Proof. We have only to show the isometry. If $T \in A$ is represented by $F \in Y'^*$, then from (11) follows

(16) $$\Phi(T\varphi) = (F_\varphi * F)\Phi \equiv F(\Phi * \varphi), \quad F \in B^{**}, \ \Phi \in B^*, \ \varphi \in B;$$

hence

$$\|T\| = \sup_{\|\Phi\|=1, \|\varphi\|=1} |\Phi(T\varphi)| \leqslant \sup_{\|\Phi * \varphi\|=1} |F(\Phi * \varphi)| \leqslant \|F\|$$

since $\|\Phi * \varphi\| \leqslant \|\Phi\| \|\varphi\|$.

On the other hand, if $h \in Y$ and $\|h\| = 1$, then

(17) $$|h(Te_a)| \leqslant \|T\|$$

since $Y \subseteq B^*$. Moreover, from (16) it follows that $h(Te_a) = F(h * e_a)$; hence (17) implies

$$|F(h)| = \lim_a |F(h * e_a)| = \lim_a |h(Te_a)| \leqslant \|T\|, \quad h \in Y, \ \|h\| = 1;$$

thus $\|F\| \leqslant \|T\|$.

COROLLARY. *The following assertions are equivalent:*

(a) $A = B^{**}/Y^\perp$;

(b) $\pi[B]$ *is a right ideal in* $B^{**}/Y^\perp$;

(c) $\pi[B]$ *is a right ideal in* B^{**}.

References

[1] C. E. Rickart, *General theory of Banach algebras*, D. Van Nostrand C. Inc. 1960.

[2] P. Civin and B. Yood, *The second conjugate space of a Banach algebra as an algebra*, Pac. J. Math. 11 (1961), p. 847-870.

[3] R. E. Edwards, *Endomorphisms of function-spaces*, Pac. J. Math. 14 (1964), p. 31-48.

[4] — *Approximation by convolution*, Pac. J. Math. 15 (1965), p. 85-95.

[5] A. Figa-Talamanca, *Translation-invariant operators in L^p-spaces*, Duke Math. J. 32 (1965), p. 495-501.

[6] L. Hörmander, *Translation-invariant operators in L^p*, Acta Math. 104 (1960), p. 93-104.

[7] L. Máté, *Multiplier operators and quotient algebra*, Bull. Ac. Polonaise 13 (1965), p. 523-526.

[8] — *On the factor theory of commutative Banach algebras*, Magy. Tud. Akad. Mat. Kut. Int. Közl. 9 (1964), p. 359-364.

[9] — *Embedding multiplier operators of a Banach algebra B into its second conjugate space B^{**}*, Bull. Ac. Polonaise 13 (1965), p. 809-812.

[10] J. D. Stafney, *Arens multiplication and convolution*, Pac. J. Math. 14 (1964), p. 1423-1448.

POLYTECHNICAL UNIVERSITY OF BUDAPEST

Reçu par la Rédaction le 17. 12. 1965

STUDIA MATHEMATICA, T. XXVIII. (1967)

Conditions de non existence des solutions de l'équation différentielle des opérateurs de J. Mikusiński

par

B. STANKOVIĆ (Novi Sad)

Soit K le corps des opérateurs de J. Mikusiński [3]. Nous considérons l'équation différentielle

(1) $$x'(\lambda) + \frac{u(\lambda)}{v} x(\lambda) = 0$$

où $v(t)$ est une fonction continue sur $[0, \infty)$ et $u(\lambda) = \{u(\lambda, t)\}$, $u(\lambda, t)$ est une fonction continue sur le domaine D, $D\colon a \leqslant \lambda \leqslant \beta$, $0 \leqslant t < \infty$.

L'idée essentielle dans cet article est d'utiliser la théorie bien connue de l'intégrale de Laplace pour obtenir des conditions de non existence des solutions de l'équation citée. La même méthode peut être utilisée pour obtenir les théorèmes d'existence [4].

Remarquons que le problème d'existence des solutions de l'équation de la forme

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^{(i)}(\lambda) = 0,$$

où a_i sont des polynômes par rapport à l'opérateur différentiel s, a été résolu par J. Mikusiński [4].

J'ai aussi établi [5, 6] des résultats qui concernent les équations dont les coefficients sont des éléments de certains sous-ensembles de K.

Dans la suite on va utiliser les notations suivantes. Domaines:

$$D\colon a \leqslant \lambda \leqslant \beta, \ 0 \leqslant t < \infty; \qquad D_n\colon a \leqslant \lambda \leqslant \beta, \ 0 \leqslant t < n.$$

Fonctions:

$$f_n = \{f_n(t)\} = \begin{cases} f(t) & \text{pour} \quad 0 \leqslant t < n, \\ 0 & \text{pour} \quad t \geqslant n, \end{cases}$$

$$f_\infty = \{f_\infty(t)\} = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad 0 \leqslant t < n, \\ f(t) & \text{pour} \quad t \geqslant n, \end{cases}$$

$$u_n(\lambda)=\{u_n(\lambda,t)\}=\begin{cases}u(\lambda,t) & \text{pour} \quad (\lambda,t)\in D_n,\\ 0 & \text{pour} \quad (\lambda,t)\in D\setminus D_n,\end{cases}$$

$$u_\infty(\lambda)=\{u_\infty(\lambda,t)\}=\begin{cases}0 & \text{pour} \quad (\lambda,t)\in D_n,\\ u(\lambda,t) & \text{pour} \quad (\lambda,t)\in D\setminus D_n.\end{cases}$$

Transformation de Laplace. Pour la fonction $f(t)$ nous allons noter sa transformée de Laplace par la majuscule correspondante $F(z)$. Enfin $\mathfrak{W}(z_0,\pi/2)$ désignera l'angle de Stolz, de sommet z_0, contenu dans le domaine $\operatorname{Re} z>\operatorname{Re} z_0$.

Nous commençons par les lemmes que nous allons utiliser.

LEMME I. *Si la fonction numérique $f(\lambda,t)$ a sa dérivée par rapport à λ continue sur D, alors $f_n(\lambda)$ et $f_\infty(\lambda)$ ont aussi des dérivées dans K et*

$$[f_n(\lambda)]'=[f'(\lambda)]_n,\qquad [f_\infty(\lambda)]'=[f'(\lambda)]_\infty.$$

Une conséquence immédiate est qu'on peut écrire

$$[f_n(\lambda)]'=f_n'(\lambda)\quad \text{et}\quad [f_\infty(\lambda)]'=f_\infty'(\lambda).$$

Démonstration. Pour la fonction $\{f_n(\lambda,t)\}$ on a

$$lf_n(\lambda)=\{1\}*\{f_n(\lambda,t)\}=\begin{cases}\int_0^t f(\lambda,u)\,du, & (\lambda,t)\in D_n,\\ \int_0^n f(\lambda,u)\,du, & (\lambda,t)\in D\setminus D_n.\end{cases}$$

La dérivée de la fonction numérique ainsi construite existe et elle est continue à cause des hypothèses faites sur $f(\lambda,t)$:

$$\{lf_n(\lambda)\}'=\left\{\begin{matrix}\int_0^t f_\lambda'(\lambda,u)\,du, & (\lambda,t)\in D_n\\ \int_0^n f_\lambda'(\lambda,u)\,du, & (\lambda,t)\in D\setminus D_n\end{matrix}\right\}=l[f'(\lambda)]_n.$$

C'est pourquoi la dérivée de $f_n(\lambda)$ existe dans K et $[f_n(\lambda)]'=[f'(\lambda)]_n$. Il en est de même pour $f_\infty(\lambda)$.

LEMME II. *L'équation différentielle* (1) *peut être écrite sous la forme*

$$vf'(\lambda)+u(\lambda)f(\lambda)=0 \tag{2}$$

où la fonction numérique correspondante $f(\lambda,t)$ admet la dérivée par rapport à λ continue sur D.

Démonstration. Par définition $x(\lambda)$ a une dérivée dans K s'il existe une fonction continue $r(t)$ sur R^+ telle que $rx(\lambda)=f(\lambda)$, où $f(\lambda,t)$ a une dérivée par rapport à λ continue sur D.

LEMME III. *Une autre forme de l'équation* (1) *est*

$$v_nf_n'(\lambda)+u_n(\lambda)f_n(\lambda)=h(\lambda) \tag{3}$$

où $h(\lambda)=\{h(\lambda,t)\}$ et la fonction numérique $h(\lambda,t)$ ne diffère de zéro que dans le domaine $n<t<2n$, $\alpha\leqslant\lambda\leqslant\beta$.

Démonstration. Avec les notations introduites on a

$$(v_n+v_\infty)[f_n'(\lambda)+f_\infty'(\lambda)]+[u_n(\lambda)+u_\infty(\lambda)][f_n(\lambda)+f_\infty(\lambda)]=0$$

ou

$$v_nf_n'(\lambda)+u_n(\lambda)f_n(\lambda)$$
$$=-v_nf_\infty'(\lambda)-v_\infty f_n'(\lambda)-v_\infty f_\infty'(\lambda)-u_n(\lambda)f_\infty(\lambda)-u_\infty(\lambda)f_n(\lambda)-u_\infty(\lambda)f_\infty(\lambda).$$

On voit facilement que le premier membre de cette équation s'annule pour $t\geqslant 2n$, $\alpha\leqslant\lambda\leqslant\beta$ et le second pour $0\leqslant t\leqslant n$, $\alpha\leqslant\lambda\leqslant\beta$. C'est-à-dire que le second membre est donné par une fonction $h(\lambda,t)$ qui ne diffère de zéro que dans le domaine $n<t<2n$, $\alpha\leqslant\lambda\leqslant\beta$.

THÉORÈME 1. *Supposons que pour n fixe on ait $v_n\neq 0$ et qu'il existe un $\varepsilon>0$ et une suite z_m qui tend vers ∞ dans un angle de Stolz $\mathfrak{W}(z_0,\pi/2)$ et telle que*

1. $$\left|\exp\left(-\frac{\int_\alpha^\lambda U_n(\mu,z_m)\,d\mu}{V_n(z_m)}\right)V_n(z_m)z_m^{-\varepsilon}\right|\geqslant K\neq 0,\quad \alpha<\lambda\leqslant\beta;$$
2. $x_m^{-1}\exp(-nx_m)=o\left(\left|V_n(z_m)z_m^{-\varepsilon}\right|\right)$.

Dans ce cas il n'existe pas de solutions de l'équation (1) *avec la condition initiale $x(\alpha)\neq 0$.*

Démonstration. Si l'équation (1) a une solution avec une condition initiale $x(\alpha)\in K$, $x(\alpha)\neq 0$, elle admet une solution avec n'importe quelle condition initiale dans K. Nous prenons $x(\alpha)=l^\varepsilon/l^\varepsilon=I$, et pour l'équation (2) $f(\alpha)=l^\varepsilon$.

D'après le lemme III, notre équation (1) peut être écrite sous la forme (3). En utilisant la transformation de Laplace classique, ce qui est possible à cause des propriétés des fonctions qui interviennent dans cette équation, on a

$$V_n(z)F_n'(\lambda,z)+U_n(\lambda,z)F_n(\lambda,z)=H(\lambda,z) \tag{4}$$

pour n fixe.

La solution de cette équation numérique est

$$V_n(z)F_n(\lambda,z) \tag{5}$$
$$=\exp\left(-\frac{\int_\alpha^\lambda U_n(\mu,z)\,d\mu}{V_n(z)}\right)\left[V_n(z)F_n(\alpha,z)+\int_\alpha^\lambda\exp\left(\frac{\int_\alpha^\mu U_n(\omega,z)\,d\omega}{V_n(z)}\right)H(\mu,z)\,d\mu\right].$$

De l'hypothèse 1 de notre théorème il s'ensuit

$$|V_n(z_m)z_m^{-s}| \geqslant K\left|\exp\left(\frac{\int_a^\lambda U_n(\mu, z_m)\,d\mu}{V_n(z_m)}\right)\right|, \qquad a < \lambda \leqslant \beta.$$

$V_n(z)$ étant la transformée de Laplace, elle tend vers zéro quand $z_m \to \infty$, $z_m \in \mathfrak{W}(z_0, \pi/2)$. C'est pourquoi

$$\left|\exp\left(\frac{\int_a^\mu U_n(\omega, z_m)\,d\omega}{V_n(z)}\right)\right| \leqslant 1,$$

$z_m \to \infty$, $z_m \in \mathfrak{W}(z_0, \pi/2)$ et $a \leqslant \mu \leqslant \beta$.

On peut aussi majorer la fonction $H(\mu, z)$,

$$|H(\mu, z)| \leqslant \left|\int_n^{2n} e^{-zt}h(\mu, t)\,dt\right| \leqslant h_n\int_n^{2n} e^{-xt}\,dt \leqslant h_n\frac{1}{x}e^{-nx},$$

où h_n est une constante. Avec cette majoration on a

$$\left|\int_a^\lambda \exp\left(\frac{\int_a^\mu U_n(\omega, z_m)\,d\omega}{V_n(z_m)}\right)H(\mu, z_m)\,d\mu\right| \leqslant (\lambda - a)h_n\frac{1}{x_m}e^{-nx_m}$$
$$= o\left(|V_n(z_m)z_m^{-s}|\right)$$
$$= \delta(z_m)\,|V_n(z_m)z_m^{-s}|$$

où $\delta(z_m) \to 0$, $z_m \to \infty$, $z_m \in \mathfrak{W}(z_0, \pi/2)$.

Notre solution peut maintenant être minorée:

$$|V_n(z_m)F_n(\lambda, z_m)|$$
$$\geqslant \left|\exp\left(-\frac{\int_a^\lambda U_n(\mu, z_m)\,d\mu}{V_n(z_m)}\right)\right|\left(|V_n(z_m)F_n(a, z)| - \delta(z_m)\,|V_n(z_m)z_m^{-s}|\right)$$
$$\geqslant \left|\exp\left(-\frac{\int_a^\lambda U_n(\mu, z_m)\,d\mu}{V_n(z_m)}\right)V_n(z_m)z_m^{-s}\right|\,|c - \delta(z_m)|, \qquad c \neq 0.$$

D'après l'hypothèse 1 du théorème il existe un m_0 tel que

$$|V_n(z_m)F_n(\lambda, z_m)| \geqslant K/2 \quad \text{pour} \quad m \geqslant m_0,\ a < \lambda \leqslant \beta,$$

ce qui est en contradiction avec le théorème fondamental pour les intégrales de Laplace ([1], p. 162).

THÉORÈME 2. *Supposons qu'il existe un $\eta > 0$ et tel que $v(t) \neq 0$, $0 \leqslant t \leqslant \eta$, et que pour tout $n \in N$*

1. $\exp\left(-\frac{\int_a^\lambda U_n(\omega, x)\,d\omega}{V_n(x)}\right)V_n(x)x^{-\varepsilon} = o(e^{-nx}),\ x \to \infty,\ a < \lambda \leqslant \beta;$

2. $\mathrm{Re}\,\frac{\int_a^\lambda U_n(\omega, x)\,d\omega}{V_n(x)} \geqslant 0$ *pour x assez grand et $a \leqslant \omega \leqslant \lambda \leqslant \beta$.*

Dans ce cas il n'existe pas de solution de l'équation (1) *sous la condition initiale $x(a) = I$.*

Comme dans la démonstration du théorème précédent on arrive à la relation (5). D'après l'hypothèse 2 du théorème on a

$$\left|\int_a^\lambda \exp\left(-\frac{\int_\mu^\lambda U_n(\omega, z)\,d\omega}{V_n(z)}\right)H(\mu, z)\,d\mu\right| \leqslant (\lambda - a)\int_n^{2n} e^{-xt}h_n\,dt = o(e^{-nx}).$$

Avec l'hypothèse 1 on obtient

$$V_n(x)F_n(x) = o(e^{-nx}).$$

Les théorèmes connus sur l'intégrale de Laplace ([1], pp. 180, 186 et 482) nous donnent

$$\int_0^t v_n(t-u)f_n(\lambda, u)\,du = 0, \qquad 0 \leqslant t < n,\ a < \lambda \leqslant \beta,$$

et le théorème de Titchmarsh [7], avec l'hypothèse sur $v(t)$, achève notre démonstration, car d'après ce théorème

$$f_n(\lambda, t) = 0, \qquad 0 \leqslant t < n,\ a < \lambda \leqslant \beta.$$

Cela étant pour tout $n \in N$, il s'ensuit que $f(\lambda) = 0$.

Les deux théorèmes précédents ont été démontrés sous des conditions générales, mais exprimées par les transformations de Laplace. On peut donner des théorèmes plus simples, mais aussi plus restrictifs, tels que le théorème suivant:

THÉORÈME 3. *Soit $u(\lambda, t) \sim Bt^\gamma$* (1) *et $v(t) \sim At^\delta$, $t \to 0$ et $\delta, \gamma \geqslant 0$. Si $\delta - \gamma > 1$, il n'existe pas de solutions de l'équation* (1) *quelle que soit la valeur initiale $x(a) \neq 0$.*

Démonstration. Nous pouvons utiliser les théorèmes du type d'Abel pour les intégrales de Laplace ([1], p. 473):

$$U_n(\lambda, z) \sim B\frac{\Gamma(\gamma+1)}{z^{\gamma+1}}, \qquad V_n(z) \sim A\frac{\Gamma(\delta+1)}{z^{\delta+1}},$$

$z \to \infty$, $z \in \mathfrak{W}(z_0, \pi/2)$, $a \leqslant \lambda \leqslant \beta$ indépendant de $n \in N$.

(1) $u(\lambda, t) \sim Bt^\gamma \Leftrightarrow u(\lambda, t)/t^\gamma = B(\lambda, t) \Rightarrow B,\ t \to 0$, uniformément pour $\lambda \in [a, \beta]$, $B \neq 0$.

Par suite, pour x assez grand

$$\operatorname{Re}\frac{\int_{\omega}^{\lambda} U_n(\mu, x)\,d\mu}{V_n(x)} = \operatorname{Re}\frac{B\Gamma(\gamma+1)}{A\Gamma(\delta+1)}\int_{\omega}^{\lambda}\varepsilon(\mu, x)\,d\mu\, x^{\delta-\gamma}$$

où $\varepsilon(\mu, x)\to 1$ uniformément quand $x\to\infty$, $\alpha\leqslant\mu\leqslant\beta$.

Supposons que $\operatorname{Re}(B/A)\geqslant 0$; alors les conditions du théorème 2 sont remplies.

Si, au contraire, $\operatorname{Re}(B/A)<0$, les conditions du théorème 1 sont satisfaites. La suite (z_m) doit rester sur la droite $\arg z=\theta$, $\cos(\delta-\gamma)\theta>0$.

Ces trois théorèmes ne peuvent pas épuiser toutes les possibilités que nous donne la théorie bien connue de l'intégrale de Laplace. Ils peuvent eux-mêmes aussi être modifiés.

Maintenant nous allons montrer que le théorème 3 a pour conséquence immédiate que la fonction exponentielle $\exp(-\lambda e^{\theta i}s^{\omega})$, $\omega>1$, $\lambda>0$, $0\leqslant\theta<2\pi$, n'existe pas.

Pour les fonctions $u(\lambda)$ et v de l'équation (1) on prend $u(\lambda)=l^2e^{\theta i}$, $v=l^{\omega+2}$, d'où $u(\lambda)/v=s^{\omega}e^{\theta i}$ et l'équation différentielle correspondant à (1) est $x'(\lambda)+s^{\omega}e^{\theta i}x(\lambda)=0$. Comme d'après le théorème 3 cette équation n'a pas de solutions, la fonction exponentielle $\exp(-\lambda e^{\theta i}s^{\omega})$ n'existe pas.

Travaux cités

[1] G. Doetsch, *Handbuch der Laplace-Transformation*, Bd. I, Basel 1950.

[2] J. Mikusiński, *Operatorenrechnung und ihre Beziehung zur modernen Mathematik*, Zeitschrift für Ang. Math. und Mech. 39 (1959), p. 342-346.

[3] — *Operational calculus*, London 1959.

[4] B. Stanković, *Existence et unicité de la solution de l'équation différentielle dans le corps des opérateurs de J. Mikusiński*, Bull. Acad. Sc. et Arts, Classe sc. math. et nat., Sc. math., nouvelle série, Beograd, 5 (1966), p. 21-26.

[5] — *Solution de l'équation différentielle dans un sous-ensemble des opérateurs de J. Mikusiński*, Publications de l'Institut Math., Beograd, 5 (19) (1965), p. 89-95.

[6] — *Equation différentielle vectorielle*, ibidem 6 (20) (1966), p. 77-82.

[7] E. Titchmarsh, *The zeros of certain integral functions*, Proc. London Math. Soc. 25 (1926), p. 283-302.

Reçu par la Rédaction le 27. 1. 1966

STUDIA MATHEMATICA, T. XXVIII. (1967)

On generalized topological divisors of zero in real m-convex algebras

by

W. ŻELAZKO (Warszawa)

In a previous note [3] it was shown that a complex locally m-convex algebra either has generalized topological divisors of zero or it is homeomorphically isomorphic with the field of complex numbers. Here we extent this result onto real m-convex algebras: such an algebra either has generalized topological divisors of zero or it is isomorphically homeomorphic with one of the three finite-dimensional division algebras over real numbers (i.e. field of real numbers, field of complex numbers or division algebra of quaternions). The proof will be obtained by suitable modification of the proof given in [3], the "trick" lies here in considering complex-valued functionals in algebras over the field of real numbers. As before, we may limit ourselves to complete commutative algebras. In fact, it is sufficient to construct such divisors in any commutative m-convex algebra not being a field, since, if any commutative subalgebra of a real algebra A is a field, then A is a division algebra.

We assume here the same notation as in [3], moreover R will denote the field of real numbers and C — the field of complex numbers.

1. The complexification. Let A be an m-convex algebra over R. The *complexification* $\tilde{A}$ of A is defined as direct product $A\oplus A$ equipped with multiplication defined in the some way as multiplication of complex numbers defined as pairs of real numbers, i.e.

$$(x, y)(u, v) = (xu-yv, xv+yu),\qquad x, y, u, v\in A.$$

$\tilde{A}$ becomes an algebra over C with scalar multiplication defined as

$$(\alpha+\beta i)(x, y) = (\alpha x-\beta y, \alpha y+\beta x).$$

If A is an m-convex algebra with a system of submultiplicative pseudonorms $\boldsymbol{P}$, then $\tilde{A}$ is an m-convex algebra with submultiplicative pseudonorms given by

$$\|(x, y)\| = \sup_{\theta}|e^{i\theta}(x, y)|, \tag{1}$$