Об универсальных бикомпактных и метрических пространствах данной размерности

Б. А. Пасынков (Москва)

Статья посвящена двум методам в теории универсальных пространств: методу факторизационных теорем (часть I) и методу обобщённых произведений (часть II).

Факторизационные теоремы утверждают, что в определённых условиях для отображения $f\colon X\to Z$ существует такое пространство Y и такие отображения $g\colon X\to Y$ и $h\colon Y\to Z$, что $f=hg$ и $\dim Y\leqslant \dim X$, а $w(Y)\leqslant w(Z)$ (⁰).

Первая факторизационная теорема, когда X, Y и Z — бикомпакты, была доказана С. Мардешичем в 1960 г. [1]. В предлагаемой статье факторизационная теорема устанавливается для случая, когда X — нормальное (даже вполне регулярное) пространство, а Y и Z — метрические пространства (¹), [2]. Факторизационные теоремы приложимы к довольно широкому кругу вопросов теории размерности (совпадение различных определений размерности, [3], бикомпактные расширения [1], [4], спектральная разложимость [1], [3]), причём, как мне кажется, всюду их применение упрощает доказательства соответствующих утверждений. В частности, факторизационные теоремы позволяют чрезвычайно просто доказывать существование универсальных пространств данного веса и размерности (можно сравнить например § 2 этой статьи или заметку [2] с работами [5], [6] и [7]).

Однако факторизационные теоремы, утверждая существование универсального пространства, ничего не говорят о его строении. Другой метод — метод обобщённых произведений — как раз и позволяет „конструктивно" получать довольно просто устроенные универсальные пространства. Например, в работах [8], [9] и [10] для этих целей используются частичные топологические произведения. В настоящей статье будет использована ещё более общая конструкция веерных произведений, которая позволит обобщить теорему Нёбелинга-Понтрягина об универсальности $(2n+1)$-мерного куба для n-мерных пространств.

(⁰) Все рассматриваемые пространства предполагаются вполне регулярными. Под $\dim X$ понимается размерность, определяемая при помощи покрытий, $w(X)$ обозначает вес пространства X, $\overline{\overline{m}}(X)$ обозначает мощность множества X.

(¹) В статье [3] эта теорема доказана в более слабой форме, там не обязательно $w(Y)\leqslant w(Z)$.

Часть I

§ 1. Факторизационные теоремы. В этом параграфе будут доказаны следующие факторизационные теоремы:

Теорема 1.1 (S. Mardešić, [1]). *Пусть имеется отображение f бикомпакта X с $\dim X = r$ на компакт Φ. Тогда существует такой компакт Ψ с $\dim\Psi \leqslant r$ и такие отображения $g\colon X\to\Psi$ и $h\colon \Psi\to\Phi$, что $f = h\cdot g$.*

Данное здесь доказательство этой теоремы мне кажется более простым, чем в [1], и, кроме того, теорема 1.1 необходима для следующей теоремы.

Теорема 1.2. *Пусть имеется отображение f вполне регулярного пространства X с $\dim\beta X = r$ (²) соответственно на:*

(1) *метрическое,*

(2) *метрическое, распадающееся в сумму τ штук попарно непересекающихся открыто-замкнутых подпространств со счетной базой, пространство R.*

Тогда существует такое соответственно:

(1) *метрическое,*

(2) *метрическое, распадающееся в сумму τ штук попарно непересекающихся открыто-замкнутых подпространств со счетной базой, пространство S с $\dim S\leqslant r$ и с $w(S) = w(R)$*

и существуют такие отображения $g\colon X\to S$ и $h\colon S\to R$, что $f = h\cdot g$.

Заметим, что для нормального пространства X всегда $\dim\beta X = \dim X$, т. е. для нормального X будет выполнено соотношение $\dim S\leqslant \dim X$.

Приводимые ниже доказательства сформулированных теорем, а также их применения существенным образом опираются на понятие ω-отображения (введенного впервые в форме ε-отображений П. С. Александровым в [11]). Напомним, что отображение f пространства X на пространство Y называется *ω-отображением* относительно покрытия ω пространства X, если для любой точки $y\in Y$ найдется ее окрестность Oy, прообраз $f^{-1}(Oy)$ которой содержится в одном из элементов покрытия ω. Отображение f пространства X в Y также назовем *ω-отображением* относительно покрытия ω пространства X, если ω-отображением в указанном выше смысле является отображение $f\colon X\to f(X)$, если же каждая точка $y\in Y$ обладает окрестностью Oy, прообраз которой содержится в одном из элементов покрытия ω, то f назовем *сильным ω-отображением*. Для бикомпактов, очевидно, ω-отображение является всегда и сильным ω-отображением.

Общая теорема об ω-отображениях, была доказана Даукером в [13]. Звучит она так:

Если открытое покрытие ω нормального пространства X локально конечно (и $(r+1)$-кратно), то X обладает сильным ω-отображением в обобщенный метрический полиэдр N (составленный из r-мерных симплексов).

(²) βX обозначает максимальное бикомпактное расширение X.

Для конечных покрытий эта теорема ранее была доказана в [12] (N в этом случае состоит из конечного числа симплексов). В случае, когда ω-звездно конечное покрытие, X обладает ω-отображением на метрическое пространство Y распадающееся в дизъюнктную сумму $\varkappa$ штук открыто-замкнутых подпространств со счетной базой, где, очевидно, $\varkappa\leqslant w(X)$ (см., например, [14]). Заметим, что Y является подпространством произведения $\varkappa$ штук изолированных точек $N_\varkappa$ на гильбертов кирпич I^∞, т. е. нормальное пространство X веса $\varkappa$ для любого звездно-конечного покрытия ω обладает ω-отображением в произведение $N_\varkappa\times I^\infty$.

Доказательство теоремы 1.1. Для каждого $n = 1, 2, \ldots$ возьмем $(1/2n)$-покрытия $\nu_n = \{O_{i_n}\}$, $i_n = 1_n, \ldots, s_n$, компакта Φ.

Через ν'_n обозначим покрытие пространства X множествами $f^{-1}(O_{i_n}) = O'_{i_n}$.

Впишем в ν'_1 $(r+1)$-кратное покрытие ω_1 и затем X ω_1-отобразим посредством отображения g_1 в r-мерный полиэдр P_1, взятый в метрике ϱ_1, причем будем считать $\operatorname{diam} P_1\leqslant 1$.

Предположим, что для всех $n\leqslant j-1$ покрытия ω_n, ω_n-отображения g_n и полиэдры P_n, взятые в метриках ϱ_n таких, что $\operatorname{diam} P_n\leqslant 1$, уже построены.

Рассмотрим $n = j$. Для каждого $k < j$ возьмем $(1/2^j)$-покрытия $\mu'_{(k,j)} = \{V_{l(k,j)}\}$ полиэдров P_k и прообразы $\mu'_{(k,j)} = \{g_k^{-1}(V_{l(k,j)})\}$ покрытий $\mu_{(k,j)}$ в пространстве X. В пересечение покрытий $\mu'_{(1,j)}, \ldots, \mu'_{(j-1,j)}, \nu'_j$ впишем $(r+1)$-кратное покрытие ω_j и затем ω_j-отобразим пространство X в r-мерный полиэдр P_j, взятый в метрике ϱ_j, в которой $\operatorname{diam} P_j\leqslant 1$.

Полиэдры $P_n = \{y_n\}$ и отображения g_n построим для всех $n = 1, 2, \ldots$ В произведении $P = \prod\limits_n P_n = \{y = \{y_n\}\}$ положим

$$\varrho(y', y'') = \sqrt{\sum_n \frac{\varrho_n^2(y'_n, y''_n)}{2^n}}.$$

Отображения $g_n\colon X\to P_n$ определяют непрерывное отображение $g\colon X\to P$ по формуле $g(x) = \{g_n(x)\}$. Компакт $g(X)$ обозначим через Ψ.

Если $g(x') = g(x'')$, то множество $x'\cup x''$ содержится в одном из элементов любого покрытия ν'_n (ибо $g_n(x') = g_n(x'')$ для любого $n = 1, 2, \ldots$), т. е. $\varrho\big(f(x'), f(x'')\big) = 0$ и, значит, $f(x') = f(x'')$. Таким образом, существует такое отображение $h\colon \Psi\to\Phi$, что $f = h\cdot g$.

Так как $f(X) = \Phi$, то и $h(\Psi) = \Phi$. Если O открытое в Φ множество, то множество $f^{-1}(O)$ открыто в X, причем $f^{-1}(O) = g^{-1}\big(h^{-1}(O)\big)$, т. е. множество $h^{-1}(O) = \Psi\setminus g\big(X\setminus f^{-1}(O)\big)$ открыто в Ψ и, следовательно, отображение h непрерывно.

Покажем, что $\dim\Psi\leqslant r$, для чего, по лемме Лебега (³), достаточно по-

(³) Утверждающей, что для любого открытого покрытия ν компакта существует число $\varepsilon = \varepsilon(\nu) > 0$ такое, что любое ε-покрытие вписано в покрытие ν.

казать, что Ψ обладает сколь угодно мелкими $(r+1)$-кратными (открытыми) покрытиями. Естественное проектирование компакта Ψ на сомножитель P_n произведения P обозначим через π_n. Так как g_j есть ω_j-отображение, то существует такое покрытие $\eta = \{U_i\}$, $i = 1, \ldots, q$, полиэдра P_j, что каждое множество $U'_i = g_j^{-1}(U_i)$ содержится в одном из элементов покрытия ω_j, т. е. содержится в одном из элементов покрытий $\mu'_{(1,j)}, \ldots, \mu'_{(j-1,j)}$ и, следовательно, каждое множество $g_1(U'_i), \ldots, g_{j-1}(U'_i)$ содержится в одном из элементов покрытий $\mu_{(1,j)}, \ldots, \mu_{(j-1,j)}$, т. е. имеет диаметр соответственно не больший, чем $1/2^j$. Из этого следует, что множества $\pi_j^{-1}(U_i) = W_i = g(U_i)$ имеют диаметр не больший, чем

$$\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2^j}\right)+\frac{1}{2^2}\cdot\left(\frac{1}{2^j}\right)^2+\ldots+\frac{1}{2^{j-1}}\left(\frac{1}{2^j}\right)^2+\sum_{n=j}^{\infty}\frac{1}{2^n}}\leqslant$$
$$\leqslant\sqrt{\frac{1}{2^{2j}}+\frac{1}{2^{j-2}}}\leqslant\sqrt{\frac{1}{2^{j-1}}}.$$

Система $\{W_i\}$, $i = 1, \ldots, s$, образует покрытие Ψ, т. е. Ψ имеет сколь угодно мелкие $(r+1)$-кратные открытые покрытия, откуда $\dim\Psi \leqslant r$. Теорема доказана.

Замечание 1.1. *Если бикомпакт X для любого своего покрытия ω обладает ω-отображением в r-мерный полиэдр, вложимый в m-мерное эвклидово пространство E^m, то из доказательства теоремы ясно* (если в качестве P_n брать полиэдры, вложимые в E^m), что *компакт Ψ для любого $\varepsilon > 0$ обладает ε-отображением в полиэдр, вложимый в E^m*. (В частности, если бикомпакт X змеевидный [4], то змеевидным можно считать и компакт Ψ.)

Доказательство пункта (2) теоремы 1.2. Докажем сначала пункт (1) для случая $w(R) = \aleph_0$.

Отображение f можно продолжить в отображение $\tilde{f}$: $\beta X \to kR$, где kR компактное со счетной базой расширение R. Из теоремы 1.1 вытекает существование такого r-мерного компакта Ψ и таких отображений g: $\beta X \to \Psi$ и h: $\Psi \to kR$, что $\tilde{f} = h\cdot g$. Пространство $g(X) = S$ и отображения g: $X \to S$ и h: $S \to R$ будут искомыми.

Перейдем к доказательству пункта (2).

Обозначим попарно непересекающиеся, открыто-замкнутые, со счетной базой подпространства пространства R через R_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$. Каждое множество $X_\alpha = f^{-1}(R_\alpha)$ открыто и замкнуто в X, т. е. $\dim\beta X_\alpha \leqslant \dim\beta X = r$ [5]. По доказанному для каждого $\alpha \in \mathfrak{A}$ существует такое r-мерное метрическое со счетной базой пространство S_α и такие отображения g_α: $X_\alpha \to S_\alpha$

---

(4) Т. е. связный и для любого своего покрытия ω обладающий ω-отображением в прямую.

(5) Так как замыкание X_α в βX гомеоморфно βX_α.

и h_α: $S_\alpha \to R_\alpha$, что $f_\alpha = h_\alpha\cdot g_\alpha$. Дискретная сумма пространств S_α будет искомым пространством S, а отображения, совпадающие на каждом X_α с отображениями g_α, а на каждом S_α — с отображениями h_α будут искомыми отображениями g и h. Пункт (2) доказан.

Полное доказательство пункта (1) теоремы 1.3 требует привлечения катетовских равномерно-нульмерных отображений [15]. Напомним, что отображение f метрического пространства X в метрическое пространство Y равномерно-нульмерно, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что как только $\operatorname{diam} f(A) < \delta$, так A распадается в сумму попарно не пересекающихся и открытых в A множеств диаметра $< \varepsilon$. В работе [16] показано, что любое метрическое пространство обладает равномерно-нульмерным отображением в гильбертов кирпич; кроме того, если метрическое пространство X обладает равномерно-нульмерным отображением f на r-мерное в смысле $\dim$ метрическое (со счетной базой) пространство Y, то $\dim X \leqslant r$.

Действительно, Y обладает равномерно-нульмерным отображением g в r-мерный куб I^r [15]. Суперпозиция $g\cdot f$ двух равномерно-нульмерных отображений равномерно-нульмерна, т. е. по лемме 6 из [15] имеем соотношение $\dim X \leqslant \operatorname{Ind} X \leqslant r$.

Доказательство пункта (1) теоремы 1.2. Пространство R обладает равномерно-нульмерным отображением φ на метрическое со счетной базой пространство R'. По доказанному, существует такое r-мерное метрическое пространство S со счетной базой и такие отображения ψ: $X \to S$ и η: $S \to R'$, что $\eta\cdot\psi = \varphi\cdot f$. Отображения f и ψ определяют отображение g: $X \to R\times S$ по правилу: $g(x) = \big(f(x), \psi(x)\big)$, причем $f = h\cdot g$ и $\psi = \pi\cdot g$, если h и π являются проекциями произведения $R\times S$ на сомножители R и S, т. е. диаграмма

$$\begin{tikzcd}
 & R \arrow[dr, "\varphi"] & \\
X \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "\psi"'] & R\times S \arrow[u, "h"'] \arrow[d, "\pi"] & R' \\
 & S \arrow[ur, "\eta"'] &
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

Так как

$$\varphi\cdot h\cdot g(x) = \varphi\cdot f(x) = \eta\cdot\psi(x) = \eta\cdot\pi\cdot g(x)$$

для произвольной точки $x \in X$, то для произвольной точки y множества $Y = g(X) \subseteq R\times S$ выполнено соотношение $\varphi\cdot h(y) = \eta\cdot\pi(y)$, т. е. множество Y содержится во множестве P таких точек $y = (z, s)$ произведения $R\times S$, для которых $\varphi(z) = \eta(s)$, т. е. $\varphi\cdot h(y) = \eta\cdot\pi(y)$. Теорема будет доказана, если будет доказано, что $\dim P \leqslant r$, т. е. если будет справедлива

Лемма 1.1. *Пусть дано равномерно-нульмерное отображение φ метрического пространства R на метрическое пространство со счетной базой R'. Пусть еще дано отображение η r-мерного метрического со счетной базой пространства S на пространство R' и пусть h и π — проекции произведения $R\times S$ на сомножители R и S соответственно. Тогда множество P таких точек $y=(z,s)$ из $R\times S$, для которых $\varphi(z)=\eta(s)$ (т. е. $\varphi\cdot h(y)=\eta\cdot\pi(s)$ (6)) удовлетворяет соотношению $\dim P\leqslant r$.*

Доказательство. Для любых двух точек $y'=(z',s')$ и $y''=(z'',s'')$ из $R\times S$ положим $\varrho(y',y'')=\sqrt{\varrho_1^2(z',z'')+\varrho_2^2(s',s'')}$, где ϱ_1 и ϱ_2 — метрики в R и S соответственно. Покажем, что отображение $\pi\colon P\to S$ является равномерно-нульмерным отображением, если выбрать метрику ϱ_2 надлежащим образом. Действительно, за счёт выбора метрики ϱ_2 отображение η можно сделать равномерно непрерывным [30]. Если же отображение η равномерно непрерывно, то для любого натурального n можно так выбрать положительные числа $\delta_1<1/n$ и δ_2, что: 1) для любого множества $O\subseteq S$ диаметра $<\delta_1$ образ $\eta(O)=O'$ имеет диаметр $<\delta_2$ и 2) что прообраз $V=\varphi^{-1}(Ot_0)$ распадается в сумму попарно непересекающихся и открытых множеств V_a, $a\in\mathfrak{A}$, диаметра $<1/n\sqrt{2}$. Прообраз $W=\pi^{-1}(O)$ содержится во множестве $U=\pi^{-1}(O)\cap h^{-1}(V_a)$, ибо если $\pi(y)\in O$, то $\eta\cdot\pi(y)\in O_0'$, т. е. $h(y)\in\varphi^{-1}\cdot\eta\cdot\pi(y)\subseteq V$. Множество U распадается в попарно-непересекающиеся открытые в U множества $\pi^{-1}(O)\cap h^{-1}(V_a)$, $a\in\mathfrak{A}$, диаметр которых $<1/n$ (ибо если точки $y'=(z',s')$ и $y''=(z'',s'')$ содержатся во множестве $\pi^{-1}(O)\cap h^{-1}(V_a)$), то

$$\varrho(y',y'')=\sqrt{\varrho_1^2(z',z'')+\varrho_2^2(s',s'')}<\sqrt{\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{2n^2}}=\frac{1}{n},$$

т. е. множество W также распадается в систему попарно непересекающихся открытых в W множеств диаметра $<1/n$. Из равномерной нульмерности отображения π следует соотношение $\dim P\leqslant\dim S=r$. Лемма доказана, пункт (1) теоремы 1.3 также.

§ 2. Факторизационные теоремы и универсальные пространства.

В этом параграфе при помощи факторизационных теорем прежде всего будет положительно решен вопрос П. С. Александрова о существовании универсального бикомпакта данного веса и данной размерности. Кроме того, весьма простым способом будут получены известные ранее, но сложно доказываемые теоремы о существовании универсальных метрических и сильно паракомпактных метрических пространств данного веса и данной размерности (будут доказаны даже несколько более общие утверждения).

Теорема 2.1. *Для любой мощности τ и любого числа $n=0,1,2,\ldots$ существует n-мерный в смысле $\dim$ бикомпакт $\Pi^{n\tau}$ веса τ, содержащий гомеоморфный образ любого вполне регулярного пространства X веса $\leqslant\tau$, максимальное бикомпактное расширение βX которого n-мерно в смысле $\dim$. В частности (7), бикомпакт $\Pi^{n\tau}$ содержит гомеоморфный образ любого n-мерного в смысле $\dim$ нормального пространства веса $\leqslant\tau$ (8).*

Доказательство. Все вполне регулярные пространства X веса τ с $\dim\beta X=n$ разбиваются на классы $a\in\mathfrak{A}$ попарно гомеоморфных между собой пространств. Выберем из каждого класса a пространство X_a и рассмотрим пространство Y, являющееся дискретной суммой максимальных бикомпактных расширений βX_a пространств X_a, т. е. бикомпакты βX_a попарно не пересекаются между собой и открыто-замкнуты в Y. Пространство Y, очевидно, локально бикомпактно и нормально (и даже паракомпактно). Так как $\dim\beta X_a=n$ для любого $a\in\mathfrak{A}$, то и $\dim Y=n$, т. е. так как Y нормальное пространство, $\dim\beta Y=n$.

Вес каждого пространства X_a равен τ, т. е. существует гомеоморфизм f_a каждого пространства X_a в тихоновский куб I^τ веса τ. Так как βX_a — максимальные бикомпактные расширения, то существуют продолжения $\tilde{f}_a\colon\beta X_a\to I^\tau$ отображений f_a. Отображение пространства Y в I^τ, совпадающее на каждом бикомпакте βX_a с отображением f_a, обозначим через f, а продолжение отображения f на βY обозначим через $\tilde{f}$. Из построения отображения $\tilde{f}$ следует, что оно будет гомеоморфизмом на каждом множестве $X_a\subseteq\beta X_a\subseteq\beta Y$. По теореме 2 из [1] существует такой бикомпакт $\Pi^{n\tau}$ веса $\tau=w(I^\tau)$ и размерности $n=\dim\beta Y$ и такие отображения $g\colon\beta Y\to\Pi^{n\tau}$ и $h\colon\Pi^{n\tau}\to I^\tau$, что $\tilde{f}=h\cdot g$. Но тогда из гомеоморфности отображения $\tilde{f}$ на множествах X_a вытекает гомеоморфность отображения g на этих множествах. Таким образом, $\Pi^{n\tau}$ содержит гомеоморфные образы всех множеств X_a. Теорема доказана.

Замечание 2.1. А. В. Архангельский и О. В. Локуциевский заметили, что бикомпакт $\Pi^{n\tau}$ можно считать диадическим, так как по теореме О. В. Локуциевского из [17], существует такой диадический бикомпакт $D^{n\tau}$ веса τ и содержащий $\Pi^{n\tau}$, что $\dim D^{n\tau}=\dim\Pi^{n\tau}$.

Следствие 2.1. *Для каждого $n=0,1,2,\ldots$ существует n-мерный компакт, универсальный для всех n-мерных метрических пространств со счетной базой.*

Метод, примененный в доказательстве теоремы 2.1, годится также и для доказательства существования универсальных метрических пространств данного веса и данной размерности, только вместо теоремы 1.2 употребляется 1.3.

Теорема 2.2 (Nagata, [5]). *Среди n-мерных метрических пространств веса τ существует универсальное.*

(6) Т. е. P есть веерное произведение R и S относительно отображений $\varphi\colon R\to R'$ и $\eta\colon S\to R'$ (см. § 3).

(7) Так как для нормального пространства X всегда $\dim\beta X=\dim X$.

(8) Эта теорема независимо и совершенно различными способами доказана А. Зарелуа и мной (см. [7] и [2]).

Доказательство. Так же как в теореме 2.1, возьмем такую систему n-мерных метрических пространств X_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$, веса τ, что пространства X_α попарно между собой негомеоморфны и каждое n-мерное метрическое пространство веса τ гомеоморфно одному из пространств X_α. Дискретную сумму пространств X_α обозначим через S. Ясно, что $\dim S = n$. Каждое пространство X_α обладает гомеоморфным отображением f_α в обобщенное гильбертово пространство H^τ веса τ (являющееся метрическим пространством), [18]. Отображение пространства S в H^τ, совпадающее на каждом множестве X_α с f_α, обозначим через f. Отображение f является гомеоморфизмом на каждом множестве X_α. По теореме 1.2 существует такое n-мерное в смысле $\dim$ метрическое пространство $R^{n\tau}$ веса τ и такие отображения $g\colon S \to R^{n\tau}$ и $h\colon R^{n\tau} \to H^\tau$, что $f = h \cdot g$. Отображение g будет гомеоморфизмом на каждом множестве X_α. Теорема доказана.

Доказательства следующих теорем об универсальных пространствах требует дополнительных определений и лемм.

Определение 2.1 (Александров, Урысон, [29]). Система ν покрытий ω_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$, называется *измельчающейся*, если для любой точки $x \in X$ и любой ее окрестности Ox существует такой индекс α, что $x \in \mathrm{St}(x, \omega_\alpha) \subseteq Ox$, где $\mathrm{St}(x, \omega_\alpha)$ обозначает сумму тел тех элементов покрытия ω_α, которые содержат точку x.

Нетрудно видеть, что элементы покрытий ω_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$, образуют базу в X.

Определение 2.2. Будем говорить, что нормальное T_1-пространство X обладает *τ-измельчающейся базой*, если в X имеется измельчающаяся система ν из τ штук покрытий. Если еще все покрытия из системы ν звездно конечны, то будем говорить, что X обладает *τ-звездно конечной базой*.

Замечание 2.2. Если $w(X) = \varkappa$, то в X всегда имеется измельчающаяся система $\varkappa$ штук конечных покрытий, т. е. для пространства X веса $\varkappa$ с τ-звездно конечной базой можно всегда считать $\tau \leqslant \varkappa$.

Лемма 2.1. *Сильно паракомпактное метрическое пространство X является пространством с $\aleph_0$-звездно конечной базой.*

Действительно, система покрытий μ_n, $n = 1, 2, \ldots$, состоящих из шаровых $(1/n)$-окрестностей всех точек пространства X, измельчается. Впишем в каждое покрытие μ_n звездно конечное покрытие ω_n. Система покрытий ω_n, $n = 1, 2, \ldots$, будет искомой измельчающейся счетной системой звездно конечных покрытий.

Мы докажем даже несколько больше, чем в лемме 2.1. В работах [6] и [19] рассматривается класс таких метрических пространств, которые обладают базой, распадающейся в сумму счетного числа звездно конечных покрытий (в работе [6] пространства указанного класса называются пространствами с σ-звездно конечной базой, в [19] они называются сильно метризуемыми). Пространства с σ-звездно конечной базой хороши, например, тем, что для них совпадают все размерности — dim, ind и Ind, [19] (тогда как для произвольных метрических пространств это неверно, [20]). Кроме того, для пространств этого класса существуют очень простые по структуре универсальные пространства:

Теорема 2.3 (Morita, [21]). *Для любого метрического пространства X веса $\varkappa$ с σ-звездно конечной базой существует гомеоморфизм в произведение $I^\infty \times B(\varkappa)$ гильбертова кирпича I^∞ на обобщенное бэровское пространство $B(\varkappa)$ веса $\varkappa$* (⁹).

Теорема 2.4 (Nagata, [6]). *Для любого метрического пространства X веса $\varkappa$, r-мерного в смысле $\dim$ и с σ-звездно конечной базой существует гомеоморфизм в произведение $M^r \times B(\varkappa)$ универсального r-мерного компакта M^r на $B(\varkappa)$.*

Ниже будут доказаны утверждения более общие, чем сформулированные теоремы 2.3 и 2.4.

Лемма 2.2. *Метрическое пространство X с σ-звездно конечной базой является пространством с $\aleph_0$-звездно конечной базой.*

Доказательство. Пусть элементы звездно конечных покрытий $\omega_n = \{O_{\alpha n}\}$, $\alpha n \in \mathfrak{A}_n$, $n = 1, 2, \ldots$, образуют базу в X.

Через μ_{nk} обозначим систему тех элементов покрытия ω_n, диаметр которых $< 1/k$, $k = 1, 2, \ldots$, а через V_{nk} обозначим сумму всех элементов из системы μ_{nk}. Так как элементы всех покрытий ω_n образуют базу в X, то при фиксированном k множества V_{nk}, $n = 1, 2, \ldots$, образуют счетное покрытие X. Из паракомпактности X вытекает существование такого покрытия пространства X замкнутыми множествами F_{nk}, $n = 1, 2, \ldots$, что $F_{nk} \subseteq V_{nk}$. Обозначим через ω_{nk} покрытие пространства X, состоящее из всех элементов системы μ_{nk} и из множества $O_{\alpha n} \setminus F_{nk}$ при $O_{\alpha n} \notin \mu_{nk}$. Покрытия ω_{nk} звездно конечны и их счетное число.

Покажем, что система покрытий ω_{nk} измельчается. Пусть Ox является $(1/k)$-окрестностью точки $x \in X$. Тогда существует такой номер n, что $x \in F_{nk}$. Из построения покрытий ω_{nk} следует, что $x \in \mathrm{St}(x, \omega_{nk}) = \mathrm{St}(x, \mu_{nk}) \subseteq Ox$. Лемма доказана.

Лемма 2.3. *Пусть система покрытий ω_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$, пространства X является измельчающейся и пусть для каждого α отображение $f_\alpha\colon X \to Y_\alpha$ является ω-отображением. Тогда отображение $f\colon X \to Y$ ставящее в соответствие точке x точку $y = \{f_\alpha(x)\} \in Y = \prod_\alpha Y_\alpha$ является гомеоморфизмом.*

Доказательство. Непрерывность отображения f очевидна. Возьмем открытое в X множество O и точку $x \in O$. Так как система покрытий ω_α, измельчается, то существует такой индекс α_0, для которого $\mathrm{St}(x, \omega_{\alpha_0}) \subseteq O$. Так как f_{α_0} является ω_{α_0}-отображением, то точка $y = f_{\alpha_0}(x)$ обладает окрестностью V, прообраз которой $f_{\alpha_0}^{-1}(V) = U$ содержится в одном из элементов

(⁹) $B(\varkappa)$ есть тихоновское произведение счетного числа пространств, состоящих из $\varkappa$ штук изолированных точек.

покрытя ω_{α_0}. Но $U \ni x$, т. е. $U \subseteq \mathrm{St}(x, \omega) \subseteq O$. Так как $f_{\alpha_0} = \pi_{\alpha_0} \cdot f$, где π_{α_0} обозначает естественную проекцию Y на Y_{α_0} то $x \in f^{-1}(\pi_{\alpha_0}(V))$, т. е. отображение $f\colon X \to f(X)$ открыто. Взаимная однозначность f доказывается так же, как открытость. Лемма доказана.

Теорема 2.5. *Для любого пространства X веса $\varkappa$ с τ-звездно конечной базой существует гомеоморфизм в произведение $I^\tau \times B(\varkappa, \tau)$, где I^τ — гильбертов кирпич веса τ, а $B(\varkappa, \tau)$ — произведение τ штук пространств, состоящих из $\varkappa$ штук изолированных точек.*

Доказательство. Пусть система звездно конечных покрытий ω_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$, $\overline{\overline{m}}(\mathfrak{A}) = \tau$, измельчается в X. Как замечено в § 1, пространство X для каждого $\alpha \in \mathfrak{A}$ обладает ω_α-отображением в произведение $I^\infty \times N_\varkappa$ гильбертова кирпича I^∞ и пространства $N_\varkappa$, состоящего из $\varkappa$ штук изолированных точек. Тогда, по лемме, пространство X обладает гомеоморфизмом f в пространство $\prod\limits_\alpha (I^\infty \times N_\varkappa)_\alpha = \prod\limits_\alpha I_\alpha^\infty \times \prod\limits_\alpha (N_\varkappa)_\alpha = I^\tau \times B(\varkappa, \tau)$. Теорема доказана.

Как следует из леммы 2.2, при $\tau = \varkappa_0$ доказанная теорема превращается в теорему 2.3.

Следствие 2.2. *Любое пространство X веса $\varkappa$ с τ-звездно конечной базой обладает таким отображением π в пространство $B(\varkappa, \tau)$, что каждое множество $\pi^{-1}(b)$, $b \in B(\varkappa, \tau)$, имеет вес $\leqslant \tau$* ([10]).

Доказательство. Если считать $X \subseteq I^\tau \times B(\varkappa, \tau)$, то искомым отображением π будет естественная проекция произведения $I^\tau \times B(\varkappa, \tau)$ на сомножитель $B(\varkappa, \tau)$.

В частности, при $\tau = \aleph_0$ получаем

Следствие 2.3 (Смирнов, [22]). *Метрическое пространство веса $\varkappa$ с σ-звездно конечной базой (в частности, сильно паракомпактное метрическое пространство веса $\varkappa$) обладает таким отображением f в обобщенное бэровское пространство $B(\varkappa)$, что каждое множество $f^{-1}(b)$, $b \in B(\varkappa)$, обладает счетной базой.*

Теорема 2.6. *Для любого n-мерного в смысле* $\dim$ *пространства X веса $\varkappa$ с τ-звездно конечной базой существует гомеоморфизм в произведение $\Pi^{n\tau} \times B(\varkappa, \tau)$ универсального n-мерного бикомпакта $\Pi^{n\tau}$ веса τ* (см. теорему 2.1) *и пространства $B(\varkappa, \tau)$.*

Доказательство. По теореме 2.5, существует гомеоморфизм f пространства X в произведение $I^\tau \times B(x, \tau)$. Обозначим естественные проекции этого произведения на сомножители I^τ и $B(\varkappa, \tau)$ через π и p соответственно. По теореме 2 из [1], существует такой n-мерный бикомпакт Y веса τ и такие отображения $g\colon \beta X \to Y$ и $h\colon Y \to I^\tau$, что $\overline{\pi \cdot f} = h \cdot g$, где $\overline{\pi \cdot f}$ является продолжением $\pi \cdot f$ с X на βX. Так как $\dim Y = n$, то Y можно считать подмножеством универсального n-мерного бикомпакта $\Pi^{n\tau}$ веса τ.

([10]) См. замечание 2.2.

Отображения $p \cdot f\colon X \to B(\varkappa, \tau)$ и $g\colon \beta X \to \Pi^{n\tau}$ определяют отображение $i\colon X \to \Pi^{n\tau} \times B(\varkappa, \tau)$ по правилу $i(x) = (g(x), p \cdot f(x))$. Отображение $\widetilde{h}\colon \Pi^{n\tau} \to I^\tau$ продолжающее отображение h, и тождественное отображение $e\colon B(\varkappa, \tau) \to B(\varkappa, \tau)$ определяют отображение $j\colon \Pi^{n\tau} \times B(\varkappa, \tau) \to I^\tau \times B(\varkappa, \tau)$ по правилу $j(z, b) = (\widetilde{h}(z), e(b))$, где $z \in \Pi^{n\tau}$ и $b \in B(\varkappa, \tau)$. Ясно, что $j \cdot i = f$, т. е., так как f является гомеоморфизмом X, то и i является гомеоморфизмом X. Теорема доказана.

Из леммы 2.2 следует, что при $\tau = \aleph_0$ доказанная теорема превращается в теорему 2.4.

Замечание. Теоремы 2.5 и 2.6 можно несколько обобщить, обобщая понятие пространства с τ-звездно конечной базой (см. [23]).

Часть II

§ 3. Веерные произведения. Этот параграф носит вспомогательный характер. В нем даются определения и замечания, необходимые для § 4.

Обозначим через $K(X_0)$ категорию, каждый объект которой является парой, состоящей из пространства X_α и его отображения ${}^{\alpha}_{0}\pi$ в пространство X_0. Морфизмом пары $({}^{\beta}_{0}\pi, X_\beta)$ в пару $({}^{\alpha}_{0}\pi, X_\alpha)$ является такое отображение ${}^{\beta}_{\alpha}\pi\colon X_\beta \to X_\alpha$, что ${}^{\beta}_{0}\pi = {}^{\alpha}_{0}\pi \cdot {}^{\beta}_{\alpha}\pi$. Прямое произведение $(X_{\mathfrak{A}}, {}^{\mathfrak{A}}_{0}\pi) = \prod\limits_\alpha ({}^{\alpha}_{0}\pi\colon X_\alpha \to X_0)$ объектов $(X_\alpha, {}^{\alpha}_{0}\pi)$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, в этой категории можно получить следующими двумя (очевидно эквивалентными) способами:

(1) В качестве $X_{\mathfrak{A}}$ нужно взять такое максимальное подпространство F обычного (тихоновского) произведения $\prod\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} X_\alpha$ пространств X_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$, что для каждой точки $\{x_\alpha\} \in F$ и любых двух индексов α' и $\alpha'' \in \mathfrak{A}$ выполнено соотношение ${}^{\alpha'}_{0}\pi(x_{\alpha'}) = {}^{\alpha''}_{0}\pi(x_{\alpha''})$. В качестве ${}^{\mathfrak{A}}_{0}\pi$ нужно взять естественно возникающее (из отображений ${}^{\alpha}_{0}\pi$) отображение произведения $\prod\limits_\alpha X_\alpha$ в X_0, рассматриваемое на F.

(2) Возьмем τ экземпляров $X_{0\alpha}$ пространства X_0, где τ — мощность множества $\mathfrak{A}$, и вместо отображения ${}^{\alpha}_{0}\pi\colon X_\alpha \to X_0$ будем рассматривать отображение ${}^{\alpha}_{0}\pi\colon X_\alpha \to X_{0\alpha}$. Тогда возникает естественное отображение f тихоновского произведения $\prod\limits_\alpha X_\alpha$ в тихоновское произведение $\prod\limits_\alpha X_{0\alpha}$. Диагональ D произведения $\prod\limits_\alpha X_{0\alpha}$ естественно гомеоморфна пространству X_0. В качестве пространства $X_{\mathfrak{A}}$ нужно взять подпространство $f^{-1}(D)$, а в качестве ${}^{\mathfrak{A}}_{0}\pi$ — отображение f, рассматриваемое на $X_{\mathfrak{A}}$.

Произведения указанного вида раньше уже рассматривались (например, индуцированные расслоения, или, например, см. [26]). Я в этой статье пространство $X_{\mathfrak{A}}$ буду называть *веерным произведением* пространств X_α, пространство X_0 — *основанием веерного произведения*, отображения ${}^{\alpha}_{0}\pi$ и ${}^{\mathfrak{A}}_{0}\pi$ — *проекциями*.

Отображения, ставящие в соответствие точкам $x_{\mathfrak{A}} = \{x_\alpha\} \in X_{\mathfrak{A}} \subseteq \prod_\alpha X_\alpha$ их координаты x_α будут обозначаться через ${}^{\mathfrak{A}}_{\alpha}\pi$. Очевидно, ${}^{\mathfrak{A}}_{0}\pi = {}^{\alpha}_{0}\pi \cdot {}^{\mathfrak{A}}_{\alpha}\pi$ для любого $\alpha \in \mathfrak{A}$. Ясно, что совокупность прообразов всех открытых в пространствах X_α множеств при отображениях ${}^{\mathfrak{A}}_{\alpha}\pi$ образует псевдобазу в $X_{\mathfrak{A}}$.

Частным случаем веерных произведений являются частичные произведения, введенные мной в заметках [8], [9] (см. также [10]). Напомню кратко их определение.

Пусть дано пространство X_0 с отмеченным в нём открытым множеством ${}_\alpha O_0$ и пространство Z_α. *Частичным произведением* $X_\alpha = P(X_0, Z_\alpha, {}_\alpha O_0)$ *основания* X_0 *на слой* Z_α *относительно открытого множества* ${}_\alpha O_0$ назовем пространство, состоящее из двух непересекающихся множеств ${}_\alpha O_\alpha$ и $X_\alpha \setminus {}_\alpha O_\alpha$, причём множество $X_\alpha \setminus {}_\alpha O_\alpha$ гомеоморфно множеству $X_0 \setminus {}_\alpha O_0$ (этот гомеоморфизм обозначим через ${}^{\alpha}_{0}\pi$), а множество ${}_\alpha O_\alpha$ гомеоморфно обычному произведению ${}_\alpha O_\alpha \times Z_\alpha$, причем естественную проекцию полного произведения ${}_\alpha O_\alpha \equiv {}_\alpha O_0 \times Z_\alpha$ на сомножитель ${}_\alpha O_0$ обозначим также через ${}^{\alpha}_{0}\pi$. *Базисными открытыми множествами в* X_α будем считать:

(1) прообразы открытых в X_0 множеств при отображении ${}^{\alpha}_{0}\pi\colon X_\alpha \to X_0$,

(2) открытые подмножества множества ${}_\alpha O_0 \times Z_\alpha = {}_\alpha O_\alpha$, рассматриваемого как обычное топологическое произведение.

Выражаясь неточно, взятие частичного произведения пространства X на пространство Z относительно открытого в X множества O означает, что в пространстве X множество O заменяется его (обычным) произведением на Z и к этому произведению естественным образом „приклеивается'' остающееся неизменным множество $X \setminus O$.

Если слой Z_α состоит из двух изолированных точек ([11]), то множество ${}_\alpha O_\alpha$ является просто суммой двух непересекающихся открытых множеств ${}_{1\alpha}O$ и ${}_{2\alpha}O$, гомеоморфных посредством ${}^{\alpha}_{0}\pi$ множеству ${}_\alpha O_0$. В этом случае псевдобаза пространства X_α состоит из (1) прообразов открытых в X_0 множеств при отображении ${}^{\alpha}_{0}\pi$ и из (2) множеств ${}_{1\alpha}O$, ${}_{2\alpha}O$.

Наконец, если в пространстве X_0 дана система открытых множеств ${}_\alpha O_0$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, и дана система слоев Z_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$, то *частичным произведением* $X_{\mathfrak{A}} = P(X_0, \{Z_\alpha\}, \{{}_\alpha O_0\})$ называется просто веерное произведение частичных произведений $X_\alpha = P(X_0, Z_\alpha, {}_\alpha O_0)$ относительно отображений ${}^{\alpha}_{0}\pi$.

Если все слои Z_α состоят из двух изолированных точек ([12]), то псевдобаза $X_{\mathfrak{A}}$ состоит из (1) всевозможных множеств ${}^{\mathfrak{A}}_{\alpha}\pi^{-1}({}_{i\alpha}O)$, $i = 1, 2$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, и из (2) прообразов открытых в X_0 множеств при отображении ${}^{\mathfrak{A}}_{0}\pi$.

Замечу еще, что для любого множества $A \subseteq X_0$ и любой системы его отображений $f_{\alpha'}\colon A \to X_{\alpha'} = P(X_0, Z_{\alpha'}, {}_{\alpha'}O_0)$, $\alpha' \in \mathfrak{A}' \subseteq \mathfrak{A}$, таких, что любое отображение ${}^{\alpha'}_{0}\pi \cdot f_{\alpha'}$ является тождественным, существует такой гомеоморфизм

([11]) В этом случае обозначение слоя мы будем опускать: $X_\alpha = P(X_0, {}_\alpha O_0)$.

([12]) В этом случае мы будем писать $X_{\mathfrak{A}} = P(X_0, \{{}_\alpha O_0\})$.

$f_{\mathfrak{A}}\colon A \to X_{\mathfrak{A}}$, что отображение ${}^{\mathfrak{A}}_{0}\pi \cdot f_{\mathfrak{A}}$ тождественно на A и ${}^{\mathfrak{A}}_{\alpha'}\pi \cdot f_{\mathfrak{A}} = f_{\alpha'}$, $\alpha' \in \mathfrak{A}$.

Действительно, из определения частичных произведений вытекает существование таких гомеоморфизмов $f_\alpha\colon A \to X_\alpha$ для $\alpha \in \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{A}'$, что отображения ${}^{\alpha}_{0}\pi \cdot f_\alpha$ тождественны на A, а полученные для всех $\alpha \in \mathfrak{A}$ отображения f_α определят нужное отображение $f_{\mathfrak{A}}$ из условий ${}^{\mathfrak{A}}_{\alpha}\pi \cdot f_{\mathfrak{A}} = f_\alpha$, $\alpha \in \mathfrak{A}$.

В частности, если все слои Z_α состоят из двух изолированных точек и множество A содержится в пересечении множеств ${}_{\alpha_1}O_0, \ldots, {}_{\alpha_s}O_0$ и ${}_{\alpha_{s+1}}O_0$, то всегда для любого набора индексов $i\alpha_1, \ldots, i\alpha_s$, где $i\alpha_j$ есть либо $1\alpha_j$, либо $2\alpha_j$, существует такой гомеоморфизм $f\colon A \to X_{\mathfrak{A}}$, что

$$f(A) \subseteq \Big(\bigcap_{j=1}^{s} {}^{\mathfrak{A}}_{\alpha_j}\pi^{-1}({}_{i\alpha_j}O)\Big) \cap {}^{\mathfrak{A}}_{0}\pi^{-1}({}_{\alpha_{s+1}}O_0)$$

и отображение ${}^{\mathfrak{A}}_{0}\pi \cdot f$ тождественно на A (нужно только для индексов $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ взять такие отображения f_{α_j}, что $f_{\alpha_j}(A) \subseteq {}_{i\alpha_j}O$).

§ 4. Веерные произведения и универсальные пространства.

Лемма 4.1. *Пусть дано частичное произведение $X_\alpha = P(X_0, {}_\alpha O_0)$ и пусть на основании X_0 определена такая непрерывная функция f, что $f(X_0 \setminus {}_\alpha O_0) = 0$. Положим $g(x_\alpha)$, $x_\alpha \in X_\alpha$, равным нулю, если $x_\alpha \in X_\alpha \setminus {}_\alpha O_\alpha$ и равным $(-1)^i \cdot f({}^{\alpha}_{0}\pi(x_\alpha))$, если $x_\alpha \in {}_{i\alpha}O$, $i = 1, 2$* (см. § 3). *Оказывается, функция g непрерывна.*

Доказательство. Непрерывность функции g в точках множеств ${}_{1\alpha}O$ и ${}_{2\alpha}O$ очевидна.

Если же $x_\alpha \in X_\alpha \setminus {}_\alpha O_\alpha$, т. е. $g(x_\alpha) = 0$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность O точки $x_0 = {}^{\alpha}_{0}\pi(x_\alpha)$, что $\operatorname{diam} f(O) < \varepsilon$, а тогда для окрестности $Ox_\alpha = {}^{\alpha}_{0}\pi^{-1}(O)$ точки x_α выполнено соотношение $\operatorname{diam} g(Ox_\alpha) < \varepsilon$. Лемма доказана.

Лемма 4.2. *Пусть в пространстве X_0 дана счетная система открытых множеств ${}_1O_0 \supseteq {}_2O_0 \supseteq \ldots \supseteq {}_nO_0 \supseteq \ldots$ таких, что на X_0 для каждого $n = 1, 2, \ldots$ существует непрерывная функция f_n, равная нулю на $X_0 \setminus {}_nO_0$ и не равная нулю ни в одной точке множества ${}_nO_0$.*

Тогда частичное произведение $X_{\mathfrak{A}} = P(X_0, \{{}_nO_0\}, n = 1, 2, \ldots)$ обладает таким гомеоморфным отображением h в произведение $X_0 \times I$, где I — отрезок $[-1, 1]$, что ${}^{\mathfrak{A}}_{0}\pi = p \cdot h$ (p — обозначает естественную проекцию произведения $X_0 \times I$ на сомножитель X_0).

Доказательство. Можно считать, что $0 < f_n(x_0) \leqslant 1/4^n$ для любой точки $x_0 \in {}_nO_0$.

Так же, как в предыдущей лемме, для любого $n = 1, 2, \ldots$ построим функцию $g_n\colon X_n = P(X_0, {}_nO_0) \to I$ такую, что

$$g_n(X_n \setminus {}_nO_n) = 0 \quad \text{и} \quad g_n(x_n) = (-1)^i \cdot f_n({}^{n}_{0}\pi(x_n))$$

при $x_n \in {}_{in}O$, $i = 1, 2$. По доказанной лемме, все функции g_n непрерывны, т. е. непрерывны и отображения

$$ {}^{\mathfrak{A}}_{n}g = g_n \cdot {}^{\mathfrak{A}}_{n}\pi \colon\ X_{\mathfrak{A}} \to I $$

и, кроме того,

$$ |{}^{\mathfrak{A}}_{n}g(x_{\mathfrak{A}})| = |g_n(x_n)| \leqslant \max_{x_0} f_n(x_0) \leqslant 1/4^n $$

для любого $x_{\mathfrak{A}} \in X_{\mathfrak{A}}$.

Для каждой точки $x_{\mathfrak{A}} = \{x_n\}$, $x_n \in X_n$, $n = 1, 2, \ldots$, положим

$$ g(x_{\mathfrak{A}}) = \sum_{n=1}^{\infty} {}^{\mathfrak{A}}_{1}g(x_{\mathfrak{A}}) \cdot \ldots \cdot {}^{\mathfrak{A}}_{n}g(x_{\mathfrak{A}}) = \sum_{n=1}^{\infty} g_1(x_1) \cdot \ldots \cdot g_n(x_n) . $$

Так как

$$ |g_1(x_1) \cdot \ldots \cdot g_n(x_n)| \leqslant \frac{1}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{4^n} \leqslant \frac{1}{4^n}, $$

то выписанный ряд сходится равномерно, т. е. функция g непрерывна.

Таким образом, имеем отображение $h\colon X_{\mathfrak{A}} \to X_0 \times I$, ставящее в соответствие точке $x_{\mathfrak{A}} \in X_{\mathfrak{A}}$ точку $\big({}^{\mathfrak{A}}_{0}\pi(x_{\mathfrak{A}}), g(x_{\mathfrak{A}})\big)$, т. е. удовлетворяющее нужному соотношению $p \cdot h = {}^{\mathfrak{A}}_{0}\pi$.

Функцию ${}^{\mathfrak{A}}_{i}g(x_{\mathfrak{A}}) \cdot \ldots \cdot {}^{\mathfrak{A}}_{n}g(x_{\mathfrak{A}})$, $x_{\mathfrak{A}} \in X_{\mathfrak{A}}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, обозначим через $g_{(i \ldots n)}(x_{\mathfrak{A}})$. Для любого $n = 1, 2$, и любой точки $x_{\mathfrak{A}}$ выполнено соотношение

$$ (*) \qquad \Big|\sum_{k=n+1}^{\infty} g_{(1 \ldots k)}(x_{\mathfrak{A}})\Big| \leqslant \frac{1}{2 \cdot 4^n} \cdot |g_{(1 \ldots n)}(x_{\mathfrak{A}})| . $$

Действительно,

$$ \Big|\sum_{k=n+1}^{\infty} g_{(1 \ldots k)}(x_{\mathfrak{A}})\Big| = |g_{(1 \ldots n)}(x_{\mathfrak{A}})| \Big|\sum_{l=1}^{\infty} g_{(n+1 \ldots n+l)}(x_{\mathfrak{A}})\Big| \leqslant $$
$$ \leqslant |g_{(1 \ldots n)}(x_{\mathfrak{A}})| \cdot \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{4^{n+1}} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{4^{n+l}} = $$
$$ = |g_{(1 \ldots n)}(x_{\mathfrak{A}})| \cdot \frac{1}{4^{n+1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{4^{n+2}} + \frac{1}{4^{n+2} \cdot 4^{n+3}} + \ldots\right) < $$
$$ < |g_{(1 \ldots n)}(x_{\mathfrak{A}})| \cdot \frac{2}{4^{n+1}} = |g_{(1 \ldots n)}(x_{\mathfrak{A}})| \cdot \frac{1}{2 \cdot 4^n} . $$

Докажем взаимную однозначность отображения h.

Если для точек $x' = \{x'_n\}$ и $x'' = \{x''_n\} \in X_{\mathfrak{A}}$ точки ${}^{\mathfrak{A}}_{0}\pi(x')$ и ${}^{\mathfrak{A}}_{0}\pi(x'')$ не совпадают, то из соотношения $p \cdot h = {}^{\mathfrak{A}}_{0}\pi$ следует, что $h(x') \neq h(x'')$. Если же ${}^{\mathfrak{A}}_{0}\pi(x') = {}^{\mathfrak{A}}_{0}\pi(x'') = x_0$, то существует такое число n, что

$$ {}^{\mathfrak{A}}_{n}\pi(x') = x'_n \neq x''_n = {}^{\mathfrak{A}}_{n}\pi(x'') \quad \text{и} \quad {}^{\mathfrak{A}}_{i}\pi(x') = {}^{\mathfrak{A}}_{i}\pi(x'') $$

при $i < n$. Но тогда

$$ \sum_{i=1}^{n-1} g_{(1 \ldots i)}(x') = \sum_{i=1}^{n-1} g_{(1 \ldots i)}(x'') \quad \text{и} \quad g_{(1 \ldots n)}(x') = -g_{(1 \ldots n)}(x'') , $$

т. е., по соотношению $(*)$

$$ |g(x') - g(x'')| = \Big|2 \cdot g_{(1 \ldots n)}(x') + \Big(\sum_{i=n+1}^{\infty} g_{(1 \ldots i)}(x') - \sum_{i=n+1}^{\infty} g_{(1 \ldots i)}(x'')\Big)\Big| \geqslant $$
$$ \geqslant 2 \cdot |g_{(1 \ldots n)}(x')| - 2\left(\frac{1}{2 \cdot 4^n} \cdot |g_{(1 \ldots n)}(x)|\right) = $$
$$ = \left(2 - \frac{1}{4^n}\right) \cdot |g_{(1 \ldots n)}(x')| > 0 . $$

Взаимная однозначность h доказана.

Осталось показать, что отображение h открыто, т. е. так как оно взаимно однозначно, нужно показать, что во множестве $h(X_{\mathfrak{A}}) = Y$ открыты образы множеств из некоторой псевдобазы пространства $X_{\mathfrak{A}}$. Как отмечено в § 3, псевдобазу в $X_{\mathfrak{A}}$ образуют множества вида ${}^{\mathfrak{A}}_{0}\pi^{-1}(O_0)$, где O_0 — открытые в X_0 множества, и множества вида $V_{in} = {}^{\mathfrak{A}}_{n}\pi^{-1}({}_{in}O)$, $i = 1, 2$, $n = 1, 2, \ldots$

Так как для любого открытого в X_0 множества O_0 выполнено соотношение $h \cdot {}^{\mathfrak{A}}_{0}\pi^{-1}(O_0) = p^{-1}(O_0) \cap Y$, то все множества вида $h \cdot {}^{\mathfrak{A}}_{0}\pi^{-1}(O_0)$ открыты в Y.

Обратимся к множествам V_{in}. Пусть $n = 1$. Тогда множество $U_1 = h(V_{11} \cup V_{21})$ совпадает с множеством $p^{-1}({}_1O_0) \cap Y$, ибо $V_{11} \cup V_{21} = {}^{\mathfrak{A}}_{0}\pi^{-1}({}_1O_0)$, т. е. множество $h(V_{11} \cup V_{21})$ открыто в Y. Из определения отображения ${}^{\mathfrak{A}}_{1}g = g_1 \cdot {}^{\mathfrak{A}}_{1}\pi$ следует, что множества

$$ U_{11} = \{({}^{\mathfrak{A}}_{0}\pi(x_{\mathfrak{A}}), {}^{\mathfrak{A}}_{1}g(x_{\mathfrak{A}}))\colon\ x_{\mathfrak{A}} \in V_{11}\} \quad \text{и} \quad U_{21} = \{({}^{\mathfrak{A}}_{0}\pi(x_{\mathfrak{A}}), {}^{\mathfrak{A}}_{1}g(x_{\mathfrak{A}}))\colon\ x_{\mathfrak{A}} \in V_{21}\} $$

отделяются друг от друга в U_1 замкнутым в U_1 множеством $(X_0 \times \{0\}) \cap U_1$. Так как по соотношению $(*)$ для любой точки $x_{\mathfrak{A}}$ имеем

$$ |{}^{\mathfrak{A}}_{1}g(x_{\mathfrak{A}}) - g(x_{\mathfrak{A}})| = |g_{(1)}(x_{\mathfrak{A}}) - g(x_{\mathfrak{A}})| = $$
$$ = \Big|\sum_{n=2}^{\infty} g_{(1 \ldots n)}(x_{\mathfrak{A}})\Big| \leqslant \frac{1}{2 \cdot 4} \cdot |g_{(1)}(x_{\mathfrak{A}})| < \frac{1}{4} \cdot |g_{(1)}(x_{\mathfrak{A}})| = \frac{1}{4} \cdot |{}^{\mathfrak{A}}_{1}g(x_{\mathfrak{A}})| , $$

то множества $h(V_{11})$ и $h(V_{21})$ также отделяются друг от друга множеством $X_0 \times \{0\}$, т. е. эти множества открыты во множестве U_1, а значит и в Y.

Множества $V_{i_1} \cap \ldots \cap V_{i_k}$ обозначим через $V_{(i_1 \ldots i_k)}$. Каждое множество ${}^{\mathfrak{A}}_{0}\pi^{-1}({}_kO_0)$ распадается в сумму 2^k множеств $V_{(i_1 \ldots i_k)}$, $i_1 = 1, 2; \ldots; i_k = 1, 2$. Для доказательства открытости множеств V_{ik} остаточно показать открытость множеств $V_{(i_1\dots i_k)}$. Предположим, что для всех $l<k$ множества $h(V_{(i_1\dots i_l)})$ открыты в Y (для $l=1$ это уже доказано).

Покажем, что множества $h(V_{(i_1\dots i_{k-1}1)})$ и $h(V_{(i_1\dots i_{k-1}2)})$ отделяются замкнутым в $p^{-1}({}_kO_0)$ множеством

$$F=\Big\{\sum_{n=1}^{k-1} g_{(1\dots n)}(x_{\mathfrak A}):\ x_{\mathfrak A}\in V_{(i_1\dots i_{k-1})}\cap {}_0^{\mathfrak A}\pi^{-1}({}_kO_0)\Big\}.$$

Сначала покажем замкнутость F.

Из определения функций ${}_n^{\mathfrak A}g$ ясно, что если для двух точек $x'=\{x'_n\}$ и $x''=\{x''_n\}\in V_{(i_1\dots i_{k-1})}$ выполнено соотношение ${}_0^{\mathfrak A}\pi(x')=x_0={}_0^{\mathfrak A}\pi(x'')$, то ${}_n^{\mathfrak A}g(x')={}_n^{\mathfrak A}g(x'')$, $n<k$ [13], т. е. отображение

$$\sum_{n=1}^{k-1} g_{(1\dots n)}:\ V_{(i_1\dots i_{k-1})}\cap{}_0^{\mathfrak A}\pi^{-1}({}_kO_0)\to I$$

можно представить в виде суперпозиции отображения ${}_0^{\mathfrak A}\pi$ и некоторого отображения $\tilde f\colon {}_kO_0\to I$, причем отображение $\tilde f$ непрерывно, так как множество ${}_kO_0$ обладает (по отмеченному в конце § 3 свойству частичных произведений) таким гомеоморфизмом f' во множество $V_{(i_1\dots i_{k-1})}\cap{}_0^{\mathfrak A}\pi^{-1}({}_kO_0)$, что отображение $\pi_0^{\mathfrak A}\cdot f'$ совпадает с тождественным отображением ${}_kO_0$. Так как отрезок I — хаусдорфово пространство, то множество $\{(x_0,\tilde f(x_0)):\ x_0\in{}_kO_0\}$, совпадающее со множеством F, замкнуто в произведении ${}_\alpha O_0\times I\equiv p^{-1}({}_\alpha O_0)$.

Покажем теперь, что множества $h(V_{(i\dots i_{k-1}1)})$ и $h(V_{(i_1\dots i_{k-1}2)})$ отделяются множеством F.

Действительно, по определению, для всех точек $x_{\mathfrak A}\in V_{(i_1\dots i_{k-1}1)}$ функция ${}_k^{\mathfrak A}g(x_{\mathfrak A})$ отрицательна, а для всех точек $x_{\mathfrak A}\in V_{(i_1\dots i_{k-1}2)}$ функция ${}_k^{\mathfrak A}g(x_{\mathfrak A})$ положительна, т. е., если, например, для любой точки $x_{\mathfrak A}\in V_{(i_1\dots i_{k-1}1)}$ имеем соотношение

$$\sum_{n=1}^{k} g_{(1\dots n)}(x_{\mathfrak A})<\sum_{n=1}^{k-1} g_{(1\dots n)}(x_{\mathfrak A}),\ [14]$$

то тогда для любой точки $x_{\mathfrak A}\in V_{(i_1\dots i_{k-1}2)}$ будет выполнено соотношение

$$\sum_{n=1}^{k} g_{(1\dots n)}(x_{\mathfrak A})>\sum_{n=1}^{k-1} g_{(1\dots n)}(x_{\mathfrak A}).$$

[13] Из соотношения ${}_0^{\mathfrak A}\pi(x')={}_0^{\mathfrak A}\pi(x'')$ следует, что $|g_{(1\dots k)}(x')|=|g_{(1\dots k)}(x'')|$ при любом k.

[14] Что означает, что $g_{(1\dots k)}(x_{\mathfrak A})<0$.

но отсюда, по соотношению (*), для любой точки $x_{\mathfrak A}\in V_{(i_1\dots i_{k-1}1)}$ будем иметь соотношение

$$g(x_{\mathfrak A})=\sum_{n=1}^{k-1} g_{(1\dots n)}(x_{\mathfrak A})+g_{(1\dots k)}(x_{\mathfrak A})+\sum_{n=k+1}^{\infty} g_{(1\dots n)}(x_{\mathfrak A})\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{n=1}^{k-1} g_{(1\dots n)}(x_{\mathfrak A})+g_{(1\dots k)}(x_{\mathfrak A})+\Big|\sum_{n=k+1}^{\infty} g_{(1\dots n)}(x_{\mathfrak A})\Big|<$$
$$<\sum_{n=1}^{k-1} g_{(1\dots n)}(x_{\mathfrak A}),$$

ибо

$$g_{(1\dots k)}(x_{\mathfrak A})+\Big|\sum_{n=k+1}^{\infty} g_{(1\dots n)}(x_{\mathfrak A})\Big|\leqslant g_{(1\dots k)}(x_{\mathfrak A})+\frac{1}{2\cdot 4^n}\,|g_{(1\dots k)}(x_{\mathfrak A})|,$$

а, как мы условились, $g_{(1\dots k)}(x_{\mathfrak A})<0$, т. е. полученное число отрицательно.

Аналогичным образом показываем, что $g(x_{\mathfrak A})>\sum_{n=1}^{k-1} g_{(1\dots n)}(x_{\mathfrak A})$ для любой точки $x_{\mathfrak A}\in V_{(1\dots i_{k-1}2)}$.

Из отделимости множеств $h(V_{(i_1\dots i_{k-1}1)})$ и $h(V_{(i_1\dots i_{k-1}2)})$ и из того, что множество

$$h\big(V_{(i_1\dots i_{k-1})}\cap{}_0^{\mathfrak A}\pi^{-1}({}_kO_0)\big)=h(V_{(i_1\dots i_{k-1}1)}\cup V_{(i_1\dots i_{k-1}2)})$$

открыто в Y, вытекает открытость в Y множеств $h(V_{i_1\dots i_{k-1}i_k)})$, $i_1=1,2;\ \dots;\ i_k=1,2$.

Открытость отображения h доказана, т. е. лемма также доказана.

Теорема 4.1. *Пусть в пространстве* X_0 *дано* k *систем открытых множеств* ${}_1O_0^i\supseteq{}_2O_0^i\supseteq\dots\supseteq{}_nO_0^i\supseteq\dots$, $i=1,2,\dots,k$, *таких, что на* X_0 *для каждого* $n=1,2,\dots$ *и каждого* $i=1,\dots,k$ *существует непрерывная функция* f_n^i, *равная нулю на множестве* $X_0\setminus{}_nO_0^i$ *и не равная нулю ни в одной точке множества* ${}_nO_0^i$.

Тогда частичное произведение $X_{\mathfrak A}=P(X_0,\{{}_nO_0^i\}$, $n=1,2,\dots$, $i=1,\dots,k)$ *обладает таким гомеоморфным отображением* h *в произведение* $X_0\times\prod_{i=1}^{k} I_i=X_0\times I^k$ *пространства* X_0 *на* k*-мерный куб* I^k, *что* ${}_0^{\mathfrak A}\pi=p\cdot f$, *где* p *обозначает естественную проекцию произведения* $X_0\times I^k$ *на сомножитель* X_0.

Доказательство. По лемме 4.2 каждое частичное произведение $X_{\mathfrak A_i}=P(X_0,\{{}_nO_0^i\}$, $n=1,2,\dots)$ обладает таким гомеоморфным отображением h_i в произведение $X_0\times I_i$ основания X_0 на отрезок I_i, что ${}_0^{\mathfrak A_i}\pi=p_i\cdot h_i$, где p_i обозначает естественную проекцию $X_0\times I_i$ на сомножитель X_0. Гомеоморфизмы $h_i\colon X_{\mathfrak{A}_i}\to X_0\times I_i$ определяют гомеоморфизм $h\colon \prod_{i=1}^{k} X_{\mathfrak{A}_i}\to\prod_{i=1}^{k}(X_0\times I_i)$ по правилу $h(\{X_{\mathfrak{A}_i}\})=\{h_i(X_{\mathfrak{A}_i})\}$.

Как было отмечено в § 3, произведение $\prod_{i=1}^{k} X_{\mathfrak{A}_i}$ естественным образом содержит веерное произведение $\overline{X}_{\mathfrak{A}}$ пространств $X_{\mathfrak{A}_i}$ относительно отображений ${}_0^{\mathfrak{A}_i}\pi\colon X_{\mathfrak{A}_i}\to X_0$ а произведение $\prod_i (X_0\times I_i)$ естественным образом содержит веерное произведение $Y=X_0\times I^k$ пространств $X_0\times I_i$ относительно естественных проекций $p_i\colon X_0\times I_i\to X_0$. Покажем, что $h(\overline{X}_{\mathfrak{A}})\subseteq Y$. Действительно, если $\overline{x}_{\mathfrak{A}}=\{x_{\mathfrak{A}_i}\}\in\overline{X}_{\mathfrak{A}}$, т. е. ${}_0^{\mathfrak{A}_i}\pi(x_{\mathfrak{A}_i})=x_0$, $i=1,\ldots,k$, то $h(\{x_{\mathfrak{A}_i}\})=\{h_i(x_{\mathfrak{A}_i})\}$ и $p_i\big(h_i(x_{\mathfrak{A}_i})\big)={}_0^{\mathfrak{A}_i}\pi(x_{\mathfrak{A}_i})=x_0$. Таким образом, отображение h гомеоморфно отображает $\overline{X}_{\mathfrak{A}}$ в $Y=X_0\times I^k$, причем, как мы только что показали, для любой точки $\overline{x}_{\mathfrak{A}}\in\overline{X}$ выполнено соотношение ${}_0^{\mathfrak{A}}\overline{\pi}=p\cdot h$ ([15]), где отображение p в соответствие точке $\big((x_0,t_1),\ldots,(x_0,t_k)\big)\in Y$, $t_i\in I_i$, ставит точку $x_0\in X_0$. Так как множество X_0 можно естественным образом отождествить с диагональю произведения $\prod_{i=1}^{k}(X_0)_i$, а отображение p — отождествить с естественной проекцией произведения $\prod_{i=1}^{k}(X_0\times I_i)=\prod_{i=1}^{k}(X_0)_i\times\prod_{i=1}^{k}I_i$ на сомножитель $\prod_{i=1}^{k}(X_0)_i$, то теорема будет доказана, если мы докажем, что $\overline{X}_{\mathfrak{A}}\equiv X_{\mathfrak{A}}$ и ${}_0^{\mathfrak{A}}\overline{\pi}\equiv{}_0^{\mathfrak{A}}\pi$, но это вытекает из пункта 4 параграфа 13 работы [24].

Базу ξ пространства X ([16]) назовем *счётной на изолированных точках*, если каждая изолированная в X точка повторяется в качестве элемента базы ξ счетное (имеется в виду бесконечное счетное) число раз.

Лемма 4.3. *В любом метрическом пространстве X с $\dim X=k$ существует счетная на изолированных точках база, распадающаяся в $(k+1)$ систем $\nu_i=\{{}_{ani}O\}$, $ani\in\mathfrak{A}_{ni}$, $n=1,2,\ldots,i=1,2,\ldots,k+1$, открытых множеств ${}_{ani}O$, причем при фиксированных n и i множества ${}_{ani}O$, $ani\in\mathfrak{A}_{ni}$, попарно не пересекаются, и при фиксированном i каждое множество ${}_{an+1i}O$ содержится в одном из множеств ${}_{ani}O$ (или совпадает с ним)* ([17]).

Доказательство. Пусть $\dim X=0$. Возьмем для каждого $\varepsilon_n=1/n$ ε_n-покрытие μ_n пространства X из попарно непересекающихся открыто-замкнутых множеств. Тогда система ν_1 будет состоять из элементов покрытия μ_1, система ν_2 — из всевозможных пересечений элементов покрытий μ_1 и μ_2, т. е. из элементов покрытия $\mu_1\wedge\mu_2$, система ν_3 — из элементов покрытия $\mu_1\wedge\mu_2\wedge\mu_3$ и т. д.

Пусть теперь $\dim X=k$. Тогда пространство X представляется в виде суммы $(k+1)$ нульмерных в смысле $\dim$ множеств X_i, $i=1,\ldots,k+1$ (см. [15]). В каждом множестве X_i построим систему $\mu_i=\{{}_{ani}V\}$, $ani\in\mathfrak{A}_{ni}$, $n=1,2,\ldots$, открытых в X_i множеств, удовлетворяющих условию теоремы для $k=0$, причем при фиксированном n каждая система $\mu_{ni}=\{{}_{ani}V\}$ является дизъюнктным открытым $(1/n)$-покрытием X_i. По лемме 4 из приложения к статье [18], покрытие μ_{ni} можно комбинаторно ([18]) продолжить в $(2/n)$-покрытие $\nu_{ni}=\{{}_aI_{ni}O\}$, $ani\in\mathfrak{A}_{ni}$, некоторой окрестности множества X_i, причем можно считать, что ${}_{an+1i}O\subseteq{}_{ani}O$, если ${}_{an+1i}V\subseteq{}_{ani}V$. При фиксированном i множества ${}_{ani}O$, $ani\in\mathfrak{A}_{ni}$, $n=1,2,\ldots$, дадут нужную систему ν_i, а совокупность всех множеств ${}_{ani}O$ будет нужной базой в X. Лемма доказана.

Теорема 4.2. *Пусть дано метрическое пространство X_0 с $\dim X_0=k$. Тогда в X_0 существует такая счетная на изолированных точках база $\{{}_\beta O_0\}$, $\beta\in\mathfrak{B}$, что частичное произведение $X_{\mathfrak{B}}=P(X_0,\{{}_\beta O_0\},\beta\in\mathfrak{B})$ можно считать подмножеством произведения $X_0\times I^{k+1}$ пространства X_0 на $(k+1)$-мерный куб I^{k+1}, а отображение ${}_0^{\mathfrak{B}}\pi$ можно считать совпадающим с естественной проекцией подмножества $X_{\mathfrak{B}}$ произведения $X_0\times I^{k+1}$ на сомножитель X_0.*

Доказательство. Выберем в X_0 такую же базу, как в лемме 4.3. Обозначим через ${}_nO_0^i$ сумму $\bigcup_{ani\in\mathfrak{A}_{ni}}{}_{ani}O$. Так как множества ${}_{ani}O$ попарно не пересекаются, то $P(X_0,{}_nO_0^i)\equiv P(X_0,\{{}_{ani}O\},ani\in\mathfrak{A}_{ni})$. Из условия леммы 4.3 следует, что ${}_1O_0^i\supseteq\ldots\supseteq{}_nO_0^i\supseteq\ldots$ для любого $i=1,\ldots,k+1$.

По пункту 4 параграфа 13 работы [24], веерное произведение

$$X_{\mathfrak{B}}=P(X_0,\{{}_{ani}O\},\ ani\in\mathfrak{A}_{ni},\ n=1,2,\ldots,\ i=1,\ldots,k+1)$$

и отображение ${}_0^{\mathfrak{B}}\pi$ совпадают с веерным произведением $X_{\mathfrak{A}}=P(X_0,\{{}_nO_0^i\}$, $n=1,2,\ldots$, $i=1,\ldots,k+1)$ и отображением ${}_0^{\mathfrak{A}}\pi$. Остальное следует из теоремы 4.1. Теорема 4.2 доказана.

Теперь сформулирую основной результат второй части статьи.

Теорема 4.3. *Если метрическое пространство X обладает нульмерным и совершенным ([19]) отображением f в метрическое пространство X_0 с $\dim X_0=k$, то X обладает гомеоморфным отображением h в произведение $X_0\times I^{k+1}$ пространства X_0 на $(k+1)$-мерный куб I^{k+1}. Можно при этом считать, что $f=p\cdot h$, где p обозначает естественную проекцию произведения $X_0\times I^{k+1}$ на сомножитель X_0.*

Доказательство этой теоремы потребуют еще нескольких лемм.

([15]) ${}_0^{\mathfrak{A}}\overline{\pi}$ обозначает проекцию веерного произведения $\overline{X}_{\mathfrak{A}}$ на основание X_0.

([16]) Под *базой* понимается индексированная система открытых в X множеств, всевозможные суммы которых дают все открытые в X множества, причем элементы базы, занумерованные разными индексами, могут совпадать как множества.

([17]) См. по поводу этой леммы теорему 2.2 из [25].

([18]) Т. е. с сохранением схемы пересечений.

([19]) Т. е. замкнутым и бикомпактным (образы замкнутых множеств—замкнуты, прообразы точек—бикомпактны).

Будем говорить, что *индексированная система* μ *множеств* U_β, $\beta \in \mathfrak{B}$, *увеличивает индексированную систему* ν *множеств* O_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$, если между элементами системы μ и элементами какой-нибудь подсистемы ν' системы ν (в частности, ν' может совпадать с ν) можно установить такое взаимно-однозначное соответствие $\alpha \leftrightarrow \beta = \beta(\alpha)$, что $O_\alpha \subseteq U_{\beta(\alpha)}$.

Будем называть индексированную систему множеств μ *системой без повторений*, если любые два элемента этой системы не совпадают между собой как множества.

Лемма 4.4. *Пусть X — паракомпакт, F — его замкнутое подмножество, μ' — покрытие F открытыми в X множествами. Тогда из μ' можно выбрать подпокрытие μ, являющееся системой без повторений и увеличивающее некоторое локально конечное в X покрытие множества F открытыми в X множествами.*

Доказательство. В силу паракомпактности X, в μ' можно вписать локально конечное в X покрытие $\nu = \{V_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, множества F открытыми в X множествами. Поставим в соответствие каждому элементу $V_\alpha \in \nu$ какой-нибудь содержащий его элемент $U_{\beta(\alpha)} \in \mu'$. Избавившись в системе элементов $U_{\beta(\alpha)}$ от повторяющихся множеств, получим нужное подпокрытие μ.

Лемма 4.5. *Пусть в пространстве X имеется счетная на изолированных точках база ξ. Пусть еще система без повторений ξ' множеств из базы ξ увеличивает локально конечную систему ν. Тогда система $\xi \setminus \xi'$ является счетной на изолированных точках базой в X.*

Доказательство. Возьмем произвольную точку $x \in X$. Существует такая ее окрестность O_x, которая пересекается лишь с конечным числом элементов $V_1, \ldots, V_p$ системы ν.

Если точка x неизолированная, то существует ее базисная окрестность O, строго содержащаяся в пересечении $\bigcap\limits_{i=1}^{p} V_i$, т. е. не совпадающая ни с одним из элементов системы ξ' (так как система ξ' увеличивает систему ν), а значит тем же свойством будут обладать и все базисные окрестности точки x, содержащиеся в O.

Если же точка x изолированная, то (ввиду того, что точка x, как элемент базы ξ, входит в эту базу счетное число раз, а точка x может совпадать только с конечным числом элементов системы ν, т. е. и системы ξ') система $\xi \setminus \xi'$ содержит точку x в качестве своего элемента счетное число раз. Лемма доказана.

Напомним, что *базой нульмерного (разбивающего) отображения* $f\colon X \to Y$, [10], называется такая система $\{{}_\alpha O, {}_\alpha O', {}_\alpha O''\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, открытых множеств ${}_\alpha O \subseteq Y$ и ${}_\alpha O', {}_\alpha O'' \subseteq X$, что ${}_\alpha O' \cap {}_\alpha O'' = \Lambda$, ${}_\alpha O' \cup {}_\alpha O'' = f^{-1}({}_\alpha O)$ для любого $\alpha \in \mathfrak{A}$ и система множеств ${}_\alpha O'$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, образует базу в пространстве X.

Лемма 4.6. *Пусть f — совершенное и нульмерное отображение метрического пространства X на метрическое пространство Y и $\xi = \{{}_\alpha O\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$ — счетная на изолированных точках база в Y. Тогда существует база отображения f вида $\{{}_\alpha O, {}_\alpha O', {}_\alpha O''\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$.*

Доказательство. Рассмотрим открытое локально конечное $(1/n)$-покрытие $\omega = \{U_\beta\}$, $\beta \in \mathfrak{B}$, пространства X и пусть $\overline{\omega} = \{F_\beta\}$, $\beta \in \mathfrak{B}$, такое замкнутое покрытие X, что $F_\beta \subseteq U_\beta$ (существование $\overline{\omega}$ вытекает из паракомпактности X). Покрытие $\overline{\omega}$, очевидно, локально конечно. Из совершенности отображения f следует, что образ $\eta = \{f(F_\beta) = \Phi_\beta\}$, $\beta \in \mathfrak{B}$, замкнутого локально конечного покрытия $\overline{\omega}$ будет замкнутым и локально конечным покрытием пространства Y.

Возьмем систему бинарных покрытий $\{U_\beta, (\bigcup\limits_{\beta' \neq \beta} U_{\beta'}) \setminus F_\beta = U'_\beta\} = \beta$. Индексы β можно считать трансфинитными числами от 1 до ω_τ где $\tau = \overline{\overline{m}}(\mathfrak{B})$. Пусть $\beta = 1$. У каждой точки $y \in \Phi_1$ (в силу замкнутости и нульмерности f) существует окрестность O_y из базы ξ, прообраз $f^{-1}(Oy)$ которой распадается в сумму двух непересекающихся множеств, одно из которых содержится в U_1, а другое — в U'_1. В соответствии с леммой 4.4, из системы окрестностей O_y выделим подпокрытие без повторений $\mu_1 = \{O_{1\theta}\}$, $1\theta \in \Theta_1$, увеличивающее локально конечное в Y покрытие ν_1 множества Φ_1 открытыми в Y множествами. В силу леммы 4.5, система $\xi \setminus \mu_1$ будет счетной на изолированных точках базой пространства Y.

Предположим, что для всех чисел $\beta < \beta_0$ уже построены покрытия без повторений μ_β из элементов базы ξ, увеличивающие локально конечные в Y покрытия ν_β множеств Φ_β открытыми в Y множествами, причем каждый раз система $\xi \setminus \bigcup\limits_{\beta' < \beta} \mu_{\beta'}$ является счетной на изолированных точках базой Y и $\mu_\beta \subset \xi \setminus \bigcup\limits_{\beta' < \beta} \mu_{\beta'}$.

Если число β_0 не предельное, то построение покрытий μ_{β_0}, ν_{β_0} и базы $\xi \setminus \bigcup\limits_{\beta \leqslant \beta_0} \mu_\beta$ проводится так же, как в случае $\beta = 1$ (исходя из базы $\xi \setminus \bigcup\limits_{\beta \leqslant \beta_0 - 1} \mu_\beta$).

Пусть теперь число β_0 предельное. Докажем, что система $\xi \setminus \bigcup\limits_{\beta < \beta_0} \mu_\beta$ является счетной на изолированных точках базой Y.

Система множеств Φ_β локально-конечна, т. е. консервативна. Поэтому, если $x \notin \bigcup\limits_{\beta < \beta_0} \Phi_\beta$, то существует базисная окрестность O_x точки x, не пересекающаяся ни с одним из множеств Φ_β, $\beta < \beta_0$. Так как для каждого $\beta < \beta_0$ элементы покрытий μ_β множеств Φ_β пересекают Φ_β, то $O_x \in \xi \setminus \bigcup\limits_{\beta < \beta_0} \mu_\beta$. Если еще точка x изолированная, то все элементы базы ξ, совпадающие как множества с точкой x, содержатся в системе $\xi \setminus \bigcup\limits_{\beta < \beta_0} \mu_\beta$.

Пусть теперь $x \in \bigcup\limits_{\beta < \beta_0} \Phi_\beta$. Тогда x принадлежит лишь конечному числу множеств Φ_β, например, $\Phi_{\beta_1}, \ldots, \Phi_{\beta_s}$. Поэтому точка x обладает окрестностью O_x, не пересекающейся с теми Φ_β, для которых $\beta \neq \beta_i$, $i = 1, \ldots, s$. Так как системы ν_β локально конечны, то точка x, если она неизолированная, обладает окрестностью $V_x \subset O_x$, строго содержащейся в пересечении всех элементов, взятых из систем $\nu_{\beta_1}, \ldots, \nu_{\beta_s}$ и содержащих точку x. Все базисные окрестности точки x, содержащиеся в V_x, не будут, очевидно, входить в систему $\bigcup_{\beta<\beta_0} \mu_\beta$.

Если точка x изолированная, то она может как элемент лишь по одному разу войти в системы $\mu_{\beta_1}, \ldots, \mu_{\beta_s}$ (так как это системы без повторений) и ни разу — в остальные системы μ_β, т. е. система $\xi \setminus \bigcup_{\beta<\beta_0} \mu_\beta$ содержит точку x в качестве элемента счетное число раз. Таким образом, система $\xi \setminus \bigcup_{\beta<\beta_0} \mu_\beta$ является счетной на изолированных точках базой Y.

После доказанного, построение покрытий $\mu_{\beta_0}, \nu_{\beta_0}$ и базы $\xi \setminus \bigcup_{\beta\leq\beta_0} \mu_\beta$ производится так же, как в случае $\beta = 1$.

В конце концов, мы получаем для всех $\beta \in \mathfrak{B}$ системы без повторений $\mu_\beta = \{O_{\beta\theta}\}$, $\beta\theta \in \Theta_\beta$, состоящие из элементов базы ξ, причем:

а) система $\xi \setminus \bigcup_{\beta\in\mathfrak{B}} \mu_\beta$ является счетной на изолированных точках базой Y;

б) $\mu_\beta \subset \xi \setminus \bigcup_{\beta'<\beta} \mu_{\beta'}$, для $\beta \in \mathfrak{B}$, т. е. если $O_\alpha \in \mu_{\beta'}$, $\beta' < \beta$, то $O_\alpha \notin \mu_\beta$;

в) для каждой точки $x \in X$ существует такой индекс $\beta \in \mathfrak{B}$ и такой элемент $O_{\beta\theta} \ni f(x)$, что $f^{-1}(O_{\beta\theta}) = O'_{\beta\theta} \cup O''_{\beta\theta}$, $O'_{\beta\theta} \cap O''_{\beta\theta} = \Lambda$ и $y \in O'_{\beta\theta} \subseteq U_\beta$, причем $\operatorname{diam}(U_\beta) < 1/n$.

Проведя теперь очевидную индукцию по n, мы получим, взяв все множества $O_{\beta\theta}$, такую подсистему $\{_\alpha O\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}' \subseteq \mathfrak{A}$, базы ξ, что будет существовать база отображения f вида $\{_\alpha O, {_\alpha O'}, {_\alpha O''}\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}'$. Положив $_\alpha O' = f^{-1}(O)$, $_\alpha O'' = \Lambda$ для $\alpha \in \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{A}'$, получим базу отображения f нужного вида.

Доказательство теоремы 4.3. Возьмем такую, как в теореме 4.2, счетную на изолированных точках базу $\xi = \{_\alpha O_0\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, пространства X_0. В силу леммы 4.6, существует база разбивающего отображения f вида $\{_\alpha O_0, {_\alpha O'}, {_\alpha O''}\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$. Из теоремы 7.6 статьи [10] следует, что X обладает таким гомеоморфизмом h: $X \to P(X_0, \{_\alpha O_0\}, \alpha \in \mathfrak{A})$, что $f = {}^{\mathfrak{A}}_{0}\pi \cdot h$. Теперь осталось применить еще только теорему 4.2.

Из доказанной теоремы 4.3 (ввиду того, что любое отображение бикомпакта в бикомпакт совершенно) вытекает, доказанная С. Эйленбергом [27]

Теорема 4.4. *Для любого k-мерного компакта X_0 произведение $X_0 \times I^{k+1}$ содержит гомеоморфный образ любого компакта, нульмерно отображающегося в X_0* ([20]).

Замечание 4.2. Теорема 4.3 обобщает известную теорему Нёбелинга-Понтрягина об универсальности $(2k+1)$-мерного куба I^{2k+1} для всех k-мерных пространств со счетной базой.

([20]) В статье [28] из-за моего недосмотра ошибочно указано, что это утверждение принадлежит мне. Я весьма признателен А. Лелеку, обратившему мое внимание на статью [27].

Действительно, положим в теореме 4.3 $X_0 = I^k$. Тогда $X_0 \times I^{k+1} = I^{2k+1}$. И, так как любое k-мерное метрическое пространство со счетной базой является подмножеством k-мерного компакта, а любой k-мерный компакт обладает нульмерным отображением в I^k, то из теоремы 4.3 теорема Нёбелинга-Понтрягина следует.

Так как в k-мерном кубе I^k можно выбрать базу, удовлетворяющую как условию леммы 4.3, так и такую, что для любого $\varepsilon > 0$ число элементов этой базы диаметра $> \varepsilon$ конечно (см. теорему 14.3 из [10]), то рассуждая так же, как в доказательстве теоремы 4.2, (по пункту 4 параграфа 13 работы [24]) получаем следующую теорему.

Теорема 4.5. *Универсальные компакты P^k из теоремы 14.3 заметки [10] можно считать гомеоморфными веерными произведениями k-мерных компактов P^k_i, $i = 1, \ldots, k+1$, относительно отображений ${}^{i}_{0}\pi$: $P^k_i \to I^k$, где каждый компакт P^k_i обладает таким гомеоморфизмом h_i в I^{k+1} что ${}^{i}_{0}\pi = p_i \cdot h_i$, причем p_i обозначает естественную проекцию произведения I^{k+1} на сомножитель I^k. Короче говоря, P^k можно считать веерным произведением над I^k $(k+1)$ штук k-мерных компактов, вложимых в I^{k+1}.*

Так как, $P^1 = M^1$, [10], то, в частности, получается

Теорема 4.6. *Менгеровская универсальная кривая M^1 гомеоморфна веерному произведению над отрезком I^1 двух плоских одномерных континуумов P^1_1 и P^1_2. Причем континуумы P^1_i, $i = 1, 2$, обладают такими гомеоморфизмами h_i в квадрат I^2 что ${}^{i}_{0}\pi = p_i \cdot h_i$, где p_i обозначает естественную проекцию I^2 на I^1.*

Цитированная литература

[1] S. Mardešić, *On covering dimension and inverse limits of compact spaces*, Illinois Math. Journ. 4, 2 (1960), стр. 278-291.

[2] Б. А. Пасынков, *Об универсальных бикомпактах данного веса и данной размерности*, ДАН СССР 154, 5 (1964), стр. 1042-1043.

[3] — *Об одном классе отображений и о размерности нормальных пространств*, Сибирск. математ. журн. 5, 2 (1964), стр. 356-376.

[4] R. Engelking, Je. Sklarenko, *On compactifications allowing extensions of mappings*, Fund. Math. 53 (1963), стр. 65-79.

[5] J. Nagata, *On a universal n-dimensional set for metric spaces*, Journal Reine und Angew. Math. 204, 1-4 (1960), стр. 132-138.

[6] — *Note on dimension theory for metric spaces*, Fund. Math. 45 (1958), стр. 143-181.

[7] А. В. Зарелуа, *Универсальный бикомпакт данного веса и данной размерности*, ДАН СССР 154, 5 (1964), стр. 1015-1018.

[8] Б. А. Пасынков, *Частичные топологические произведения*, ДАН СССР 154, 4 (1964), стр. 767-770.

[9] — *Об одном обобщении топологических произведений*, ДАН СССР 150, 1 (1963), стр. 40-43.

[10] — *Частичные топологические произведения*, Труды Моск. Математ. Об-ва, 13 (1965), стр. 136-245.

[11] P. Alexandroff, *Untersuchungen über Gestalt und Lage abgeschlossener Mengen beliebiger Dimension*, Ann. Math., Ser. 2, 30, 1 (1928), стр. 101-187.

[12] P. S. Alexandrov, *On the dimension of normal spaces*, Proc. Roy. Soc. 189 (1947), стр. 11-39.

[13] C. H. Dowker, *Mapping theorems for non-compact spaces*, Amer. Math. Journ. Math. 69, 2 (1947), стр. 200-242.

[14] Б. А. Пасынков, *О спектральной разложимости топологических пространств*, Матем. сборник 66, 1 (1965), стр. 35-79.

[15] М. Катетов, *О размерности метрических пространств*, ДАН СССР 79, 2 (1951), стр. 189-191.

[16] M. Katětov, *On the dimension of non-separable spaces I*, Czechosl. Math. Journ. 2 (77) (1952), стр. 333-368.

[17] О. В. Локуциевский, *О размерности бикомпактов*, ДАН СССР 67, 2 (1949), стр. 217-219.

[18] Ю. М. Смирнов, *О метризации топологических пространств* УМН 6, 6 (1651), стр. 100-111.

[19] А. В. Зарелуа, *О теореме Гуревича*, Матем. сборник 60, 1 (1963), стр. 17-28.

[20] P. Roy, *Failure of equivalence of dimension concepts for metric spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. 68, 6 (1962), стр. 350-362.

[21] K. Morita, *Normal families and dimension theory for metric spaces*, Math. Ann. 128, 4 (1954), стр. 350-362.

[22] Ю. М. Смирнов, *О сильно паракомпактных пространствах*, Изв. АН СССР, сер. матем., 20, 2 (1956), стр. 253-274.

[23] Б. А. Пасынков, *Об универсальных пространствах для некоторого класса пространств*, ДАН СССР 153, 5 (1963), стр. 1009-1012.

[24] А. Г. Курош, А. Х. Лифшиц, Е. Г. Шульгейфер, *Основы теории категорий*, УМН 15, 6 (1960), стр. 3-52.

[25] А. В. Архангельский, *О рангах систем множеств и размерности пространств*, Fund. Math. 52 (1963), стр. 257-275.

[26] R. Sikorski, K. Zarankiewicz, *On uniformization of functions* (1), Fund. Math. 41, 2 (1955), стр. 339-344.

[27] S. Eilenberg, *Remarque sur un théorème de W. Hurewicz*, Fund. Math. 24 (1935), стр. 156-159.

[28] П. С. Александров, *О некоторых основных направлениях в общей топологии*, УМН 19, 6 (1964), стр. 3-46.

[29] P. Alexandroff et P. Urysohn, *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une classe (L) soit une classe (D)*, Comptes Rendus, Paris 177 (1923), стр. 1274-1277.

[30] N. Levine, *Remark on uniform continuity in metric spaces*, Amer. Journ. Math. 69, 2 (1947), стр. 200-242.

Reçu par la Rédaction le 20. 9. 1966

INDEX ALPHABÉTIQUE DES TOMES LI-LX (1962—1967)*

* L'index présent est la suite de celui des t. I-XV inséré au t. XV (1930), des t. XVI-XXV inséré au t. XXV (1935), des t. XXVI-XL inséré au t. XL (1953) et des t. XLI-L inséré au t. L (1962).