Ein Satz der kombinatorischen Mengenlehre

von

E. Harzheim (Köln)

§ 1. Einleitung. In der kombinatorischen Mengenlehre stellt sich folgende Frage: M sei eine unendliche Menge, $\mathfrak{P}(M)$ die Menge aller ihrer Teilmengen, und $\mathfrak{P}(M)$ sei irgendwie in (disjunkte) Klassen (Schubfächer) zerlegt. Was kann man dann aussagen über die Klassen, zum Beispiel im Hinblick auf Ordnungstypen, die in ihnen realisiert werden? Wir legen dabei in $\mathfrak{P}(M)$ und seinen Teilmengen jeweils die natürliche Ordnung $\subset$ der Inklusion zugrunde. Eine totalgeordnete Teilmenge von $\mathfrak{P}(M)$ heißt kurz eine *Kette.*

In der Arbeit [5] werden zu dieser Frage einige grundlegende Sätze angegeben. In dieser Arbeit soll eine gewisse Frage behandelt werden, die die Ergebnisse von [5] im Falle singulärer Kardinalzahlen $|M|$ erweitert. Wir wollen für Ordinalzahlen α festsetzen:

$$\mathfrak{k}_\alpha = \sum 2^{\aleph_\nu} | \nu < \alpha; \quad \text{für } \alpha = 0 \text{ sei } \mathfrak{k}_0 = \aleph_0 .$$

Die allgemeine Kontinuumhypothese ist äquivalent dazu, daß $\mathfrak{k}_\alpha = \aleph_\alpha$ für alle Ordinalzahlen α gilt. Es wird sich dann als Hauptresultat ergeben:

Satz I. *Ist $|M| = \mathfrak{k}_\alpha$ und ist die Potenzmenge $\mathfrak{P}(M)$ irgendwie auf $\aleph_\alpha$ viele Klassen aufgeteilt, dann gibt es eine Klasse K, für die gilt: Zu jeder Ordinalzahl $\tau < \omega_{\alpha+1}$ gibt es eine Kette $\subset K$ vom Ordnungstyp τ und eine Kette $\subset K$ vom Typ τ^* (dem zu τ inversen).*

Für reguläres $\aleph_\alpha$ hatte sich in [5] dieser Satz allgemein für jedes τ mit $|\tau| \leqslant \aleph_\alpha$ ergeben, wo τ irgendein Typ einer (teilweise) geordneten Menge war, also nicht nur für Ordinalzahlen τ. Die Methode von [5] lieferte dafür im Falle eines singulären $\aleph_\alpha$ den Satz I nur für $|\tau| < \aleph_\alpha$.

Bei Annahme von $\mathfrak{k}_\alpha = \aleph_\alpha$ stellen die hier genannten Ergebnisse Verallgemeinerungen des bekannten Satzes von Kuratowski (siehe [7]!) dar, gemäß dem $\mathfrak{P}(M)$ eine $|M|$-universal geordnete Menge ist.

Übrigens ist der Fall $\aleph_\alpha$ vieler Klassen der interessanteste, weshalb wir auch unsere Untersuchungen auf diesen Fall beschränken. (Vgl. auch [5], Satz 4.7!). Der Satz I liefert als Anwendung:

Ist $|M| = \mathfrak{k}_\alpha$ und in $\mathfrak{P}(M)$ eine Zermelosche Auswahlfunktion f vorgegeben, so gibt es ein Element $e \in M$, so daß es zu jedem $\tau < \omega_{\alpha+1}$ eine Kette *von $\mathfrak{P}(M)$ vom Typ τ (bzw. τ^*) gibt, über der f den konstanten Wert e annimmt.*

Zum Beweise unserer Sätze werden wir einiges aus der Theorie der dyadischen Folgen brauchen und stellen dies hier kurz zusammen. (Vgl. hierzu etwa [6], [10], [2], [3], [4]!)

Definition 1. Ist ω_α irgendeine Anfangszahl, so setzen wir gemäß [10] fest: Es sei $2((\omega_\alpha))$ die Menge aller (transfiniten) Folgen von Ziffern $0, 1$ der Länge ω_α. Sie werde nach ersten Differenzen geordnet.

Es sei R_α (in [10] wird die Bezeichnung H_α verwendet) die Teilmenge aller Folgen $\epsilon\, 2((\omega_\alpha))$, in denen es je eine letzte Ziffer 1 gibt.

Schließlich sei C_α die Menge aller Elemente $\epsilon\, 2((\omega_\alpha))$, die keine letzte Ziffer 0 haben und $\neq (0, 0, 0, \dots)$ und $\neq (1, 1, 1, \dots)$ sind.

Die Mengen R_α bzw. C_α verallgemeinern ordnungstheoretisch die Menge der rationalen bzw. die der reellen Zahlen auf höhere Mächtigkeiten. Es ist $R_\alpha \subset C_\alpha$; R_α liegt dicht in C_α; C_α ist stetig geordnet, also ohne Sprünge und ohne Lücken. R_α ist eine η_γ-Menge, wo $\gamma = \mathrm{cf}(\omega_\alpha)$, also ω_γ die kleinste zu ω_α konfinale Zahl ist (siehe etwa [3], Satz 16!). Für reguläres ω_α ist also R_α eine η_α-Menge ([10], Théorème III). Die η_α-Mengen werden eingehender beschrieben in [6]. Es ist $|R_\alpha| = \mathfrak{k}_\alpha = \sum 2^{\aleph_\nu} |\, \nu < \alpha$, also ist bei Annahme der allgemeinen Kontinuumhypothese $|R_\alpha| = \aleph_\alpha$. Für uns wichtig ist

Satz II. *Ist $|M| = \mathfrak{k}_\alpha\, (= |R_\alpha|)$, so hat $\mathfrak{P}(M)$ eine Kette vom Ordnungstyp* $\mathrm{tp}(C_\alpha)$. (Vgl. hierzu [9]!)

Denn $\mathfrak{P}(R_\alpha)$ enthält alle Anfangsstücke des lexikographisch geordneten R_α, deren Menge bezüglich der Inklusionsordnung den Typ $\mathrm{tp}(C_\alpha)$ hat.

Der in Satz II angegebene Sachverhalt macht deutlich, daß unsere Frage dadurch behandelt werden kann, daß wir im Folgenden Aufteilungen der Menge C_α (an Stelle von $\mathfrak{P}(M)$) auf $\aleph_\alpha$ viele Klassen studieren.

Allgemein sei noch im Zusammenhang mit Potenzmengen und ihren Ketten auf die beiden Arbeiten [7], [8] hingewiesen. Ausführliche Erörterungen zur kombinatorischen Mengenlehre finden sich in der Arbeit [1].

§ 2. Hilfssätze über Dualzerlegungen. Von jetzt ab benutzen wir fortwährend den Begriff *Dualzerlegung einer totalgeordneten Menge*. Dazu werden wir den Inhalt von [2], S. 81 bis S. 83 voraussetzen. Es empfiehlt sich, die Definition der Dualzerlegung von [2], S. 82 noch ein wenig zu spezialisieren, indem man fordert, daß auch die leere Menge jeder Dualzerlegung angehört. Dann gilt übrigens, was wir im folgenden jedoch nicht brauchen werden:

Jede Dualzerlegung $Z(M)$ einer totalgeordneten Menge M hat die Eigenschaft E, daß je zwei Mengen $\epsilon\, Z(M)$ disjunkt oder vergleichbar (bezüglich der Inklusion $\subset$) sind. Darüber hinaus ist $Z(M)$ eine maximale Teilmenge der Potenzmenge $\mathfrak{P}(M)$ mit der Eigenschaft E.

Wie in [2] benutzen wir für Dualzerlegungen einer totalgeordneten Menge M das Zeichen $Z(M)$, für die *zugehörige Dualfolgenmenge* das Zeichen $DZ(M)$; die *Wechselzahl einer Dualfolge* f wird wieder mit $w(f)$ bezeichnet. Dieser Begriff ist im folgenden sehr wichtig, weil er den nachstehenden grundlegenden Hilfssatz ermöglicht (vgl. hierzu etwa [2], Hilfssatz 3!):

Lemma 1. *Es sei M totalgeordnet, $Z(M)$ eine Dualzerlegung von M. Wenn es ein $f \epsilon DZ(M)$ gibt mit $w(f) \geqslant \lambda$, wo λ eine Limeszahl ist, so hat M eine Teilmenge des Typus $\lambda + \lambda^*$ ($\lambda^* =$ Inverse von λ).*

Ergänzend setzen wir fest:

Definition 2. Ist $Z(M)$ eine Dualzerlegung einer totalgeordneten Menge M, m ein Element $\epsilon\, M$, so definieren wir *die zu m gehörige Dualfolge* $f(m)$ als diejenige Folge $[\alpha_0, \alpha_1, \dots] \epsilon DZ(M)$, für die $m \epsilon S[\alpha_0] \cap S[\alpha_0, \alpha_1] \cap S[\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2] \cap \dots$ gilt.

Ein Folge $f \epsilon DZ(M)$ heiße eine *Element-Dualfolge*, wenn sie $= f(m)$ ist für ein $m \epsilon M$.

Das nachstehende Lemma ergibt sich ganz leicht aus den Grundbegriffen:

Lemma 2. *M sei eine totalgeordnete Menge, $Z(M)$ eine Dualzerlegung von M und f^* aus ihrer Dualfolgenmenge $DZ(M)$. Dann gibt es zu jeder Ordinalzahl $\mu < w(f^*)$ ein Element $m \epsilon M$, für das $w(f(m)) \geqslant \mu$ ist. Ist $w(f^*)$ keine Limeszahl, so gibt es sogar ein $m \epsilon M$, für das $w(f(m)) \geqslant w(f^*)$ ist. Zusammen ergibt dies:*

$$\sup\{w(f) |\; f \epsilon DZ(M)\} = \sup\{w(f(m)) \big|\; m \epsilon M\}\,.$$

Lemma 3. *Es sei I eine totalgeordnete Menge, und es seien M_ι, $\iota \epsilon I$, disjunkte totalgeordnete Mengen. Weiter sei λ eine additiv unzerlegbare Ordinalzahl. Es gebe Dualzerlegungen $Z(I)$ und $Z(M_\iota)$ für alle $\iota \epsilon I$, so daß $w(f) < \lambda$ ist für alle $f \epsilon DZ(I)$ und für alle $f \epsilon \bigcup DZ(M_\iota) |\, \iota \epsilon I$. Ist dann S die geordnete Summe der geordneten Mengen M_ι über das geordnete Argument I, so gibt es eine Dualzerlegung $Z(S)$ von S, so daß $w(f) < \lambda$ ist für alle $f \epsilon DZ(S)$.*

Speziell gilt dieser Satz also für den Fall, wo λ eine Anfangszahl ω_α ist.

Beweis. Das Lemma 3 ist leicht einzusehen, indem man von $Z(I)$ ausgeht und die $Z(M_\iota)$ gleichsam „hinter" $Z(I)$ anhängt. Die erhaltene Dualzerlegung $Z(S)$ erfüllt dann die Aussage, da ja λ additiv unzerlegbar ist.

Das nachstehende Lemma 3′ wird im folgenden nicht gebraucht, es sei aber erwähnt. Sein Beweis geht ähnlich dem von Lemma 3:

Lemma 3'. *Ändert man die Voraussetzungen von Lemma 3 so, daß man fordert: $w(f) < \lambda$ für alle Element-Dualfolgen $f \in \bigcup_{i \in I} DZ(M_i)$, so gibt es eine Dualzerlegung $Z(S)$ von S, so daß $w(f) < \lambda$ ist für alle Element-Dualfolgen $f \in DZ(S)$. Und wegen Lemma 1 ist dann $w(f) \leqslant \lambda$ für alle $f \in DZ(S)$.*

Definition 3. Es sei M eine totalgeordnete Menge, T eine nichtleere Teilmenge von M mit der aus M induzierten Ordnung. Man habe eine Dualzerlegung $Z(M)$ von M. Dann definieren wir *die durch $Z(M)$ induzierte Dualzerlegung* $Z(T)$ von $T \subset M$ wie folgt:

$$Z(T) = \{S \cap T \mid S \in Z(M)\}.$$

Man verifiziert leicht, daß dieses $Z(T)$ in der Tat die drei Bedingungen für eine Dualzerlegung von M erfüllt. Aus der Konstruktion folgen dabei ziemlich unmittelbar die beiden nächsten Hilfssätze:

Lemma 4. *Ist $f_T \in DZ(T)$, so gibt es eine Dualfolge $f_M \in DZ(M)$, die $w(f_M) \geqslant w(f_T)$ erfüllt.*

Lemma 4'. *Ist $x \in T$, $f_T(x)$ die zu x gehörige Element-Dualfolge $\in DZ(T)$, und ist $f_M(x)$ die zu x gehörige Element-Dualfolge $\in DZ(M)$, so ist $w(f_T(x)) \leqslant w(f_M(x))$.*

Das nächste Lemma enthält eine wesentliche Idee für die Beweise der späteren Sätze.

Lemma 5. *Es sei ω_ϱ eine Anfangszahl und $M = \bigcup M_\nu \mid \nu < \omega_\varrho$ eine totalgeordnete Menge. Man habe für jedes M_ν (mit der von $M \supset M_\nu$ induzierten Ordnung) eine Dualzerlegung $Z(M_\nu)$, so daß für jede Dualfolge $f \in DZ(M_\nu)$ gilt $w(f) \leqslant \omega_\varrho$. (Dies ist übrigens wegen Lemma 2 schon dann erfüllt, wenn $w(f) \leqslant \omega_\varrho$ nur für die Element-Dualfolgen f aus $DZ(M_\nu)$ gefordert wird.) Dann gibt es eine Dualzerlegung $Z(M)$ von M, so daß $w(f) \leqslant \omega_\varrho \cdot \omega_\varrho$ ist für jedes $f \in DZ(M)$. (Man kann übrigens $Z(M)$ sogar so konstruieren, daß $w(f) \leqslant \omega_\varrho$ für jedes $f \in DZ(M)$ gilt.)*

Beweis. Man konstruiert das gesuchte $Z(M)$, indem man — ungenau gesprochen — erst der gegebenen Dualzerlegung $Z(M_0)$ folgt. Dann nimmt man die noch verbliebenen mehr als einelementigen Stücke und spaltet sie anhand von $Z(M_1)$ weiter auf usw. Exakt geht man so vor:

Teil I. Es seien $S[0], S[1], \ldots, S[\alpha_0, \alpha_1, \ldots], \ldots$ die Elemente von $Z(M_0)$. Dann bilde man die gesuchte Dualzerlegung $Z(M)$ von M so: Es sei M in zwei disjunkte Segmente $S'[0]$, $S'[1]$ aufgeteilt: $M = S'[0] \cup S'[1]$, wobei $S'[0] \supset S[0]$ und $S'[1] \supset S[1]$ gilt. (Daraus folgt auch $S'[0] < S'[1]$, d.h. jedes Element von $S'[0]$ ist in M kleiner als jedes Element von $S'[1]$). Analog wird $S'[0]$ (und $S'[1]$) aufgeteilt: Hat $S[0] \subset S'[0]$ mindestens zwei Elemente, so existieren in $Z(M_0)$ die Segmente $S[0,0]$ und $S[0,1]$, und man zerlege $S'[0]$ so in zwei disjunkte Segmente $S'[0,0] < S'[0,1]$, daß $S'[0,0] \supset S[0,0]$ und $S'[0,1] \supset S[0,1]$ ist. Entsprechend spalte man dann weiter die Segmente $S'[0,0]$, $S'[0,1]$, $S'[1,0]$, $S'[1,1]$, vorausgesetzt, daß das betreffende Segment mindestens zwei Elemente enthält. Man erhält so mittels transfiniter Induktion (über die Länge der Folgen) zu jeder Dualfolge $[\alpha_0, \alpha_1, \ldots] \in DZ(M_0)$ ein Segment $S'[\alpha_0, \alpha_1, \ldots]$, welches das zur selben Folge gehörige Segment $S[\alpha_0, \alpha_1, \ldots] \in Z(M_0)$ umfaßt.

Die Menge $\mathfrak{S}_0$ aller so erhaltenen Segmente $S'[\alpha_0, \alpha_1, \ldots]$ läßt sich zu der gewünschten Dualzerlegung $Z(M)$ ausgestalten durch Hinzunahme weiterer Segmente. Dazu kommt jetzt $Z(M_1)$ in Betracht.

Teil II. Es sei $S^* = S'[\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\varkappa, \ldots \mid \varkappa < \lambda]$ ein Segment $\in \mathfrak{S}_0$, und zwar ein solches, zu dem es in $\mathfrak{S}_0$ kein echt kleineres $\neq \emptyset$ mehr gibt. Dann muß wegen der Konstruktion das Segment $S[\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\varkappa, \ldots \mid \varkappa < \lambda]$ $(\in Z(M_0))$ leer sein oder genau ein Element enthalten. Wenn nun S^* weniger als zwei Elemente enthält, kann es nicht weiter unterteilt werden; ist aber $|S^*| \geqslant 2$, so sind nach dem vorher gesagten zwei Fälle möglich. In S^* liegt nämlich genau ein Element von M_0 oder gar keins. Im ersten dieser Fälle "isolieren" wir zunächst dieses eine Element $m_0 \in M_0$:

Ist m_0 erstes Element von S^*, so sei S^* zerlegt in

$$S'[\alpha_0, \ldots, \alpha_\varkappa, \ldots \mid \varkappa < \lambda;\ \alpha_\lambda = 0] = \{m_0\}$$

und

$$S'[\alpha_0, \ldots, \alpha_\varkappa, \ldots \mid \varkappa < \lambda;\ \alpha_\lambda = 1] = \{x \in S^* \mid x > m_0\}.$$

Ist m_0 letztes Element von S^*, so sei gesetzt

$$S'[\alpha_0, \ldots, \alpha_\varkappa, \ldots \mid \varkappa < \lambda;\ \alpha_\lambda = 0] = \{x \in S^* \mid x < m_0\};$$
$$S'[\alpha_0, \ldots, \alpha_\varkappa, \ldots \mid \varkappa < \lambda;\ \alpha_\lambda = 1] = \{x_0\}.$$

Ist schließlich m_0 weder erstes noch letztes Element von S^*, so sei gesetzt:

$$S'[\alpha_0, \ldots, \alpha_\varkappa, \ldots \mid \varkappa < \lambda;\ \alpha_\lambda = 0] = \{x \in S^* \mid x \leqslant m_0\};$$
$$S'[\alpha_0, \ldots, \alpha_\varkappa, \ldots \mid \varkappa < \lambda;\ \alpha_\lambda = 1] = \{x \in S^* \mid x > m_0\}$$

und weiter

$$S'[\alpha_0, \ldots, \alpha_\varkappa, \ldots \mid \varkappa < \lambda;\ \alpha_\lambda = 0;\ \alpha_{\lambda+1} = 0] = \{x \in S^* \mid x < m_0\}$$

sowie

$$S'[\alpha_0, \ldots, \alpha_\varkappa, \ldots \mid \varkappa < \lambda;\ \alpha_\lambda = 0;\ \alpha_{\lambda+1} = 1] = \{m_0\}.$$

So verfahren wir also mit allen den Segmenten S^*, in denen genau ein Element von M_0 liegt. Die dabei zusätzlich zu $\mathfrak{S}_0$ definierten Segmente $S'[\alpha_0, \ldots]$ fügen wir der Menge $\mathfrak{S}_0$ hinzu und erhalten eine Menge $\mathfrak{S}_0' \supset \mathfrak{S}_0$.

Teil III. Es sei nun S^{**} ein Segment $\in \mathfrak{S}_0'$, zu dem es in $\mathfrak{S}_0'$ kein echt kleineres $\neq \emptyset$ mehr gibt. Dann ist nach Konstruktion S^{**} fremd zu M_0. Wir nehmen an, daß $S^{**} \cap M_1 \neq \emptyset$ ist, der andere Fall erledigt sich nachher von selbst. Man betrachte dann die (gemäß Def. 3) durch

$Z(M_1)$ induzierte Dualzerlegung Z^{**} von $S^{**} \cap M_1$. Man definiere dann anhand von Z^{**} gewisse Teilsegmente von S^{**}, — genau analog Teil I, wo man anhand von $Z(M_0)$ die Mengen $\mathfrak{S}_0$ und $\mathfrak{S}_0'$ konstruierte.

Fazit: Was vorhin in Teil I, II, und III durchgeführt wurde, läßt sich mittels transfiniter Induktion (nicht nur für $\nu = 0, 1$, sondern) für alle $\nu < \omega_\varrho$ durchführen. Man überlegt sich, daß man so über ω_ϱ viele Mengen $\mathfrak{S}_0 \subset \mathfrak{S}_0' \subset \mathfrak{S}_1 \subset \mathfrak{S}_1' \subset \ldots \subset \mathfrak{S}_\nu \subset \mathfrak{S}_\nu' \subset \ldots |\ \nu < \omega_\varrho$ mit deren Vereinigung $\bigcup \mathfrak{S}_\nu' |\ \nu < \omega_\varrho$ plus der leeren Menge $\emptyset$ eine Menge von Segmenten von M erhält, die eine Dualzerlegung $Z(M)$ von M darstellt. Da sich die Wechselzahl $w(f)$ eines $f \in DZ(M)$ dann additiv zusammensetzt aus einer Summe von höchstens ω_ϱ vielen Wechselzahlen, die zu Folgen $\in DZ(M_\nu)$ gehören, ist $w(f) \leqslant$ einer (geordneten) Summe $\sum (\lambda_\nu + 2) |\ \nu < \omega_\varrho$, wo die λ_ν Wechselzahlen von Folgen $\in DZ(M_\nu)$ sind, und damit ist jedes $\lambda_\nu \leqslant \omega_\varrho$. (Der Summand 2 ist aus Teil II hergenommen!) Also ist in der Tat, da die 2 sozusagen „absorbiert" wird, $w(f) \leqslant \omega_\varrho \cdot \omega_\varrho$ für jedes f des angegebenen $DZ(M)$.

Lemma 6. *Es sei M eine totalgeordnete Menge, die keine Teilmengen der Typen $\omega_{\alpha+1}$, $\omega_{\alpha+1}^*$ umfaßt. Weiter sei ω_γ die kleinste zu ω_α konfinale Zahl, also $\gamma = cf(\omega_\alpha)$. Es gebe eine Dualzerlegung $Z(M)$ von M, so daß $w(f) < \omega_\gamma$ ist für jedes $f \in DZ(M)$. Dann ist M in R_α einbettbar.*

Beweis. $D = DZ(M)$ erfüllt die Voraussetzungen von [4], Satz 2', ist also demzufolge in R_α einbettbar. Dann gilt dies auch für M, das ja ähnlich ist zur Menge aller Element-Dualfogen $\{f(m) |\ m \in M\} \subset D$. Das Lemma 6 verallgemeinern wir zu:

Lemma 7. *Die Aussage von Lemma 6 folgt schon unter der schwächeren Voraussetzung, daß $w(f) < \omega_\gamma$ nur für die Element-Dualfolgen $f \in DZ(M)$ gefordert wird.*

Beweis. Für $\nu < \omega_\gamma$ sei $M_\nu = \{m |\ m \in M \wedge w(f(m)) \leqslant \nu\}$ ($f(m)$ sei die dem m gemäß Def. 2 zugeordnete Element-Dualfolge $\in DZ(M)$). Ist nun $Z(M_\nu)$ die nach Def. 3 durch $Z(M)$ in M_ν induzierte Dualzerlegung, so gilt für jedes $x \in M$, wenn man die Bezeichnungen von Lemma 4' anwendet und hierin $T = M_\nu$ setzt: $w(f_T(x)) \leqslant w(f_M(x))$; das letztere ist $\leqslant \nu$ wegen $x \in M_\nu$. Mithin ist nach Lemma 2 $w(f) \leqslant \nu < \omega_\gamma$ für jedes $f \in DZ(M_\nu)$.

Mit Lemma 6 folgt also: M_ν ist in R_α einbettbar für jedes $\nu < \omega_\gamma$. Nach [3], Satz 17 ist dann auch $M = \bigcup M_\nu |\ \nu < \omega_\gamma$ in R_α einbettbar.

Lemma 8. *Es sei ω_α regulär und eine Dualzerlegung $Z(R_\alpha)$ von R_α vorgegeben. Dann existiert ein $f \in DZ(R_\alpha)$ mit $w(f) \geqslant \omega_\alpha$.* (Vgl. auch [2], Sätze 1 bis 3!) (Es braucht jedoch keine Element-Dualfolge f zu geben, die diese Bedingung erfüllt!).

Beweis. Wir nehmen an, es gäbe doch eine Dualzerlegung $Z(R_\alpha)$ von R_α mit $w(f) < \omega_\alpha$ für alle $f \in DZ(R_\alpha)$.

Man stelle dann die in der Einleitung definierte Menge C_α dar als $C_\alpha = R_\alpha \cup (C_\alpha - R_\alpha)$. In einer gewissen Analogie zum Beweise (Teil I) von Lemma 5 kann man nun, da R_α in C_α dicht ist, anhand von $Z(R_\alpha)$ eine Dualzerlegung $Z'(C_\alpha)$ konstruieren, deren Dualfolgenmenge $DZ'(C_\alpha) = DZ(R_\alpha)$ ist.

Nun gilt aber, daß C_α keine Teilmengen der Typen $\omega_{\alpha+1}$, $\omega_{\alpha+1}^*$ hat (vgl. [10], Lemma II!). Weiter ist das ω_γ von Lemma 6 für reguläres ω_α gleich ω_α, und nach Lemma 6 (mit $M = C_\alpha$) wäre dann C_α in R_α einbettbar. Dies widerspricht aber dem Satz von Dilworth und Gleason (vgl. [11] oder [3], Satz 11!), womit Lemma 8 bewiesen ist.

Die nachstehende Verallgemeinerung von Lemma 8 wird im folgenden nicht mehr benutzt, sie möge aber ohne Beweis angegeben werden ein solcher läßt sich unter Benutzung von Lemma 8 ohne große Schwierigkeit erbringen).

Lemma 8'. *In der Aussage von Lemma 8 kann die Forderung der Regularität von ω_α fallengelassen werden.*

Etwas allgemeiner als Lemma 8 ist das folgende

Lemma 9. *Es sei ω_α regulär, M eine totalgeordnete Menge, die eine zu R_α ähnliche Teilmenge T habe. Dann gibt es zu jeder Dualzerlegung $Z(M)$ von M eine Folge $f \in DZ(M)$ mit $w(f) \geqslant \omega_\alpha$.*

Aus dem allgemeineren Lemma 8' folgt entsprechend ein allgemeineres Lemma 9', das die Regularität von ω_α verzichtet.

Beweis. Vermöge Def. 3 bestimmt $Z(M)$ in T eine induzierte Dualzerlegung $Z(T)$. Zu dieser gibt es wegen Lemma 8 eine Folge $f \in DZ(T)$ mit $w(f) \geqslant \omega_\alpha$, und eine solche gibt es wegen Lemma 3 dann erst recht in $DZ(M)$.

§ 3. Hauptteil.

Wir können nun darangehen, den folgenden entscheidenden Satz zu beweisen:

Satz 1. *Es sei $C_\alpha = \bigcup T_\nu |\ \nu < \omega_\alpha$. Dann gibt es ein T_ν, so daß es zu jeder Dualzerlegung $Z(T_\nu)$ ein $f \in DZ(T_\nu)$ — sogar eine Element-Dualfolge $f \in DZ(T_\nu)$ — gibt mit $w(f) \geqslant \omega_\alpha$.*

Beweis. Wir nehmen das Gegenteil an: Es gebe zu jedem T_ν, $\nu < \omega_\alpha$, eine Dualzerlegung $Z(T_\nu)$, so daß $w(f(m)) < \omega_\alpha$ wäre für alle Element-Dualfolgen $f(m) \in DZ(T_\nu)$ (also für alle $m \in T_\nu$).

Zunächst betrachten wir den Fall, wo ω_α regulär ist. Dann folgt aus Lemma 7, da hierin nun $\omega_\alpha = \omega_\gamma$ ist, und da C_α, und dann auch jedes T_ν, keine Teilmengen der Typen $\omega_{\alpha+1}$, $\omega_{\alpha+1}^*$ hat: T_ν ist in R_α einbettbar für jedes $\nu < \omega_\alpha$. Dann wäre (etwa nach [3], Satz 17) auch $\bigcup T_\nu |\ \nu < \omega_\alpha$, also C_α, in R_α einbettbar mit Widerspruch zu dem Satze von Dilworth und Gleason.

Im folgenden sei nun ω_α als singulär vorausgesetzt. Dann ist ω_α darstellbar in der Form

$$\omega_\alpha = \sum \omega_{\alpha_\iota} | \ \iota < \omega_\gamma ,$$

wo ω_γ die kleinste zu ω_α konfinale Zahl ist $(\gamma = \mathrm{cf}(\omega_\alpha))$, und wo die ω_{α_ι} Anfangszahlen sind mit $\omega_{\alpha_\iota} < \omega_\alpha$ für alle $\iota < \omega_\gamma$.

Wir zerlegen nun die Mengen T_ν in geeigneter Weise und setzen sie anders wieder zusammen. Für $\nu < \omega_\alpha$ und $\iota < \omega_\gamma$ definieren wir:

$$T_\nu[\omega_{\alpha_\iota}] = \{t | \ t \in T_\nu \wedge w(f(t)) < \omega_{\alpha_\iota}\} ,$$

wo $w(f(t))$ die Wechselzahl der dem t zugeordneten Element-Dualfolge $f(t) \in DZ(T_\nu)$ ist. Es folgt:

(I) *Es sei* $Z(T_\nu[\omega_{\alpha_\iota}])$ *die durch* $Z(T_\nu)$ *in* $T_\nu[\omega_{\alpha_\iota}] \subset T_\nu$ *gemäß Def.* 3 *induzierte Dualzerlegung. Dann gilt für alle Elemente* $x \in T_\nu[\omega_{\alpha_\iota}]$ *und ihre zugehörige Element-Dualfolge* $f(x) \in DZ(T_\nu[\omega_{\alpha_\iota}])$:

$$w(f(x)) < \omega_{\alpha_\iota} .$$

Dies folgt sofort aus der Definition von $T_\nu[\omega_{\alpha_\iota}]$ und Lemma 4'. Wegen Lemma 2 kann man aus (I) sofort folgern:

(II) *Für jedes* $\nu < \omega_\alpha$ *und jedes* $\iota < \omega_\gamma$ *gilt:*

$$w(f) \leqslant \omega_{\alpha_\iota} \quad \text{für alle } f \in DZ(T_\nu[\omega_{\alpha_\iota}]) .$$

Für jedes $\iota < \omega_\gamma$ setzen wir nun

$$S_\iota = \bigcup T_\nu[\omega_{\alpha_\iota}] | \ \nu \leqslant \omega_{\alpha_\iota} . \tag{1}$$

Nach der indirekten Annahme $(w(f(m)) < \omega_\alpha$ für alle $m \in T_\nu)$ ist dann unmittelbar ersichtlich, daß gilt:

(III) $\quad \bigcup \{S_\iota | \ \iota < \omega_\gamma\} = \bigcup T_\nu | \ \nu < \omega_\alpha (= C_\alpha)$.

Weiter erhalten wir

(IV) *Für jedes* $\iota < \omega_\gamma$ *gibt es eine Dualzerlegung* $Z(S_\iota)$ *von* S_ι, *so daß für jedes* $f \in DZ(S_\iota)$ *gilt:* $w(f)$ $(\leqslant \omega_{\alpha_\iota} \cdot \omega_{\alpha_\iota}) < \omega_{\alpha_\iota+1}$.

Denn dies folgt sofort aus (II), (1) und Lemma 5, in dem man nur $\varrho = \alpha_\iota$ zu setzen braucht.

Nun ergibt sich die entscheidende Beziehung, die einen Widerspruch zu (III) darstellt und damit den Satz beweist:

(V) $\quad \bigcup S_\iota | \ \iota < \omega_\gamma$ *ist echte Teilmenge von* C_α.

Bevor wir (V) nachweisen, zeigen wir

(VI) *Jedes* S_ι, $\iota < \omega_\gamma$, *liegt in keinem Intervall von* C_α *dicht.*

Denn ein in einem Intervall von C_α dicht liegendes S_ι würde eine Teilmenge vom Ordnungstyp $\mathrm{tp}(R_\alpha)$ umfassen (etwa wegen [3], Satz 15), a fortiori also eine Teilmenge des Typs $\mathrm{tp}(R_{\alpha_\iota+1})$, denn es ist $\alpha_\iota < \alpha$.

Da $\omega_{\alpha_\iota+1}$ regulär ist, würde es wegen Lemma 9 zu dem $Z(S_\iota)$ von (IV) doch eine Dualfolge f geben mit $w(f) \geqslant \omega_{\alpha_\iota+1}$ mit Widerspruch. Damit ist (VI) bewiesen; (V) folgt hieraus so:

Es gibt wegen (VI) ein abgeschlossenes Intervall $I_0 = [a_0, b_0]$ von C_α mit $a_0 < b_0$, das fremd ist zu S_0. In I_0 gibt es ein abgeschlossenes Teil-Intervall $I_1 = [a_1, b_1]$ mit $a_0 < a_1 < b_1 < b_0$, das fremd ist zu S_1, denn S_1 ist nicht dicht in I_0. Routinemäßig setzt man nun die Konstruktion der I_ι über ω_γ viele Schritte fort: Jeder Durchschnitt $\bigcap [a_\iota, b_\iota] | \ \iota < \lambda$, wo $\lambda < \omega_\gamma$ ist, ist ein mehr als ein Element enthaltendes Segment von C_α, da das in C_α dichte R_α eine η_γ-Menge ist (siehe etwa [3], Satz 16!). Also ist die Konstruktion tatsächlich über ω_γ viele Schritte durchführbar, und wir erhalten eine Folge $I_0 \supset I_1 \supset \ldots \supset I_\iota \ldots | \ \iota < \omega_\gamma$ von abgeschlossenen Intervallen von C_α, deren Durchschnitt nicht leer ist, da C_α stetig geordnet ist, der aber zu jedem S_ι, $\iota < \omega_\gamma$, also auch zu $\bigcup S_\iota | \ \iota < \omega_\gamma$ fremd ist. Das widerspricht (III), und damit ist Satz 1 bewiesen.

Den Satz 1 wollen wir weiter verschärfen. Dazu definieren wir:

DEFINITION 4. Eine totalgeordnete Menge M hat die Eigenschaft E_α, wenn gilt: Zu jeder Dualzerlegung $Z(M)$ von M gibt es eine Folge $f \in DZ(M)$ mit $w(f) \geqslant \omega_\alpha$. Die Eigenschaft non E_α sei mit $\neg E_\alpha$ bezeichnet. Es gilt dann folgender

SATZ 2. *M sei totalgeordnet und habe die Eigenschaft E_α. Dann gibt es eine mehr als ein Element enthaltende Teilmenge $T \subset M$, so daß für je zwei $a < b$ aus T gilt: Das abgeschlossene Intervall $[a, b]$ von T hat die Eigenschaft E_α.*

Daraus wird speziell folgen: T ist $\aleph_\alpha$-dicht, d.h. jedes Intervall $[a, b]$ mit $a < b$ von T hat eine Mächtigkeit $\geqslant \aleph_\alpha$.

Beweis. Wir führen in M eine Äquivalenzrelation $\sim$ ein: Für $a, b \in M$ setzen wir $a \sim b$ genau dann, wenn gilt: Für $a \leqslant b$ hat das Intervall $[a, b]$ die Eigenschaft $\neg E_\alpha$, und für $b \leqslant a$ hat das Intervall $[b, a]$ die Eigenschaft $\neg E_\alpha$. Daß diese Relation $\sim$ reflexiv und symmetrisch ist, ist trivial. Die Transitivität von $\sim$ folgt mit Lemma 3: Ist nämlich $a \leqslant b \leqslant c$, $a \sim b$ und $b \sim a$ (die anderen Fälle sind wegen der Symmetrie von $\sim$ leicht auf diesen Fall zurückführbar), so hat, da die geordneten Mengen $I = \{1, 2\}$, $M_1 = [a, b]$, $M_2 = [b, c]$ jeweils die Eigenschaft $\neg E_\alpha$ haben, auch $[a, c] = \sum M_i | \ i \in I$ die Eigenschaft $\neg E_\alpha$.

Ist $a < x < b$ und $a \sim b$, so ist a fortiori $a \sim x \sim b$, wir haben also

(VII) *Die Äquivalenzklassen von $\sim$ sind nichtleere Segmente von M.*

Und weiter gilt

(VIII) *Jede Klasse K der Äquivalenzrelation $\sim$ hat die Eigenschaft* $\neg E_\alpha$.

Beweis. Ist $|K| = 2$, so ist alles klar. Ist $|K| > 2$, so wähle man ein Element $e \in K$, das weder kleinstes noch größtes Element von K ist.

Wenn wir zeigen, daß $K_1 = \{x|\ x \in K \wedge x < e\}$ sowie $K_2 = \{x|\ x \in K \wedge x \geqslant e\}$ jeweils die Eigenschaft $\neg E_a$ haben, so ist (VIII) bewiesen, und zwar wieder wegen Lemma 3 (hierin nehme man $I = \{1, 2\}$, $M_i = K_i$ für $i \in I$). Aus Symmetriegründen langt es, zu beweisen:

(IX) $K_2 = \{x|\ x \in K \wedge x \geqslant e\}$ *hat die Eigenschaft* $\neg E_a$.

Hat K (und mit ihm K_2) ein größtes Element g, so ist wegen $e \sim g$ (VIII) trivialerweise erfüllt. Man nehme also an, K habe kein größtes Element. Dann ist K_2 konfinal mit einer regulären Anfangszahl ω_ϱ. Sei etwa $e = c_0 < c_1 < \ldots < c_\nu < \ldots |\ \nu < \omega_\varrho$ eine konfinale Teilmenge von K_2. Dann ist K_2 darstellbar als die geordnete Summe $\sum M_\nu|\ \nu < \omega_\varrho$ der geordneten Mengen $M_\nu = [c_\nu, c_{\nu+1})$ über das geordnete Argument $\{\nu|\ \nu < \omega_\varrho\}$. Da dieses (wie jede wohlgeordnete Menge!) offenbar die Eigenschaft $\neg E_a$ hat, und da alle M_ν, $\nu < \omega_\varrho$, wegen $c_\nu \sim c_{\nu+1}$ auch die Eigenschaft $\neg E_a$ haben, hat K_2 dieselbe wegen Lemma 3 ebenfalls; also gilt (IX) und damit auch (VIII).

Es sei nun $\mathfrak{K}$ die in natürlicher Weise totalgeordnete Menge aller Äquivalenzklassen K von M. (Es ist also $K_1 < K_2$ für $K_1, K_2 \in \mathfrak{K} \Longleftrightarrow k_1 < k_2$ in M für alle $k_1 \in K_1$, $k_2 \in K_2$). Dann ergibt sich:

(X) *Jedes Intervall* $\mathfrak{J} = [K_1, K_2]$ (*mit* $K_1 < K_2$) *der geordneten Menge* $\mathfrak{K}$ *hat die Eigenschaft* E_a.

Hätte nämlich $\mathfrak{J}$ die Eigenschaft $\neg E_a$, so hätte wegen (VIII) und Lemma 3 die geordnete Summe $\sum K_I$, $I \in \mathfrak{J}$ die Eigenschaft $\neg E_a$. Dann würde für je zwei Elemente $e_1 \in K_1$, $e_2 \in K_2$ gelten $e_1 \sim e_2$ mit Widerspruch dazu, daß $K_1 \neq K_2$ ist. Also gilt (X).

Wählt man nun aus jeder Klasse $K \in \mathfrak{K}$ genau ein Element, so erhält man eine zu $\mathfrak{K}$ ähnliche Teilmenge $T \subset M$, die wegen (X) der Behauptung von Satz 2 genügt: Daß $|T| \geqslant 2$ ist, folgt so: Da M die Eigenschaft E_a, aber jedes $K \in \mathfrak{K}$ die Eigenschaft $\neg E_a$ hat, muß $|\mathfrak{K}|$ und mit ihm $|T| \geqslant 2$ sein. Daß T $\aleph_a$-dicht ist, ergibt sich so: Sind $a < b$ Elemente aus T, so ist das Intervall $[a, b]$ von T sicher unendlich. Wäre seine Mächtigkeit $< \aleph_a$, so wäre sie gleich einem $\aleph_\beta$ mit $\beta < a$. Dann wäre $[a, b]$ ähnlich einer Teilmenge von R_β. Zu R_β gibt es aber wegen $R_\beta \subset 2((\omega_\beta))$ eine Dualzerlegung $Z(R_\beta)$, so daß $w(f) \leqslant \omega_\beta$ für alle $f \in DZ(R_\beta)$. Also hat R_β wegen $\beta < a$ die Eigenschaft $\neg E_a$, $[a, b]$ hätte sie dann ebenfalls mit Widerspruch.

Man kann nun zeigen

Satz 3. *M sei totalgeordnet und habe die Eigenschaft E_a. Dann gilt für jede Ordinalzahl $\tau < \omega_{a+1}$: M hat eine Teilmenge vom Typ τ und eine Teilmenge vom dazu inversen Typ τ^*.*

Dies folgt aus der schärferen Aussage: Es gibt eine mindestens zweielementige Teilmenge $T \subset M$ mit der Eigenschaft: Jedes Intervall I mit $|I| \geqslant 2$ von T hat zu jedem $\tau < \omega_{a+1}$ eine Teilmenge vom Typ τ und eine vom Typ τ^*.

Beweis. Wir nehmen eine Teilmenge $T \subset M$, die der Aussage von Satz 2 genügt. Für diese zeigen wir:

(XI) *Jedes Intervall I mit $|I| \geqslant 2$ von T hat zu jedem $\tau < \omega_{a+1}$ eine Teilmenge des Typs τ.*

Da der Fall des Typs τ^* analog geht, langt es, (XI) zu beweisen. Hierzu definieren wir:

Ein Intervall einer totalgeordneten Menge heiße *nichttrivial*, wenn es mehr als ein Element enthält. Und wir sagen:

Eine Ordinalzahl τ *kommt vor* in einer totalgeordneten Menge S, wenn τ Ordnungstyp einer Teilmenge von S ist (wobei diese mit der induzierten Ordnung zu nehmen ist).

Die Menge A aller Ordinalzahlen, die in jedem nichttrivialen Intervall von T vorkommen, ist trivialerweise ein echtes Anfangsstück der Klasse aller Ordinalzahlen; es gibt also genau eine Ordinalzahl μ, so daß $A = \{\xi|\ \xi < \mu\}$.

Dann ist die Aussage (XI) äquivalent mit $\{\tau|\ \tau < \omega_{a+1}\} \subset A$, also mit

(XI') $\quad \omega_{a+1} \leqslant \mu$.

Wir nehmen indirekt an, es wäre $\mu < \omega_{a+1}$, und führen dies zum Widerspruch. Eine einfache Konfinalitäts-Betrachtung gibt: Als Zahl $< \omega_{a+1}$ hat μ eine Darstellung

$$\mu = \sum \mu_\nu|\ \nu < \omega_a \quad \text{mit} \quad \mu_\nu < \mu \text{ für } \nu < \omega_a .$$

Da $\mu \notin A$ gilt, gibt es mindestens ein nichttriviales Intervall von T, sagen wir $I' \subset T$, in dem μ nicht vorkommt. Dieses I' hat die Eigenschaft E_a (von Definition 4), denn T war so gewählt, daß es der Aussage von Satz 2 genügte. Wegen Lemma 1 hat also I' eine Teilmenge des Typs $\omega_a + \omega_a^*$, a fortiori eine des Typs ω_a; sei etwa

$$t_0 < t_1 < \ldots < t_\nu < \ldots |\ \nu < \omega_a \quad \text{mit} \quad t_\nu \in I' \text{ für } \nu < \omega_a .$$

Für jedes $\nu < \omega_a$ ist nun $\mu_\nu < \mu$, also $\mu_\nu \in A$. Hiermit kommt μ_ν vor im Intervall $[t_\nu, t_{\nu+1})$ von T, denn dieses Intervall ist nichttrivial, da ja T dicht ist nach Satz 2. Bildet man nun hierzu die geordnete Summe, so folgt: $\mu = \sum \mu_\nu|\ \nu < \omega_a$ kommt vor in $\bigcup [t_\nu, t_{\nu+1})|\ \nu < \omega_a$. Also käme μ auch in I' vor mit Widerspruch. Damit ist (XI'), also auch (XI) und Satz 3 bewiesen.

Satz 4. *Ist $C_a = \bigcup T_\nu|\ \nu < \omega_a$, so gibt es ein T_ν, das für jedes $\tau < \omega_{a+1}$ eine Teilmenge vom Typ $\tau + \tau^*$ hat.*

Beweis. Wegen Satz 1 hat ein T_ν die Eigenschaft E_a. Wegen der Sätze 2 und 3 gibt es dann ein $\aleph_a$-dichtes $T \subset T_\nu$, von dem jedes mindestens zweielementige Intervall wieder die Eigenschaft E_a hat, und für jedes $\tau < \omega_{a+1}$ hat dann jedes mindestens zweielementige Intervall von T eine Teilmenge des Typs $\tau + \tau^*$. Daraus folgt reichlich der Satz 4.

Nun ergibt sich auch endlich das in der Einleitung als Satz I angekündigte Hauptergebnis dieser Arbeit:

SATZ 5. *Es sei* $|M| = \mathfrak{k}_\alpha$, *und es sei die Potenzmenge* $\mathfrak{P}(M)$ *von* M *auf* $\aleph_\alpha$ *viele Klassen verteilt:* $\mathfrak{P}(M) = \bigcup T_\nu |\ \nu < \omega_\alpha$. *Dann gibt es ein* T_ν, *das zu jedem* $\tau < \omega_{\alpha+1}$ *eine Teilmenge vom Typ* $\tau + \tau^*$ *umfaßt.*

Insbesondere hat sich also ergeben: Es gibt ein T_ν, *das "Universalmenge" ist für alle wohlgeordneten und für alle inverswohlgeordneten Mengen der Mächtigkeit* $\aleph_\alpha$.

Beweis. Wegen des Satzes II der Einleitung hat $\mathfrak{P}(M)$ eine Teilmenge, die zu C_α ähnlich ist, und aus Satz 4 folgt dann sofort Satz 5.

Literaturverzeichnis

[1] P. Erdös and R. Rado, *A partition calculus in set theory*, Bull. Amer. Math. Soc. 62 (1956), S. 427-489.

[2] E. Harzheim, *Dualzerlegungen in totalgeordneten Mengen*, Fund. Math. 53 (1963), S. 81-91.

[3] — *Beiträge zur Theorie der Ordnungstypen, insbesondere der* η_α*-Mengen*, Math. Ann. 154 (1964), S. 116-134.

[4] — *Einbettungssätze für totalgeordnete Mengen*, Math. Ann. 158 (1965), S. 90-108.

[5] — *Kombinatorische Betrachtungen über die Struktur der Potenzmenge*, Math. Nachr. 34 (1967), S. 123-141.

[6] F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig 1914.

[7] C. Kuratowski, *Sur la notion de l'ordre dans la théorie des ensembles*, Fund. Math. 2 (1921), S. 161-171.

[8] G. Kurepa, *Partitive sets and ordered chains*, Rad Jugoslav. Akad. Znan. Umjet. Odjel. Mat. Fiz. Techn. Nauke 6 (302), (1957), S. 197-235.

[9] W. Sierpiński, *Sur un problème concernant les sous-ensembles croissants du continu*, Fund. Math. 3 (1922), S. 109-112.

[10] — *Sur une propriété des ensembles ordonnés*, Fund. Math. 36 (1949), S. 56-67.

[11] R. P. Dilworth and A. M. Gleason, *A generalized Cantor theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. 13 (1962), S. 704-705.

Reçu par la Rédaction le 24. 1. 1967

Wallman spaces and compactifications

by

E. F. Steiner (Albuquerque, N. Mex.)

It is possible to obtain a compactification for any T_1-space by employing a method introduced by Wallman [9]. Frink [3] has generalized this method to provide Hausdorff compactifications for Tychonoff spaces. His procedure uses a *normal base* of closed sets instead of the family of all closed sets as employed by Wallman. He shows that the Alexandroff and Stone–Čech compactifications can be obtained in this way.

In a recent paper, Njåstad [7] gives a condition for a Hausdorff compactification to be of the Wallman type as defined by Frink. This conditions is on the corresponding proximity. He shows that many compactifications satisfy this condition; among them those of Alexandroff, Stone–Čech, Freudenthal [2], Fan–Gottesman [1], and Gould [5].

In this paper we present a generalization of the Frink procedure which starts with a simple notion of a Wallman space. Necessary and sufficient conditions for a Wallman space to be a compactification are given. We will call these *Wallman compactifications*. Our compactifications are obtained by using *separating families* of closed sets as defined in [8]. This condition is considerably less restrictive than that of a normal base. In this way, compactifications for spaces other than Tychonoff spaces are obtained. Necessary and sufficient conditions for a given compactification to be a Wallman compactification are also given Hausdorff Wallman compactifications are then shown to be those of Frink.

In [7], Njåstad expresses the doubt that many common compactifications are Wallman compactifications, and in particular, the disk. We will show that the closed disk is a Wallman compactification of each of its dense subspaces. In fact, we show that any product of compact subsets of real numbers is a Wallman compactification of any of its dense subspaces. This is done by using the idea of a regular Wallman compactification.

By using different families of closed sets in a given topological space, many Wallman compactifications are obtained. We find necessary and sufficient conditions for two families to give the same compactification.