es, eine wilde einfach geschlossene Kurve K zu konstruieren, bei der jeder Autohomöomorphismus auf E³ fortsetzbar ist. In einer folgenden Arbeit soll eine wilde einfach geschlossene Kurve K angegeben werden, bei der sich nur die identische Abbildung auf E³ fortsetzen läßt, die also die Eigenschaft hat. daß jeder Autohomöomorphismus von E3, der K als Gesamtheit festläßt, die Kurve K sogar punktweise festlassen muß.

Allgemeiner kann man die hier aufgeworfene Frage etwa so formulieren: Es sei K_0 der Einheitskreis und G_0 eine Gruppe von Autohomöomorphismen von K_0 . Wann kann man eine topologische Einbettung f von K_0 in E^3 finden, bei der fK_0 wild ist und sich genau die Autohomöomorphismen aus fG_0f^{-1} von fK_0 auf E^3 fortsetzen lassen?

Die oben angekündigten Ergebnisse beantworten diese Frage positiv in den beiden extremen Fällen, wo G_0 die volle Autohomöomorphismengruppe von K_0 ist oder nur aus der identischen Abbildung besteht. Bekannte Beispiele von wilden Kurven zeigen, daß die Antwort z.B. auch dann positiv ausfällt, wenn G_0 aus allen Autohomöomorphismen besteht, die endlich viele vorgegebene Punkte festlassen. Interessant wäre es zu wissen, welche Antwort man erhält, wenn G_0 die Gruppe aller Rotationen von K_0 ist (1). Eine weitere Frage ist, ob man bei möglicher Fortsetzung

⁽¹⁾ Die Antwort ist auch hier positiv. (Zusatz bei der Korrektur.)

aller Autohomöomorphismen aus fG_0f^{-1} auf E^3 diese Fortsetzungen so wählen kann, daß ein topologischer Isomorphismus von G_0 in die Gruppe aller Autohomöomorphismen von E^3 entsteht.

Zu den in dieser Arbeit verwendeten Bezeichnungen sei folgendes vermerkt: E^3 ist der dreidimensionale euklidische Raum, den wir auf ein festes Cartesisches Koordinatensystem beziehen, so daß man die Punkte aus E^3 als Zahlentripel (ξ_1, ξ_2, ξ_3) ansehen kann. Der Abstand in E^3 sei mit ϱ bezeichnet. Ist X eine Teilmenge von E^3 , so sei $\delta(X)$ der Durchmesser und $U(X, \varepsilon)$ die ε -Umgebung von X. Unter einer n-Polyzelle (n=2,3) verstehen wir ein in E^3 gelegenes zur Kreisscheibe bzw. zur Vollkugel homöomorphes Polyeder. Ist M eine Mannigfaltigkeit, so bezeichnet Bd M und Int M immer den Rand bzw. die Menge der inneren Punkte von M im Sinne der Theorie der Mannigfaltigkeiten. Ist X eine Teilmenge eines topologischen Raumes T, so sei \overline{X} die abgeschlossene Hülle von X in T. Unter $\{x; H(x)\}$ verstehen wir die Menge aller Elemente x, für die die Aussage H(x) zutrifft. Schließlich bezeichnen wir mit I das Einheitsintervall [0,1].

2. Einige Hilfssätze. Wir formulieren hier vier Hilfssätze, deren Beweise am Schluß der Arbeit ausgeführt werden.

Hilfssatz 1. Es sei K eine einfach geschlossene Kurve in E^3 mit folgender Eigenschaft:

Sind p, q zwei verschiedene Punkte auf K, B ein von p und q begrenzter Teilbogen von K und $\varepsilon > 0$, so gibt es einen Homöomorphismus h von E^3 auf sich mit

$$hK=K,$$

(b)
$$\varrho(hp,q) < \varepsilon,$$

(c)
$$hx = x \quad f\ddot{u}r \quad x \in E^3 - U(B, \varepsilon).$$

Unter diesen Voraussetzungen läßt sich jeder orientierungserhaltende Homöomorphismus von K auf sich zu einem Autohomöomorphismus von E^3 fortsetzen, der außerhalb einer vorgegebenen Umgebung U von K die Identität ist.

HILFSSATZ 2. Es sei M eine topologische Mannigfaltigkeit (nicht notwendig kompakt) mit dem nicht leeren Rand $R=\operatorname{Bd} M$, A eine offene Teilmenge von R und U eine Umgebung von A in M. Ferner sei h_0 ein Autohomöomorphismus von R, der auf B=R-A die Identität ist und der auf ganz R zur Identität isotop ist bei einer Isotopie $H\colon R\times I\to R$, die auf B konstant ist. (H ist also eine stetige Abbildung von $R\times I$ in R, die für jedes feste $t\in I$ einen Autohomöomorphismus $h_t x = H(x,t)$ von R liefert und bei der für alle $b\in B$ stets H(b,t)=b gilt). Dann kann man h_0 zu einem Homöomorphismus h von M auf M ausdehnen, der außerhalb U die Identität ist.

HILFSSATZ 3. Es sei Z eine 3-Zelle und C eine kompakte Teilmenge von Z, für die $C \cap \operatorname{Bd} Z$ aus höchstens zwei Punkten besteht. Ist dann f ein orientierungserhaltender Homöomorphismus von Z auf sich, der auf $C \cap \operatorname{Bd} Z$ die Identität ist, so gibt es einen Autohomöomorphismus h von Z, der auf $\operatorname{Bd} Z$ mit f übereinstimmt und auf C die Identität ist.

HILFSSATZ 4. Es sei Z eine 3-Polyzelle und Z_i $(i=0,\,\pm 1,\,\pm 2,\,...)$ eine Familie von 3-Polyzellen mit folgenden Eigenschaften:

(a)
$$Z_i \subset \operatorname{Int} Z$$
,

(b)
$$Z_i \cap Z_{i+1} = D_i \text{ ist eine } 2\text{-Polyzelle},$$

(c)
$$Z_i \cap Z_j = 0 \text{ für } |i-j| \geqslant 2,$$

(d) Es gibt zwei voneinander verschiedene Punkte a, e auf BdZ, so daβ gilt

$$\limsup_{i\to+\infty} Z_i = e, \quad \limsup_{i\to-\infty} Z_i = a.$$

Weiter seien für $i=0,\,\pm 1,\,\pm 2,\,...$ f $_i$ orientierungserhaltende Homöomorphismen von Z_i auf Z_{i+1} mit

(e)
$$f_i D_i = D_{i+1}, \quad f_i D_{i-1} = D_i,$$

(f)
$$f_i x = f_{i+1} x \quad f \ddot{u} r \quad x \in D_i.$$

Dann gibt es einen Autohomöomorphismus g von Z, der auf $\operatorname{Bd} Z$ die Identität ist und auf Z_i mit f_i übereinstimmt.

3. Würmer und Ringe. Ein Wurm $\mathfrak W$ ist eine endliche Folge (Z_1,\ldots,Z_n) von 3-Polyzellen, für die gilt:

(a)
$$n \geqslant 3$$
,

(b)
$$Z_i \cap Z_{i+1} = D_i$$
 ist eine 2-Polyzelle,

(c)
$$Z_i \cap Z_j = 0$$
, falls $|i-j| \geqslant 2$.

 Z_1 heißt der Kopf von $\mathfrak B$ und Z_n der Schwanz von $\mathfrak B$. Ist $\mathfrak B$ ein Wurm, so ist $|\mathfrak B|=\bigcup\limits_{i=1}^n Z_i$ eine 3-Polyzelle. Wir sagen, daß ein Wurm $\mathfrak B$ $=(Z_1,\ldots,Z_n)$ in eine 3-Polyzelle Z eingespannt ist und dort den Knoten z repräsentiert, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

a)
$$Z_2 \cup ... \cup Z_{n-1} \subset Int Z, \quad Z_1 \cup Z_n \subset Z,$$

- (b) $D_0=\operatorname{Bd} Z\cap Z_1$ und $D_n=\operatorname{Bd} Z\cap Z_n$ sind zu D_1 und D_{n-1} disjunkte 2-Polyzellen,
- (e) Ist S eine in $|\mathfrak{M}|$ unverknotete orientierte Sehne, die von einem Punkt aus D_0 zu einem Punkt aus D_n verläuft, so repräsentiert S in Z den Knoten \varkappa .

(Siehe hierzu [6]. Aus den Ergebnissen dieser Arbeit folgt leicht, daß der Knoten z durch W eindeutig bestimmt ist.)

Ein Ring ist eine Folge $\Re = (Z_1, ..., Z_r)$ von 3-Polyzellen $(r \geqslant 4)$, bei der für jedes i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ die Folge $(Z_{i+1}, ..., Z_r, Z_1, ..., Z_{i-1})$ ein Wurm ist. Ein Teilwurm eines Ringes ist ein Wurm, der nur aus Zellen dieses Ringes gebildet ist. Für einen Ring \Re ergibt die Vereinigung $|\Re| = \bigcup_{i=1}^r Z_i$ der zu \Re gehörenden Zellen einen Vollring im Sinne von [7], der durch die Anordnung der Zellen von \Re eine Orientierung erhält und daher in E^3 einen Knoten repräsentiert. Für eine spätere Anwendung machen wir noch folgende Bemerkung:

(A) Ist $\Re=(Z_1,\ldots,Z_r)$ ein Ring und K eine zahme einfach geschlossene orientierte Kurve in $|\Re|$, die eine der 2-Polyzellen $Z_i \cap Z_{i+1}$ ($i=1,\ldots,r-1$) oder $Z_r \cap Z_1$ in genau einem Punkt schneidet und durchstößt, so ist das Geschlecht des von K repräsentierten Knotens nicht kleiner als das des von \Re repräsentierten Knotens.

Der Beweis hierfür folgt sofort aus [7] Seite 192, wenn man bemerkt, daß man nach [3], [5] jede zahme einfach geschlossene Kurve beliebig nahe durch ein gleichverknotetes einfach geschlossenes Polygon approximieren kann.

4. Konstruktion von K. Wir konstruieren hier in E^3 eine einfach geschlossene Kurve K, von der später gezeigt wird, daß sie wild ist und daß sich jeder Autohomöomorphismus von K auf E^3 fortsetzen läßt. Dazu führen wir zunächst folgende Bezeichnungen ein:

$$egin{aligned} Q &= \{ (\xi_1,\,\xi_2,\,\xi_3); \ |\xi_i| \leqslant 1 \}, & E_{ au} &= \{ (\xi_1,\,\xi_2,\,\xi_3); \ \xi_1 = au \} \ , \ Q^- &= Q \cap igcup_{ au \leqslant 0} E_{ au}, & Q^+ &= Q \cap igcup_{ au \geqslant 0} E_{ au}, \ D^- &= Q \cap E_{-1}, & D^0 &= Q \cap E_0 \ , & D^+ &= Q \cap E_1 \ . \end{aligned}$$

 σ sei die Spiegelung von E^3 an der Ebene E_0 , d.h. es gilt $\sigma(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (-\xi_1, \xi_2, \xi_3)$.

Es ist nicht schwer, in Q^- einen Wurm $\mathfrak{W}^-=(Z_1,\ldots,Z_m)$ und für $1\leqslant i\leqslant m$ je einen orientierungserhaltenden semilinearen Homöomorphismus φ_i von Q auf Z_i zu konstruieren, so daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (a) W repräsentiert in Q einen nicht trivialen Knoten z.
- (b) Setzen wir $D_0 = Z_1 \cap \operatorname{Bd} Q^-$, $D_i = Z_i \cap Z_{i+1}$ (i = 1, ..., m-1), $D_m = Z_m \cap \operatorname{Bd} Q^-$, so gilt

$$D_0 \subseteq \operatorname{Int} D^-, \quad D_m \subset \operatorname{Int} D^0.$$

(c)
$$\varrho(\varphi_i x, \varphi_i y) \leqslant \frac{1}{2}\varrho(x, y) \quad (x, y \in Q)$$
.

(d)
$$\varphi_i D^- = D_{i-1}, \quad \varphi_i D^+ = D_i \quad (i = 1, ..., m).$$

(e)
$$\varphi_i x = \varphi_{i+1} \sigma x \quad (x \in D^+, i = 1, ..., m-1)$$
.

icm[©]

Wir setzen

$$\mathfrak{W}^{1}=(Z_{1},\,...\,,\,Z_{m},\,Z_{m+1},\,...\,,\,Z_{2m})\;,$$

wobei $Z_i = \sigma Z_{2m-i+1}$ $(m < i \leqslant 2m)$. \mathfrak{W}^1 ist dann ein Wurm in Q, der dort den nicht trivialen Knoten $\lambda = \varkappa \cdot \varkappa'$ repräsentiert, wobei \varkappa' den aus \varkappa durch Spiegelung und Umorientierung hervorgehenden Knoten bezeichnet (siehe [6]). Entsprechend sei $\varphi_i = \sigma \varphi_{2m-i+1}\sigma$ $(m < i \leqslant 2m)$ ein orientierungserhaltender semilinearer Homöomorphismus von Q auf Z_i . Es gelten dann die Eigenschaften (c), (d), (e) auch für i > m, wenn man die D_i (i > m) nur entsprechend definiert. Zur Abkürzung sei 2m = n gesetzt.

Sukzessive definieren wir nun eine Folge $\mathfrak{W}^1,\,\mathfrak{W}^2,\,\mathfrak{W}^3,\,\dots$ von Würmern in Q indem wir

$$\mathfrak{W}^{i+1} = \varphi_1 \mathfrak{W}^i, \varphi_2 \mathfrak{W}^i, ..., \varphi_n \mathfrak{W}^i$$

setzen; d.h. es sei \mathfrak{W}^{i+1} der Wurm, der entsteht, wenn man die (in Z_j gelegenen) Würmer $\varphi_j\mathfrak{W}^i$ zu einem Wurm in Q aneinanderreiht. Induktiv sieht man leicht, daß die Würmer \mathfrak{W}^i die folgenden Eigenschaften bezitzen:

- (1) Die Zellen von \mathfrak{B}^i haben höchstens den Durchmesser $2^{-i+1}\sqrt{3}$.
- (2) \mathfrak{W}^i repräsentiert in Q einen Knoten $\lambda^{j(i)}$ mit $\lim j(i) = +\infty$.
- (3) Es ist $\sigma |\mathfrak{W}^i| = |\mathfrak{W}^i|$.

Aus (1) folgt, daß $L=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}|\mathfrak{M}^i|$ ein Bogen ist mit einem Endpunkt a in Int D^- und einem Endpunkt b in Int D^+ , der aber sonst ganz im Innern von Q verläuft. Aus (3) folgt weiter $\sigma L=L$. Als weitere wichtige Eigenschaft der Würmer \mathfrak{M}^i -vermerken wir: Ist Z eine Zelle aus \mathfrak{M}^i , so gibt es einen orientierungserhaltenden semilinearen Homöomorphismus von Q auf Z, der Produkt gewisser Homöomorphismen φ_i ist. Dieser Homöomorphismus ist durch Z eindeutig bestimmt und soll mit φ_Z bezeichnet werden. Es gilt $\varphi_Z L = L \cap Z$. Denken wir L von a nach b orientiert, so ist $\varphi_Z|_L$ eine orientierungserhaltende Abbildung von L in sich.

Ist Z eine 3-Polyzelle und L^* ein orientierter Bogen, dessen Endpunkte auf $\operatorname{Bd} Z$ liegen, der aber sonst ganz im Innern von Z verläuft, so nennen wir L^* eine λ^∞ -verknotete Sehne von Z, falls es einen orientierungserhaltenden semilinearen Homöomorphismus h von Q auf Z gibt, der L unter Beachtung der Orientierung in L^* überführt. Der Punkt ha heißt dann Anfanq und der Punkt hb Ende von L^* .

Später werden wir die folgende Bemerkung anwenden:

(B) Sind Z_1, Z_2 zwei 3-Polyzellen mit den λ^{∞} -verknoteten Sehnen L_1, L_2 und ist g ein orientierungserhaltender Homöomorphismus von Z_1 auf Z_2 , der Anfang und Ende von L_1 in Anfang bzw. Ende von L_2 überführt, so gibt es einen orientierungserhaltenden Homöomorphismus g' von Z_1 auf Z_2 mit $g'L_1 = L_2$ und g'x = gx für $x \in \operatorname{Bd} Z_1$.

Ein homogen wilder Knoten

Der Beweis folgt leicht aus dem Hilfssatz 3, wenn man daran denkt, daß es ja via Q einen orientierungserhaltenden Homöomorphismus g^* von Z_1 auf Z_2 gibt mit $g^*L_1=L_2$ (man setze im Hilfssatz 3 einfach $f=gg^{*-1}\colon Z_2\to Z_2,\ C=L_2$ und $g'=hg^*$).

Es sei

$$P = \{ (\xi_1, \, \xi_2, \, \xi_3); \, |\xi_1| < \tfrac{1}{2}, \, |\xi_2| < \tfrac{1}{2} \} \quad \text{ und } \quad T = Q - P \ .$$

T ist also ein zum Volltorus homöomorphes Polyeder, das sich in die beiden 3-Polyzellen $T^+ = T \cap Q^+$ und $T^- = T \cap Q^-$ zerlegen läßt. Der Durchschnitt $T^+ \cap T^-$ besteht aus zwei Rechtecken, die so mit F_1 bzw. F_2 bezeichnet seien, daß $(0, -\frac{3}{4}, 0)$ in F_1 liegt. Mit ϑ bezeichnen wir die Drehung des E^3 um die ξ_3 -Achse mit dem Winkel π . Es gilt also $\vartheta T^+ = T^-$, $\vartheta T^- = T^+$ und $\vartheta F_1 = F_2$, $\vartheta F_2 = F_1$. Weiter bezeichnen wir mit ψ einen fest gewählten orientierungserhaltenden semilinearen Homöomorphismus von Q auf T^+ , der D^- auf F_1 und D^+ auf F_2 so abbilden möge, daß

$$\sigma' \psi x = \psi \sigma x$$

gilt, wobei σ' die Spiegelung an der $\xi_1-\xi_3$ -Ebene ist (σ war die Spiegelung an der $\xi_2-\xi_3$ -Ebene). Hieraus folgt

$$\vartheta \psi x = \sigma \sigma' \psi x = \sigma \psi \sigma x .$$

Ist $x \in D^-$ oder $x \in D^+$, so gilt insbesondere

$$\vartheta \psi x = \psi \sigma x$$
.

Wir betrachten nun für i=1,2,... die Würmer $\psi\mathfrak{B}^i$ in T^+ und die Würmer $\vartheta\psi\mathfrak{B}^i$ in T^- . Die Konstruktionen waren so ausgeführt, daß durch Aneinanderreihen dieser beiden Würmer ein Ring $\mathfrak{R}^i=\psi\mathfrak{B}^i,\vartheta\psi\mathfrak{B}^i$ entsteht. Bezeichnen nämlich D_1 bzw. D_2 die in D^- bzw. D^+ gelegenen Teile von $|\mathfrak{B}^i| \cap \operatorname{Bd} Q$, so gilt $\sigma D_1 = D_2$ und damit $\vartheta\psi D_1 = \psi D_2, \vartheta\psi D_2 = \psi D_1$. Da $\psi\mathfrak{B}^i$ in T^+ und $\vartheta\psi\mathfrak{B}^i$ in T^- jeweils den Knoten $\lambda^{i(i)}$ repräsentieren, repräsentiert der Vollring \mathfrak{R}^i in E^3 den Knoten $\lambda^{2j(i)}$. Die Durchschnitte

$$C^+ = igcap_{i=1}^\infty |\psi \mathfrak{W}^i| = \psi L \,, \qquad C^- = igcap_{i=1}^\infty |\partial \psi \mathfrak{W}^i| = \partial \psi L \,.$$

mit den mittels ψ bzw. $\vartheta \psi$ von L her übernommenen Orientierungen sind λ^{∞} -verknotete Sehnen in T^+ bzw. T^- . Wir definieren die zu konstruierende Kurve K als

$$K = C^+ \cup C^- = \bigcap_{i=1}^{\infty} |\mathfrak{R}^i|$$
.

Die von C^+ und C^- in K induzierten Orientierungen stimmen überein, so daß K auf natürliche Weise orientiert ist.

Ist Z eine Zelle von $\psi\mathfrak{B}^i$ und $Z=\psi Z'$, wo Z' eine Zelle von \mathfrak{B}^i ist, so soll $\psi\varphi_{Z'}$ mit φ_Z bezeichnet werden ($\varphi_{Z'}$ ist der oben definierte Homöomorphismus von Q auf Z'). Ähnlich sei für jede Zelle Z aus $\vartheta\psi\mathfrak{B}^i$ die Abbildung $\vartheta\psi\varphi_{Z'}$ mit φ_Z bezeichnet, wobei Z' jetzt die Zelle aus \mathfrak{B}^i ist, für die $\vartheta\psi Z'=Z$ gilt. Für jedes Z aus \mathfrak{R}^i ist dann φ_Z ein orientierungserhaltender semilinearer Homöomorphismus von Q auf Z. Dabei gilt $\varphi_Z L=K\cap Z$, so daß $K\cap Z$ bei der mittels φ_Z von L her übernommenen Orientierung eine λ^∞ -verknotete Sehne von Z ist. Diese Orientierung stimmt mit der von K auf $K\cap Z$ induzierten Orientierung überein. Insbesondere ist mit der Orientierung in jedem Bogen $K\cap Z$ ein Anfang und ein Ende ausgezeichnet. Es ergibt sich hieraus die folgende Bemerkung:

- (C) Ist $Z \in \mathbb{R}^i$ und $Z^* \in \mathbb{R}^j$ ($j \ge i$) und gilt weder $Z \cap Z^* = 0$ noch $Z^* \subseteq Z$, so ist $Z \cap Z^*$ eine 2-Polyzelle. Der Durchschnitt $Z \cap Z^* \cap K$ besteht dann aus einem Punkt, der entweder Anfang von $K \cap Z$ und Ende von $K \cap Z^*$ oder Ende von $K \cap Z$ und Anfang von $K \cap Z^*$ ist.
- 5. K ist wild. Wir nehmen an, K wäre zahm. K erfüllt dann bzgl. eines jeden Ringes \Re^i die Voraussetzungen der Bemerkung (A) vom Schluß des Abschnittes 3. Es ist also das Geschlecht $g(\varkappa)$ des von K repräsentierten Knotens \varkappa nicht kleiner als das Geschlecht $g(\lambda^{2j(0)})$ des von \Re^i repräsentierten Knotens $\lambda^{2j(i)}$. Nun gilt $g(\lambda^{2j(0)}) = 2j(i)g(\lambda)$ (siehe [6]), und da λ nicht der triviale Knoten ist, muß $g(\lambda)$ positiv sein. Wegen $j(i) \to \infty$ ($i \to \infty$) müßte das Geschlecht von \varkappa unendlich groß sein, was der Zahmheit von K widerspricht.
- 6. Die orientierungserhaltenden Autohomöomorphismen von K lassen sich auf E^3 fortsetzen. Um das zu zeigen, weisen wir nach, daß K die Voraussetzungen des Hilfssatzes 1 erfüllt: Es seien also p, q zwei verschiedene Punkte aus K, B ein von p und q begrenzter Teilbogen von K und $\varepsilon > 0$. Wir wählen i so groß, daß alle Zellen aus \Re^i einen kleineren Durchmesser als ε haben und es einen Teilwurm

$$\mathfrak{B}^0=(Z_1^0,\ldots,Z_r^0)$$

von \Re^i gibt, für den gilt

$$B\subseteq \operatorname{Int}|\mathfrak{B}^0|, \quad |\mathfrak{B}^0|\subseteq U(B,\varepsilon)$$
.

Die Menge $|\mathfrak{B}^0|$ ist eine 3-Polyzelle, und $K \cap |\mathfrak{B}^0|$ ist ein Teilbogen von K. Ist $j \ge 1$, so sei

$$\mathfrak{B}^j = (Z^j_1, \ldots, Z^j_{rj}) \quad (r_j = rn^j)$$

der Wurm bestehend aus allen in $|\mathfrak{D}^0|$ enthaltenen Zellen von \mathfrak{R}^{i+i} , und zwar sei die Reihenfolge dabei so gewählt, daß der Kopf von \mathfrak{D}^i im Kopf

von \mathfrak{R}^0 liegt. Da jede Zelle aus \mathfrak{R}^k genau n Zellen aus \mathfrak{R}^{k+1} enthält. haben wir

$$\begin{split} |\mathfrak{B}^{j+1}| & \cap Z_1^j = Z_1^{j+1} \cup ... \cup Z_n^{j+1} \;, \\ |\mathfrak{B}^{j+1}| & \cap Z_{\eta}^j = Z_{\eta+1-n+1}^{j+1} \cup ... \cup Z_{\eta+1}^{j+1} \;. \end{split}$$

Wir setzen

$$\mathfrak{B}_0 = (Z_2^0, ..., Z_{r-1}^0),$$

$$\mathfrak{B}_{-j} = (Z_2^j, ..., Z_n^j), \quad \mathfrak{B}_j = (Z_{r_j-n+1}^j, ..., Z_{r_j-1}^j) \quad (j \geqslant 1)$$

und schreiben die Folgen \mathfrak{B}_k $(-\infty < k < +\infty)$ folgendermaßen hintereinander

$$...,\mathfrak{V}_{-3},\mathfrak{V}_{-2},\mathfrak{V}_{-1},\mathfrak{V}_{0},\mathfrak{V}_{1},\mathfrak{V}_{2},\mathfrak{V}_{3},...$$

Es ergibt sich eine nach beiden Seiten unendliche Folge von 3-Polyzellen. die wir irgendwie mit

$$\ldots, Z_{-3}, Z_{-2}, Z_{-1}, Z_0, Z_1, Z_2, \ldots$$

bezeichnen. Man sieht dann leicht, daß diese Zellen Z_i bzgl. der 3 - Polyzelle $Z=|\mathfrak{D}^0|$ die Voraussetzungen (a) bis (d) des Hilfssatzes 4 erfüllen (hierbei sind a und e die beiden Punkte, in denen K den Rand von |30 durchstößt). Weiterhin sei noch vermerkt:

$$K \cap |\mathfrak{B}^{0}| \subseteq igcup_{i=-\infty}^{+\infty} Z_{i} \cup \{e, a\}$$
 .

Zu jedem i können wir leicht einen semilinearen orientierungserhaltenden Homöomorphismus f_i von Z_i auf Z_{i+1} so konstruieren, daß die Bedingungen (e) und (f) des Hilfssatzes 4 erfüllt sind und außerdem der Schnittpunkt von K mit $Z_i \cap Z_{i+1}$ in den Schnittpunkt von K mit $Z_{i+1} \cap Z_{i+2}$ übergeht. Wie oben vermerkt, ist $K \cap Z_i$ eine λ^{∞} -verknotete Sehne in Z_i , und f_i führt Anfang und Ende von $K \cap Z_i$ in Anfang und Ende von $K \cap Z_{i+1}$ über (letzteres folgt aus der Bemerkung (0) vom Schluß des Abschnittes 4). Nach der Bemerkung (B) aus Abschnitt 4 dürfen wir voraussetzen, daß $f_i(K \cap Z_i) = K \cap Z_{i+1}$ wird. Wenden wir den Hilfssatz 4 an, so erhalten wir einen Autohomöomorphismus g von $|\mathfrak{B}^0|$ mit den Eigenschaften

$$gx = x \quad (x \in \operatorname{Bd} |\mathfrak{B}^0|) \; ,$$
 $gZ_i = Z_{i+1}, \quad g(K \cap |\mathfrak{B}^0|) = K \cap |\mathfrak{B}^0| \; .$

. Wir denken g durch die identische Abbildung auf ganz E^3 fortgesetzt. Liegt p etwa in Z_k und q in Z_h , so haben wir $g^{h-k}p \in Z_h$. Wegen $\delta(Z_h) < \varepsilon$ ergibt sich hieraus $\varrho(g^{h-k}p,q) < \varepsilon$. Weiter gilt $g^{h-k}K = K$, und da $|\mathfrak{B}^0|$ in $U(K,\varepsilon)$ enthalten ist, muß g^{h-k} außerhalb $U(K,\varepsilon)$ die Identität sein. Die Abbildung g^{h-k} erfüllt also alle Voraussetzungen des Hilfssatzes 1.

7. Jeder Autohomöomorphismus von K läßt sich auf $E^{\mathfrak{z}}$ fortsetzen. Es genügt zu zeigen, daß sich wenigstens ein orientierungsumkehrender Autohomöomorphismus h von K auf E^3 fortsetzen läßt. (Jeder orientierungsumkehrende Autohomöomorphismus von K is ja dann Produkt von h mit einem orientierungserhaltenden Autohomöomorphismus von K.) Wir betrachten die Spiegelungen σ und σ' an der $\xi_2 - \xi_3$ -Ebene bzw. an der $\xi_1 - \xi_3$ -Ebene. Wie wir im Abschnitt 4 bemerkten gilt für alle Punkte $x \in Q$

$$\vartheta \psi x = \sigma \sigma' \psi x = \sigma \psi \sigma x.$$

Hieraus folgt

$$\sigma C^+ = \sigma \psi L = \sigma \psi \sigma L = \sigma \sigma' \psi L = \partial \psi L = C^-,$$

$$\sigma C^- = \sigma \partial \psi L = \sigma' \psi L = \psi \sigma L = \psi L = C^+,$$

und damit

$$\sigma K = \sigma(C^+ \cup C^-) = K.$$

Die Spiegelung σ induziert auf K einen Autohomöomorphismus h, der sicher die Orientierung von K umkehrt und durch σ auf $E^{\mathfrak{s}}$ fortgesetzt wird.

8. Beweis des Hilfssatzes 1.

(I) Wir zeigen zuerst: Erfüllt K die Voraussetzungen des Hilfssatzes 1 und ist C ein in U(B, \varepsilon) enthaltener Teilbogen von K, der p im Innern enthält, so gibt es einen Autohomöomorphismus h von E3, der außer (a), (b), (c) noch die folgende Bedingung erfüllt:

$$(\mathbf{d}) q \in hC.$$

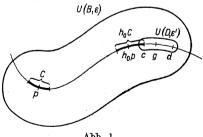


Abb. 1.

Es bedeutet offenbar keine Einschränkung, beim Beweis anzunehmen, daß K nicht ganz in $\overline{U(B,\varepsilon)}$ enthalten ist, so daß die abgeschlossene Hülle der B enthaltenden Komponente von $K \cap U(B, \varepsilon)$ ein Bogen B^* ist. Es sei nun h_0 ein Autohomöomorphismus von E^3 , der (a), (b) und (c) erfüllt. Wir nehmen an, $q \notin h_0 C$. Offenbar ist $h_0 B^* = B^*$. Es sei c der Endpunkt von h_0C , der in B^* die Punkte h_0p und q trennt und d ein Punkt im Innern von B^* , der durch q von c getrennt wird. Der von c und d begrenzte Teilbogen von B^* sei D. Wählt man nun ε' genügend klein und wendet man die Voraussetzung des Hilfssatzes 1 an, wobei man für p, q, B und ε hier c, d, D und ε' setzt, so erhält man einen Autohomöomorphismus h_1 von E^3 mit $h_1h_0p=h_0p$ und q ϵ h_1h_0C (siehe Abb. 1). Der Homöomorphismus $h=h_1h_0$ erfüllt dann (a), (b), (c) und (d).

(II) Wir zeigen, daß wir bei der Formulierung des Hilfssatzes 1 die Bedingung (b) durch folgende schärfere Bedingung ersetzen dürfen:

$$(b')$$
 $hp = q$.

 B^* sei wie in (I) definiert. Mit $C_1 \supseteq C_2 \supseteq C_3 \supseteq ...$ bezeichnen wir eine Folge von Teilbogen von B^* , die alle p im Innern enthalten und deren Durchschnitt nur aus p besteht. Es ist dann nicht schwer, eine Folge $h_1, h_2, ...$ von Autohomöomorphismen des E^3 zu konstruieren, bei der die folgenden Bedingungen erfüllt sind (hierbei ist $f_n = h_n ... h_1$ $(n \ge 1)$ zu setzen):

- (a) $h_n K = K$.
- (β) $h_n x = x \text{ für } x \in E^3 U(B, \varepsilon).$
- (y) Der von f_np und q begrenzte Teilbogen von B hat höchstens den Durchmesser 2^{-n-2} .
- (δ) $\varrho(h_n x, x) < 2^{-n} \text{ für } n > 1.$
- (a) Ist $\varrho(x, K) \ge n^{-1}$, so gilt $h_n f_{n-1} x = f_{n-1} x$ (n = 2, 3, ...).
- $(\zeta) \quad q \in \operatorname{Int} f_n C_n.$
- (η) Ist $x \in K C_{n-1}$, so gilt $h_n f_{n-1} x = x$ (n = 2, 3, ...).

Wegen (δ) konvergiert die Folge f_1, f_2, \dots gegen eine stetige Abbildung h von E^3 in sich. Wegen (ϵ) und (η) ist h eineindeutig und eine Abbildung auf ganz E^3 . (α), (γ) und (β) sichern, daß h den Bedingungen (a), (b') und (c) genügt.

(III) Es sei $\{p_1, p_2, ...\}$ eine abzählbare dichte Teilmenge von K. Wir bezeichnen mit \mathfrak{C}_n die Menge aller Teilbogen, in die K durch $p_1, ..., p_n$ zerlegt wird $(n \ge 2)$ und mit δ_n den maximalen Durchmesser der Bogen aus \mathfrak{C}_n . Es gilt $\lim \delta_n = 0$. Ist $\mathfrak{C} = \bigcup_{n=2}^{\infty} \mathfrak{C}_n$, so kann man jedem $C \in \mathfrak{C}$ eine offene Menge U(C) so zuordnen, daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (ϑ) $U(C) \cap K = \operatorname{Int} C$.
- (i) $U(C) \subset U$.
- (κ) $\delta(U(C)) \leqslant 2\delta(C)$.
- (λ) $C \subseteq C' \Rightarrow U(C) \subseteq U(C')$.
- (μ) Int $C \cap \text{Int } C' = 0 \Rightarrow U(C) \cap U(C') = 0$.



Es sei nun k ein orientierungserhaltender Autohomöomorphismus von K. Nach (II) ist es nicht schwer, eine Folge $h_1, h_2, ...$ von orientierungserhaltenden Autohomöomorphismen des E^3 zu konstruieren, die folgende Bedingungen erfüllt (es sei $f_n = h_n ... h_1$ $(n \ge 1)$ und $q_n = k^{-1}p_n$ gesetzt):

- (v) $h_n K = K$.
- (ξ) $h_n p_i = p_i \ (i < n), \ h_n f_{n-1} q_n = p_n.$
- (o) Liegt $f_{n-1}q_n$ (und damit auch p_n) in dem Bogen $C \in \mathfrak{C}_{n-1}$, so ist $h_n x = x$ für $x \in E^3 U(C)$.
- (π) Ist $\varrho(x, K) \geqslant n^{-1}$, so ist $h_n f_{n-1} x = f_{n-1} x$.

(Um (ξ) im Falle n=3 zu erfüllen, bedenke man, daß k orientierungserhaltend ist). Die Folge f_1,f_2,\ldots konvergiert dann gegen einen Homöomorphismus f von E^3 auf sich, der auf K mit k übereinstimmt und auf E^3-U die Identität ist.

9. Beweis des Hilfssatzes 2. Wir dürfen voraussetzen, daß M als abgeschlossene Menge in einen euklidischen Raum E^r eingebettet ist. Die Metrik von M sei die von E^r induzierte. Nach [4] gibt es einen Homöomorphismus k von $R \times I$ in M mit k(x,0) = x ($x \in R$). Es ist nicht schwer, auf R eine stetige reellwertige Funktion φ zu definieren, die folgende Bedingungen erfüllt:

(a)
$$\varphi b = 0$$
 für $b \in B$, $0 < \varphi a < 1$ für $a \in A$;

(
$$\beta$$
) $\delta(k(\lbrace x\rbrace \times [0, \varphi x])) < 1$ für $x \in R$;

$$(\gamma) k(\{a\} \times [0, \varphi a]) \subseteq U f \ddot{u} r a \in A.$$

Wir definieren $f: R \times I \rightarrow M$ durch

$$f(x, t) = k(x, t \cdot \varphi x)$$
.

Diese Abbildung f hat folgende Eigenschaften:

- (8) Die Menge $X = f(R \times I)$ ist abgeschlossen in M.
- (ϵ) $X \cap \overline{M-X} \subseteq f(R \times \{1\})$.
- (ζ) Ist U eine offene Teilmenge von $R \times I$, die mit jedem Punkt (b, t) aus $B \times I$ stets die ganze Strecke $\{b\} \times I$ enthält, so ist fU offen in X.
- (7) Es gilt f(x, t) = f(x', t') genau dann, wenn x = x' und t = t' oder wenn $x = x' \in B$.

Um (δ) zu beweisen, sei (y_n) eine Folge von Punkten aus X mit dem in M gelegenen Limes y. Wir wählen Folgen (x_n) , (t_n) $(x_n \in R, t_n \in I)$, so daß $y_n = f(x_n, t_n)$ wird. Wegen (β) ist (x_n) beschränkt und besitzt daher eine in E^r konvergente Teilfolge (x_{i_n}) , deren Limes x sicher in R liegt, da ja M in E^r und R in M abgeschlossen ist. Indem wir von der Folge (y_{i_n}) eventuell nochmals zu einer Teilfolge (y_{j_n}) übergehen, können wir

erreichen, daß auch (t_{f_n}) gegen einen Wert t aus I konvergiert. Dann ist $y = f(x, t) \in X$.

Wir beweisen jetzt (s): Dazu sei y=f(x,t) ϵ X und y ϵ $f(R\times\{1\})$. Es genügt zu zeigen, daß y dann in M eine ganz in X enthaltene Umgebung besitzt. Aus y ϵ $f(R\times\{1\})$ folgt $t\neq 1$ und x ϵ A. Sei zunächst 0< t<1. Dann besitzt y in X eine zu E^n homöomorphe Umgebung, die nach allgemeinen Sätzen über Mannigfaltigkeiten auch Umgebung von y in M sein muß (n ist hierbei die Dimension von M). Im Fall t=0 verläuft der Beweis entsprechend.

Die Beweise von (ζ) und (η) folgen unmittelbar aus den entsprechenden Definitionen.

Definieren wir die Abbildung j: $R \times I \rightarrow R \times I$ durch

$$j(x,t) = (H(x,t),t),$$

so ist wegen (η) und der über H gemachten Voraussetzungen auch die Abbildung

$$h = fjf^{-1} \colon X \to X$$

definiert und eineindeutig. Daß h stetig ist, erkennt man, wenn man beachtet, daß wegen (ζ) die Urbilder von offenen Mengen offen sind. Schließlich folgt aus der Definition von h sofort, daß die Menge

$$X \cap \overline{M-X} \subseteq f(R \times \{1\})$$

bei h identisch auf sich abgebildet wird. Wegen (ε) läßt sich h durch die identische Abbildung auf ganz M fortsetzen.

10. Beweis des Hilfssatzes 3. Wir bezeichnen die Einschränkung von f auf $\operatorname{Bd} Z$ mit h_0 . Der Homöomorphismus h_0 von $\operatorname{Bd} Z$ auf sich ist dann orientierungserhaltend und damit zur Identität isotop (siehe [1], [2]). Es ist nun nicht schwer, eine solche Isotopie zwischen h_0 und der Identität zu finden, die auf $C \cap \operatorname{Bd} Z$ konstant ist, die also die höchstens zwei Punkte aus $C \cap \operatorname{Bd} Z$ festläßt. Setzen wir $A = \operatorname{Bd} Z - C$ und U = Z - C, so gibt es nach Hilfssatz 2 einen Autohomöomorphismus h von Z, der auf $\operatorname{Bd} Z$ mit h_0 und damit auch mit f übereinstimmt und der auf C = Z - U die Identität ist.

11. Beweis des Hilfssatzes 4. Man zeigt leicht, daß

$$P = \bigcup_{i=-\infty}^{+\infty} Z_i \cup \{a, e\}$$

eine 3-Zelle ist. Die Menge

$$M = Z - (\operatorname{Int} P \cup \{a, e\})$$

ist eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit mit dem Rand

$$R = (\operatorname{Bd} P \cup \operatorname{Bd} Z) - \{a, e\}.$$

icm®

Wir definieren durch

$$fx = f_i x \ (x \in Z_i), \quad fa = a, \quad fe = e$$

einen orientierungserhaltenden Homöomorphismus von P auf sich. Dann ist die Einschränkung von f auf $\operatorname{Bd} P$ ein orientierungserhaltender und damit zur Identität isotoper Homöomorphismus von $\operatorname{Bd} P$ auf sich (siehe [1], [2]). Ähnlich wie beim Beweis zum Hilfssatz 3 kann man diese Isotopie so wählen, daß a und e festgelassen werden, und man erkennt so, daß auch die Einschränkung von f auf $\operatorname{Bd} P - \{a, e\}$ auf dieser Menge zur Identität isotop ist. Wir setzen

$$U = \{x; x \in M, \varrho(x, P) < \varrho(x, \operatorname{Bd} Z)\}.$$

Durch Anwendung des Hilfssatzes 2 auf die Mannigfaltigkeit M mit

$$h_0 x = \begin{cases} fx & ext{für} & x \in \operatorname{Bd} P - \{a, e\}, \\ x & ext{für} & x \in \operatorname{Bd} Z - \{a, e\} \end{cases}$$

können wir h_0 auf M fortsetzen. Da $P-\{a,e\}$ und M in $Z-\{a,e\}$ abgeschlossen sind und f auf

$$\operatorname{Bd} P - \{a, e\} = (P - \{a, e\}) \cap M$$

die Abbildung h_0 induziert, wird damit auch die Abbildung f von $P - \{a, e\}$ auf $Z - \{a, e\}$ fortgesetzt. Es ist nun nicht schwer einzusehen, daß man auch noch die beiden Punkte a und e in diese Fortsetzung einbeziehen kann.

Literaturverzeichnis

- [1] R. Baer, Kurventypen auf Flächen, J. Reine Angew. Math. 156 (1927), S. 231-246.
- [2] Isotopie von Kurven auf orientierbaren, geschlossenen Flächen und ihr Zusammenhang mit der topologischen Deformation der Flächen, J. Reine Angew. Math. 159 (1928), S. 101-116.
- [3] R. H. Bing, An alternative proof that 3-manifolds can be triangulated, Ann. of Math. 69 (1959), S. 37-65.
- [4] M. Brown, Locally flat embeddings of topological manifolds, Ann. of Math. 75 (1962), S. 331-341.
- [5] E. E. Moise, Affine structures in 3-manifolds. IV, Ann. of Math. 55 (1952),S. 215-222.
- [6] H. Schubert, Die eindeutige Zerlegbarkeit eines Knotens in Primknoten, Sitzungsber. d. Heidelberger Akad. d. Wiss. 1949 3. Abhandlung.
 - [7] Knoten und Vollringe, Acta Math. 90 (1953), S. 131-286.

Reçu par la Rédaction le 18.8.1966