[6] L. Hörmander, *On the theory of general partial differential operators*, Acta Math. 94 (1955), p. 162-248.

[7] — *On the division of distributions by polynomials*, Arkiv för Mat. 3 (1958), p. 555-568.

[8] — *Hypoelliptic convolution equations*, Math. Scand. 9 (1961), p. 178-184.

[9] L. Schwartz, *Théorie des distributions I/II*, Paris 1957/1959.

[10] — *Séminaire de Schwartz* 1953/54.

[11] Z. Zieleźny, *On the space of convolution operators in* $\mathcal{K}_1'$, to appear in Studia Mathematica.

Reçu par la Rédaction le 26. 9. 1966

Absolut p-summierende Abbildungen in normierten Räumen

von

A. PIETSCH (Jena)

Eine lineare Abbildung T von einem normierten Raum E in einen normierten Raum F wird *absolut p-summierend* genannt, wenn es eine nicht negative Zahl ϱ gibt, so daß für jedes endliche System $x_1, \ldots, x_k$ von Elementen aus E die Ungleichung

$$\Big\{\sum_{i=1}^{k} \|Tx_i\|^p\Big\}^{1/p} \leqslant \varrho \sup_{\|a\|\leqslant 1}\Big\{\sum_{i=1}^{k} |\langle x_i, a\rangle|^p\Big\}^{1/p}$$

besteht.

Im folgenden entwickeln wir eine Theorie (1) dieser Abbildungen, die auch dadurch charakterisiert sind, daß sie alle p-summierbaren Folgen in absolut p-summierbare Folgen überführen. Es zeigt sich, daß die absolut 2-summierenden Abbildungen eine sehr natürliche Verallgemeinerung der Hilbert-Schmidt-Abbildungen sind. Außerdem erweisen sich die absolut p-summierenden Abbildungen in der Theorie der nuklearen lokalkonvexen Räume als überaus nützlich. Unter Verwendung ihrer Multiplikationseigenschaften erhält man insbesondere einen sehr einfachen Beweis des verallgemeinerten Dvoretzky-Rogers-Theorems.

Von fundamentaler Bedeutung ist die Tatsache, daß sich die absolut p-summierenden Abbildungen durch das Bestehen einer Ungleichung der Form (1)

$$\|Tx\| \leqslant \varrho\Big\{\int_{U^0} |\langle x, a\rangle|^p \, d\mu\Big\}^{1/p}$$

charakterisieren lassen. Dabei ist μ ein normiertes positives Radonsches Maß auf der schwach kompakten Einheitskugel U^0 des dualen Banachraumes E'. Die wesentliche Idee zum Beweis dieses Kriteriums stammt von Herrn S. Kwapień, der mich auf einen Satz von Mazur und Orlicz aufmerksam machte (vgl. [12]).

1. Einfache Eigenschaften der absolut p-summierenden Abbildungen. Eine lineare Abbildung T von einem normierten Raum E in einen normierten Raum F heißt *absolut p-summierend* $(1 \leqslant p < +\infty)$, wenn

(1) Für $p = 1$ vgl. [7] und [8].

es eine nicht negative Zahl ϱ gibt, so daß für jedes endliche System $x_1, \ldots, x_k$ von Elementen aus E die Ungleichung

$$\Big\{\sum_{i=1}^{k}\|Tx_i\|^p\Big\}^{1/p} \leqslant \varrho \sup_{\|a\|\leqslant 1}\Big\{\sum_{i=1}^{k}|\langle x_i, a\rangle|^p\Big\}^{1/p}$$

besteht. Bezeichnet man die kleinstmögliche Zahl ϱ mit $\pi_p(T)$, dann gilt der folgende

SATZ 1. *Die Gesamtheit $\Pi_p(E, F)$ aller absolut p-summierenden Abbildungen von E in F ist ein linearer Raum mit der Norm π_p.*

Beweis. Wir beschränken uns auf den Nachweis der Dreiecksungleichung. Zu diesem Zweck betrachten wir zwei absolut p-summierende Abbildungen S und T. Dann hat man

$$\begin{aligned}\Big\{\sum_{i=1}^{k}\|(S+T)x_i\|^p\Big\}^{1/p} &\leqslant \Big\{\sum_{i=1}^{k}(\|Sx_i\|+\|Tx_i\|)^p\Big\}^{1/p}\\ &\leqslant \Big\{\sum_{i=1}^{k}\|Sx_i\|^p\Big\}^{1/p}+\Big\{\sum_{i=1}^{k}\|Tx_i\|^p\Big\}^{1/p}\\ &\leqslant [\pi_p(S)+\pi_p(T)]\sup_{\|a\|\leqslant 1}\Big\{\sum_{i=1}^{k}|\langle x_i, a\rangle|^p\Big\}^{1/p}.\end{aligned}$$

Deshalb ist die Summe $S+T$ eine absolut p-summierende Abbildung mit

$$\pi_p(S+T) \leqslant \pi_p(S)+\pi_p(T).$$

Ohne Beweis formulieren wir den einfachen

SATZ 2. *Alle absolut p-summierenden Abbildungen $T \in \Pi_p(E, F)$ sind beschränkt, und es gilt $\|T\| \leqslant \pi_p(T)$.*

SATZ 3. *Für einen normierten Raum E und einen Banachraum F ist auch $\Pi_p(E, F)$ ein Banachraum.*

Beweis. Wir betrachten in $\Pi_p(E, F)$ eine beliebige Cauchy-Folge $\{T_n\}$. Wegen $\pi_p(T_m-T_n) \geqslant \|T_m-T_n\|$ ist dann $\{T_n\}$ auch eine Cauchy-Folge in dem Banachraum $L(E, F)$, und es gibt eine beschränkte lineare Abbildung T mit

$$\lim_n \|T-T_n\| = 0.$$

Bestimmt man zu der beliebigen positiven Zahl ε eine natürliche Zahl n_0 mit

$$\pi_p(T_m-T_n) \leqslant \varepsilon \quad \text{für} \quad m, n \geqslant n_0,$$

so besteht die Ungleichung

$$\Big\{\sum_{i=1}^{k}\|T_m x_i-T_n x_i\|^p\Big\}^{1/p} \leqslant \varepsilon \sup_{\|a\|\leqslant 1}\Big\{\sum_{i=1}^{k}|\langle x_i, a\rangle|^p\Big\}^{1/p} \quad \text{für} \quad m, n \geqslant n_0.$$

Da man durch den Grenzübergang $m \to \infty$ die Abschätzung

$$\Big\{\sum_{i=1}^{k}\|Tx_i-T_n x_i\|^p\Big\}^{1/p} \leqslant \varepsilon \sup_{\|a\|\leqslant 1}\Big\{\sum_{i=1}^{k}|\langle x_i, a\rangle|^p\Big\}^{1/p} \quad \text{für} \quad n \geqslant n_0$$

erhält, gilt die Aussage

$$\pi_p(T-T_n) \leqslant \varepsilon \quad \text{für} \quad n \geqslant n_0.$$

Deshalb ist die absolut p-summierende Abbildung T in $\Pi_p(E, F)$ Grenzwert der Cauchy-Folge $\{T_n\}$.

Sind E, F und G drei beliebige normierte Räume, so ergibt sich

SATZ 4. (1) *Aus $T \in L(E, F)$ und $S \in \Pi_p(F, G)$ folgt $ST \in \Pi_p(E, G)$, und es gilt $\pi_p(ST) \leqslant \pi_p(S)\|T\|$.*

(2) *Aus $T \in \Pi_p(E, F)$ und $S \in L(F, G)$ folgt $ST \in \Pi_p(E, G)$, und es gilt $\pi_p(ST) \leqslant \|S\|\pi_p(T)$.*

Beweis. Unsere Behauptung folgt aus den Abschätzungen

$$\begin{aligned}\Big\{\sum_{i=1}^{k}\|STx_i\|^p\Big\}^{1/p} &\leqslant \pi_p(S)\sup_{\|b\|\leqslant 1}\Big\{\sum_{i=1}^{k}|\langle Tx_i, b\rangle|^p\Big\}^{1/p}\\ &\leqslant \pi_p(S)\,\|T\|\sup_{\|b\|\leqslant 1}\Big\{\sum_{i=1}^{k}|\langle x_i, \|T\|^{-1}T' b\rangle|^p\Big\}^{1/p}\\ &\leqslant \pi_p(S)\,\|T\|\sup_{\|a\|\leqslant 1}\Big\{\sum_{i=1}^{k}|\langle x_i, a\rangle|^p\Big\}^{1/p}\end{aligned}$$

und

$$\Big\{\sum_{i=1}^{k}\|STx_i\|^p\Big\}^{1/p} \leqslant \|S\|\Big\{\sum_{i=1}^{k}\|Tx_i\|^p\Big\}^{1/p} \leqslant \|S\|\pi_p(T)\sup_{\|a\|\leqslant 1}\Big\{\sum_{i=1}^{k}|\langle x_i, a\rangle|^p\Big\}^{1/p}.$$

Wir zeigen nun, daß die linearen Räume $\Pi_p(E, F)$ in Abhängigkeit von p monoton wachsen.

SATZ 5. *Für zwei Zahlen p und q mit $1 \leqslant p < q < +\infty$ gilt stets*

$$\Pi_p(E, F) \subset \Pi_q(E, F) \quad \text{und} \quad \pi_p \geqslant \pi_q.$$

Beweis. Ist T eine absolut p-summierende Abbildungen von E in F, so gilt für endlich viele Elemente $x_1, \ldots x_k \in E$ und beliebige Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ die Ungleichung

$$\Big\{\sum_{i=1}^{k}\|\lambda_i Tx_i\|^p\Big\}^{1/p} \leqslant \pi_p(T)\sup_{\|a\|\leqslant 1}\Big\{\sum_{i=1}^{k}|\langle \lambda_i x_i, a\rangle|^p\Big\}^{1/p}.$$

Wird die Zahl r aus der Gleichung

$$1/r+1/q = 1/p$$

bestimmt, dann besteht auf Grund der Hölderschen Ungleichung die Abschätzung

$$\sup_{\|a\|\leqslant 1}\Big\{\sum_{i=1}^{k}|\langle\lambda_i x_i, a\rangle|^p\Big\}^{1/p} \leqslant \Big\{\sum_{i=1}^{k}|\lambda_i|^r\Big\}^{1/r}\sup_{\|a\|\leqslant 1}\Big\{\sum_{i=1}^{k}|\langle x_i, a\rangle|^q\Big\}^{1/q},$$

und mit

$$\lambda_i = \|Tx_i\|^{q/r}$$

ergibt sich wegen

$$\Big\{\sum_{i=1}^{k}\|\lambda_i Tx_i\|^p\Big\}^{1/p} = \Big\{\sum_{i=1}^{k}\|Tx_i\|^q\Big\}^{1/p}$$

und

$$\Big\{\sum_{i=1}^{k}|\lambda_i|^r\Big\}^{1/r} = \Big\{\sum_{i=1}^{k}\|Tx_i\|^q\Big\}^{1/r}$$

die Beziehung

$$\Big\{\sum_{i=1}^{k}\|Tx_i\|^q\Big\}^{1/q} \leqslant \boldsymbol{\pi}_p(T)\sup_{\|a\|\leqslant 1}\Big\{\sum_{i=1}^{k}|\langle x_i, a\rangle|^q\Big\}^{1/q}.$$

Deshalb ist T eine absolut q-summierende Abbildung mit $\boldsymbol{\pi}_q(T) \leqslant \boldsymbol{\pi}_p(T)$.

Wir beweisen nun, daß für zwei Zahlen p und q mit $1 \leqslant p < q < +\infty$ und beliebige normierte Räume E und F nicht immer die Identität

$$\boldsymbol{\Pi}_p(E, F) = \boldsymbol{\Pi}_q(E, F)$$

gilt.

Satz 6. *Die identische Abbildung von $\boldsymbol{C}[0,1]$ in $\boldsymbol{L}_p(0,1)$ ist absolut p-summierend.*

Beweis. Weil auf $\boldsymbol{C}[0,1]$ durch den Ansatz

$$\langle x, \delta_t\rangle = x(t)$$

beschränkte Linearformen δ_t mit $\|\delta_t\| = 1$ definiert werden, besteht die Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{k}\|x_i\|_{L_p}^p = \sum_{i=1}^{k}\int_0^1|x_i(t)|^p dt = \int_0^1\sum_{i=1}^{k}|\langle x_i, \delta_t\rangle|^p dt \leqslant \sup_{\|a\|\leqslant 1}\sum_{i=1}^{k}|\langle x_i, a\rangle|^p.$$

Satz 7. *Die identische Abbildung von $\boldsymbol{C}[0,1]$ in $\boldsymbol{L}_q(0,1)$ ist für keine Zahl p mit $1 \leqslant p < q$ absolut p-summierend.*

Beweis. Wir betrachten eine Folge von positiven Zahlen δ_i mit

$$\sum_{i=1}^{\infty}\delta_i = 1 \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{\infty}\delta_i^{p/q} = +\infty,$$

und setzen

$$\sigma_0 = 0 \text{ und } \sigma_i = \delta_1+\ldots+\delta_i \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \ldots$$

Nun werden die zu $C[0,1]$ gehörigen Zackenfunktionen x_i durch den Ansatz

$$x_i(t) = \begin{cases} 1-\delta_i^{-1}|2t-\sigma_i-\sigma_{i-1}| & \text{für} \quad t\in[\sigma_{i-1}, \sigma_i], \\ 0 & \text{für} \quad t\notin[\sigma_{i-1}, \sigma_i] \end{cases}$$

definiert. Bestimmt man zu jeder Linearform $a\in\boldsymbol{C}[0,1]'$ mit $\|a\| \leqslant 1$ die Zahlen λ_i so, daß

$$|\lambda_i| = 1 \quad \text{und} \quad \lambda_i\langle x_i, a\rangle = |\langle x_i, a\rangle|$$

gilt, dann ergibt sich die Ungleichung

$$\Big\{\sum_{i=1}^{k}|\langle x_i, a\rangle|^p\Big\}^{1/p} \leqslant \sum_{i=1}^{k}|\langle x_i, a\rangle| \leqslant \Big\langle\sum_{i=1}^{k}\lambda_i x_i, a\Big\rangle \leqslant \Big\|\sum_{i=1}^{k}\lambda_i x_i\Big\|_C = 1.$$

Folglich erhält man die Aussage

$$\sup_{\|a\|\leqslant 1}\Big\{\sum_{i=1}^{k}|\langle x_i, a\rangle|^p\Big\}^{1/p} \leqslant 1.$$

Außerdem gilt

$$\|x_i\|_{L_q} = (\delta_i/q+1)^{1/q}.$$

Wäre die identische Abbildung von $\boldsymbol{C}[0,1]$ in $\boldsymbol{L}_q(0,1)$ absolut p-summierend, so müßte die Ungleichung

$$\Big\{\sum_{i=1}^{k}\|x_i\|_{L_q}^p\Big\}^{1/p} \leqslant \varrho\sup_{\|a\|\leqslant 1}\Big\{\sum_{i=1}^{k}|\langle x_i, a\rangle|^p\Big\}^{1/p}$$

bestehen. Durch den Grenzübergang $k\to\infty$ würde sich dann aber die falsche Aussage

$$\sum_{i=1}^{\infty}\delta_i^{p/q} < +\infty$$

ergeben.

Wir zeigen nun durch ein Beispiel, daß es absolut 2-summierende (nicht absolut 2-summierende) Abbildungen gibt, die eine nicht absolut 2-summierende (absolut 2-summierende) duale Abbildung besitzen [2].

Satz 8. *Die identische Abbildung R von $\boldsymbol{l}^2$ in $\boldsymbol{c}_0$ ist nicht absolut 2-summierend.*

Beweis. Wenn die Abbildung R absolut 2-summierend wäre, müßte die Ungleichung

$$\Big\{\sum_{i=1}^{k}\|Rx_i\|_{c_0}^2\Big\}^{1/2} \leqslant \varrho\sup\Big\{\sum_{i=1}^{k}|\langle x_i, a\rangle|^2\Big\}^{1/2}$$

[2] Vgl. dagegen Satz 18.

gelten. Setzt man speziell für x_i die i-te Einheitsfolge ein, so ergibt sich auf Grund der Besselschen Ungleichung die falsche Aussage

$$k^{1/2} = \Big\{\sum_{i=1}^{k} \|Rx_i\|_{c_0}^2\Big\}^{1/2} \leqslant \varrho \sup_{\|a\|\leqslant 1}\Big\{\sum_{i=1}^{k} |\langle x_i, a\rangle|^2\Big\}^{1/2} \leqslant \varrho \quad \text{für} \quad k = 1, 2, \ldots$$

Auf die gleiche Weise erhält man den

Satz 9. *Die identische Abbildung R'' von $\boldsymbol{l}^2$ in $\boldsymbol{m}$ ist nicht absolu 2-summierend.*

Andererseits hat man aber den

Satz 10. *Die identische Abbildung R' von $\boldsymbol{l}^1$ in $\boldsymbol{l}^2$ ist absolut 2-summierend, und es gilt $\boldsymbol{\pi}_2(R') = 1$.*

Beweis. Auf dem Intervall $[0, 1]$ betrachten wir das Orthonormalsystem der Rademacherschen Funktionen ϱ_n mit

$$\varrho_n(t) = \begin{cases} (-1)^h & \text{für} \quad 2^{-n}h < t < 2^{-n}(h+1), \\ 0 & \text{für} \quad t = 2^{-n}h. \end{cases}$$

Weil dann auf $\boldsymbol{l}^1$ durch den Ansatz

$$\langle x, a(t)\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \varrho_n(t) \quad \text{für} \quad x = [\xi_n] \in \boldsymbol{l}^1$$

stetige Linearformen $a(t)$ mit $\|a(t)\| \leqslant 1$ definiert werden, ergibt sich auf Grund der Besselschen Identität

$$\|R'x\|_{\boldsymbol{l}^2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2 = \int_0^1 \Big|\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \varrho_n(t)\Big|^2 dt = \int_0^1 |\langle x, a(t)\rangle|^2 dt$$

die Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{k} \|R'x_i\|_{\boldsymbol{l}^2}^2 = \int_0^1 \sum_{i=1}^{k} |\langle x_i, a(t)\rangle|^2 dt \leqslant \sup_{\|a\|\leqslant 1} \sum_{i=1}^{k} |\langle x_i, a\rangle|^2.$$

Folglich ist R' eine absolut 2-summierende Abbildung, und es gilt

$$1 \leqslant \|R'\| \leqslant \boldsymbol{\pi}_2(R') \leqslant 1.$$

2. Hilbert-Schmidt-Abbildungen. Eine beschränkte lineare Abbildung T von einem Hilbertraum E in einen Hilbertraum F wird als *Hilbert-Schmidt-Abbildung* bezeichnet, wenn für ein vollständiges Orthonormalsystem $[e_i]_{i\in I}$ von E die Ungleichung

$$\sum_{I} \|Te_i\|^2 < +\infty$$

besteht. Man kann nachweisen, daß alle Hilbert-Schmidt-Abbildungen von E in F einen linearen Raum $\boldsymbol{S}(E, F)$ bilden, auf dem durch den Ansatz

$$\boldsymbol{\sigma}(T) = \Big\{\sum_{I} \|Te_i\|^2\Big\}^{1/2}$$

eine von der speziellen Wahl des Orthonormalsystems $[e_i]_{i\in I}$ unabhängige Norm definiert wird (vgl. [8] oder [14]).

Theorem 1. *Für zwei Hilberträume E und F fallen die absolut 2-summierenden Abbildungen $T \in \boldsymbol{\Pi}_2(E, F)$ mit den Hilbert-Schmidt-Abbildungen $T \in \boldsymbol{S}(E, F)$ zusammen, und es gilt*

$$\boldsymbol{\sigma}(T) = \boldsymbol{\pi}_2(T).$$

Beweis. Wir betrachten zuerst eine absolut 2-summierende Abbildung T. Setzt man dann in der Ungleichung

$$\Big\{\sum_{i=1}^{k} \|Tx_i\|^2\Big\}^{1/2} \leqslant \boldsymbol{\pi}_2(T) \sup_{\|a\|\leqslant 1}\Big\{\sum_{i=1}^{k} |(x_i, a)|^2\Big\}^{1/2}$$

für die Elemente $x_1, \ldots, x_k$ ein endliches Orthonormalsystem $e_1, \ldots, e_k$ ein, so ergibt sich auf Grund der Besselschen Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{k} |(e_i, a)|^2 \leqslant \|a\|^2$$

die Abschätzung

$$\Big\{\sum_{i=1}^{k} \|Te_i\|^2\Big\}^{1/2} \leqslant \boldsymbol{\pi}_2(T).$$

Da man die Ungleichung

$$\Big\{\sum_{I} \|Te_i\|^2\Big\}^{1/2} \leqslant \boldsymbol{\pi}_2(T)$$

für beliebige Orthonormalsysteme $[e_i]_{i\in I}$ durch Grenzübergang erhält, ist T eine Hilbert-Schmidt-Abbildung mit

$$\boldsymbol{\sigma}(T) \leqslant \boldsymbol{\pi}_2(T).$$

Andererseits läßt sich jede Hilbert-Schmidt-Abbildung T mit zwei Orthonormalsystemen $[e_n]_{n\in N}$ und $[f_n]_{n\in N}$ in der Form

$$Tx = \sum_{N} \lambda_n (x, e_n) f_n \quad \text{für} \quad x \in E$$

darstellen. Dabei gilt

$$\boldsymbol{\sigma}(T) = \Big\{\sum_{N} |\lambda_n|^2\Big\}^{1/2}.$$

Folglich hat man

$$\|Tx\|^2 = \sum_N |\lambda_n|^2 |(x, e_n)|^2,$$

und für jedes endliche System $x_1, \ldots, x_k$ von Elementen aus E ergibt sich die Abschätzung

$$\sum_{i=1}^k \|Tx_i\|^2 = \sum_N |\lambda_n|^2 \sum_{i=1}^k |(x_i, e_n)|^2 \leqslant \sigma(T)^2 \sup_{\|a\|\leqslant 1} \sum_{i=1}^k |(x_i, a)|^2.$$

Deshalb ist T eine absolut 2-summierende Abbildung mit

$$\pi_2(T) \leqslant \sigma(T).$$

Da ich bereits in einer früheren Arbeit gezeigt habe, daß alle Hilbert-Schmidt-Abbildungen sogar absolut 1-summierend sind, gilt der

SATZ 11. *In Hilberträumen fallen alle absolut p-summierenden Abbildungen mit $1 \leqslant p \leqslant 2$ zusammen.*

Es erhebt sich das folgende

PROBLEM [3]. *Stimmen in Hilberträumen sogar alle absolut p-summierende Abbildungen mit $1 \leqslant p < +\infty$ überein?*

3. Einbettungssätze. Für eine beschränkte offene Menge G des n-dimensionalen euklidischen Raumes ist $C^{(l)}(\bar{G})$ der Banachraum aller auf G definierten Funktionen x, die bis zur Ordnung l differenzierbar sind, so daß sich alle Ableitungen $D^\alpha x$ mit $|\alpha| \leqslant l$ stetig auf $\bar{G}$ fortsetzen lassen. Auf $C^{(l)}(\bar{G})$ wird die Norm

$$\|x\|_{C^{(l)}} = \sup\{|D^\alpha x(t)| : t \in G \text{ und } |\alpha| \leqslant l\}$$

verwendet.

Vervollständigt man $C^{(l)}(\bar{G})$ bezüglich der Norm

$$\|x\|_{W_p^{(l)}} = \Big\{\int_G \sum_{|\alpha|\leqslant l} |D^\alpha x(t)|^p \, dt\Big\}^{1/p},$$

so erhält man den Banachraum $W_p^{(l)}(G)$.

Es gilt der folgende

EINBETTUNGSSATZ 12. *Die identische Abbildung von $C^{(l)}(\bar{G})$ in $W_p^{(l)}(G)$ ist absolut p-summierend.*

Beweis. Weil auf $C^{(l)}(\bar{G})$ durch den Ansatz

$$\langle x, \delta_t^{(\alpha)} \rangle = D^\alpha x(t)$$

[3] Die positive Lösung dieses Problems findet man in [16].

beschränkte Linearformen $\delta_t^{(\alpha)}$ mit $\|\delta_t^{(\alpha)}\| \leqslant 1$ definiert werden, besteht die Ungleichung

$$\sum_{i=1}^k \|x_i\|_{W_p^{(l)}}^p = \sum_{i=1}^k \int_G \sum_{|\alpha|\leqslant l} |D^\alpha x_i(t)|^p \, dt = \sum_{|\alpha|\leqslant l} \int_G \sum_{i=1}^k |\langle x_i, \delta_t^{(\alpha)} \rangle|^p \, dt$$
$$\leqslant \sigma\mu(G) \sup_{\|a\|\leqslant 1} \sum_{i=1}^k |\langle x_i, a \rangle|^p.$$

Dabei ist σ die Anzahl der Exponenten α mit $|\alpha| \leqslant l$.

Unter gewissen zusätzlichen Bedingungen über die zugrunde liegende offene Menge G gilt mit jeder natürlichen Zahl $m > n/p$ die Sobolevsche Ungleichung (vgl. [15])

$$\|x\|_{C^{(l)}} \leqslant \tau \|x\|_{W_p^{(l+m)}} \quad \text{für} \quad x \in C^{(l+m)}(\bar{G}).$$

Deshalb läßt sich die identische Abbildung von $C^{(l+m)}(\bar{G})$ in $C^{(l)}(\bar{G})$ auf eindeutige Weise zu einer stetigen linearen Abbildung von $W_p^{(l+m)}(G)$ in $C^{(l)}(\bar{G})$ fortsetzen, und aus dem Diagramm

$$W_p^{(l+m)}(G) \to C^{(l)}(\bar{G}) \to W_p^{(l)}(G)$$

ergibt sich der

EINBETTUNGSSATZ 13. *Die identische Abbildung von $W_p^{(l+m)}(G)$ in $W_p^{(l)}(G)$ ist für $m > n/p$ absolut p-summierend.*

Bemerkung. Für den Fall $p = 2$ erhalten wir auf Grund von Theorem 1 die bereits von Maurin [6] bewiesene Aussage, daß die identische Abbildung von $W_2^{(l+m)}(G)$ in $W_2^{(l)}(G)$ für $m > n/2$ vom Hilbert-Schmidtschen Typus ist.

4. Eine Charakterisierung der absolut p-summierenden Abbildungen. Wir geben nun eine sehr wichtige Charakterisierung der absolut p-summierenden Abbildungen an.

THEOREM 2. *Eine lineare Abbildung T von einem normierten Raum E in einen normierten Raum F ist dann und nur dann absolut p-summierend, wenn auf der schwach kompakten Einheitskugel U^0 des zu E dualen Banachraumes E' ein normiertes positives Radonsches Maß μ existiert, für das die Beziehung*

$$\|Tx\| \leqslant \pi_p(T) \Big\{\int_{U^0} |\langle x, a \rangle|^p \, d\mu\Big\}^{1/p} \quad \textit{mit} \quad x \in E$$

besteht.

Beweis. Wenn die Abbildung T absolut p-summierend ist, gilt mit einer geeigneten nicht negativen Zahl ϱ die Ungleichung

$$\sum_{i=1}^k \|Tx_i\|^p \leqslant \varrho^p \sup_{\|a\|\leqslant 1} \sum_{i=1}^k |\langle x_i, a \rangle|^p.$$

Deshalb wird durch den Ansatz [4]

$$s(\varphi) = \inf_{x_1,\ldots,x_k\epsilon E} \Big\{ \sup_{\|a\|\leqslant 1} \Big[\varphi(a) + \varrho^p \sum_{i=1}^{k} |\langle x_i, a\rangle|^p\Big] - \sum_{i=1}^{k} \|Tx_i\|^p \Big\}$$

auf dem reellen Banachraum $C(U^0)$ ein positiv homogenes und subadditives Funktional s definiert, für das die Beziehung

$$\inf_{\|a\|\leqslant 1} \varphi(a) \leqslant s(\varphi) \leqslant \sup_{\|a\|\leqslant 1} \varphi(a)$$

besteht. Auf Grund des Hahn-Banach-Theorems gibt es dann auf $C(U^0)$ eine Linearform μ mit

$$\langle \varphi, \mu\rangle \leqslant s(\varphi) \quad \text{für} \quad \varphi \epsilon C(U^0).$$

Da für jede nicht negative Funktion $\varphi \epsilon C(U^0)$ die Aussage

$$\langle -\varphi, \mu\rangle \leqslant s(-\varphi) \leqslant 0$$

gilt, ist die Linearform μ positiv und somit stetig. Außerdem hat man

$$\langle 1, \mu\rangle \leqslant s(1) = 1.$$

Für die zu $C(U^0)$ gehörige Funktion φ_x mit $\varphi_x(a) = \langle x, a\rangle$ ergibt sich wegen

$$s(-\varrho^p |\varphi_x|^p) \leqslant \sup_{\|a\|\leqslant 1} \{-\varrho^p |\varphi_x(a)|^p + \varrho^p |\langle x, a\rangle|^p\} - \|Tx\|^p$$

die Ungleichung

$$\langle -\varrho^p |\varphi_x|^p, \mu\rangle \leqslant -\|Tx\|^p.$$

Geht man anschließend zu der Integralschreibweise des positiven Radonschen Maßes μ über, so entsteht die gesuchte Abschätzung

$$\|Tx\| \leqslant \varrho \Big\{\int_{U^0} |\langle x, a\rangle|^p d\mu\Big\}^{1/p} \quad \text{für} \quad x \epsilon E,$$

aus der unmittelbar die modifizierte Ausgangsgleichung

$$\sum_{i=1}^{k} \|Tx_i\|^p \leqslant \varrho^p \langle 1, \mu\rangle \sup_{\|a\|\leqslant 1} \sum_{i=1}^{k} |\langle x_i, a\rangle|^p$$

folgt. Hat man die Zahl ϱ so klein wie möglich gewählt, dann muß die Aussage

$$\langle 1, \mu\rangle \geqslant 1$$

gelten, und das positive Radonsche Maß μ ist normiert.

Als erste Anwendung von Theorem 2 liefern wir einen neuen Beweis von

[4] Vgl. [12]. Einen ähnlichen Ansatz findet man auch in [1], S. 175.

Satz 5. *Für zwei Zahlen p und q mit $1 \leqslant p < q < +\infty$ gilt stets*

$$\mathbf{\Pi}_p(E, F) \subset \mathbf{\Pi}_q(E, F) \quad \textit{und} \quad \boldsymbol{\pi}_p \geqslant \boldsymbol{\pi}_q.$$

Beweis. Ist T eine absolut p-summierende Abbildung von E in F, so besteht mit einem geeigneten normierten positiven Radonschen Maß μ die Beziehung

$$\|Tx\| \leqslant \boldsymbol{\pi}_p(T) \Big\{\int_{U^0} |\langle x, a\rangle|^p d\mu\Big\}^{1/p}.$$

Wird die Zahl r aus der Gleichung

$$1/r + 1/q = 1/p$$

bestimmt, dann erhält man auf Grund der Hölderschen Ungleichung die Aussage

$$\|Tx\| \leqslant \boldsymbol{\pi}_p(T) \Big\{\int_{U^0} |\langle x, a\rangle|^p d\mu\Big\}^{1/p} \leqslant \boldsymbol{\pi}_p(T) \Big\{\int_{U^0} 1^r d\mu\Big\}^{1/r} \Big\{\int_{U^0} |\langle x, a\rangle|^q d\mu\Big\}^{1/q}.$$

Deshalb ist T eine absolut q-summierende Abbildung mit $\boldsymbol{\pi}_q(T) \leqslant \boldsymbol{\pi}_p(T)$.

Als unmittelbare Folgerung aus dem Lebesgueschen Konvergenzsatz der Integrationstheorie erhält man

Satz 14. *Jede absolut p-summierende Abbildung T führt alle schwach konvergenten Folgen in konvergente Folgen über.*

Beweis. Nach Theorem 2 besteht mit einem normierten positiven Radonschen Maß μ die Ungleichung

$$\|Tx\| \leqslant \varrho \Big\{\int_{U^0} |\langle x, a\rangle|^p d\mu\Big\}^{1/p} \quad \text{für} \quad x \epsilon E.$$

Wenn die Folge der Elemente x_n in E schwach gegen 0 konvergiert, streben die stetigen Funktionen φ_n mit $\varphi_n(a) = \langle x_n, a\rangle$ auf U^0 punktweise gegen die Nullfunktion. Da jede schwach konvergente Folge außerdem beschränkt ist, existiert eine positive Zahl τ mit

$$|\varphi_n(a)| \leqslant \tau \quad \text{für} \quad a \epsilon U^0.$$

Folglich hat man

$$\lim_n \int_{U^0} |\langle x_n, a\rangle|^p d\mu = 0,$$

und unsere Behauptung ergibt sich aus der obigen Ungleichung.

5. Eine Faktorisierung der absolut p-summierenden Abbildungen. Im folgenden ist μ stets ein normiertes positives Radonsches Maß auf einen kompakten Hausdorffraum K, und mit I wird die identische Abbildung von $C(K)$ in $L_p(K, \mu)$ bezeichnet, die jeder stetigen Funktion φ die von ihr erzeugte Restklasse $\hat{\varphi}$ in $L_p(K, \mu)$ zuordnet.

Man erhält die folgende Verallgemeinerung von Satz 6.

Satz 6′. *Die identische Abbildung I von $\boldsymbol{C}(K)$ in $\boldsymbol{L}_p(K,\mu)$ ist absolut p-summierend, und es gilt $\boldsymbol{\pi}_p(I)=1$.*

Ist $\boldsymbol{B}(S)$ der Banachraum aller auf einer Menge S beschränkten Funktionen y mit der Norm

$$\|y\|_B=\sup_{s\in S}|x(s)|,$$

so ergibt sich der

Satz 15. *Eine lineare Abbildung T von einem normierten Raum E in den Banachraum $\boldsymbol{B}(S)$ ist dann und nur dann absolut p-summierend, wenn sie sich auf die folgende Art faktorisieren läßt:*

$$E\xrightarrow{P}\boldsymbol{C}(K)\xrightarrow{I}\boldsymbol{L}_p(K,\mu)\xrightarrow{Q}\boldsymbol{B}(S).$$

Dabei sind P und Q beschränkte lineare Abbildungen mit

$$\|P\|=1\quad \textit{und}\quad \|Q\|=\boldsymbol{\pi}_p(T).$$

Notwendigkeit. Als kompakten Hausdorffraum K verwenden wir die mit der schwachen Topologie versehene abgeschlossene Einheitskugel des Banachraumes E'. Auf Grund von Theorem 2 gibt es dann auf K ein normiertes positives Radonsches Maß μ, für das die Beziehung

$$\|Tx\|_B\leqslant\boldsymbol{\pi}_p(T)\Big\{\int_{U^0}|\langle x,a\rangle|^p\,d\mu\Big\}^{1/p}$$

besteht. Nun gewinnt man die gesuchte Abbildung P dadurch, daß man jedem Element $x\in E$ die stetige Funktion φ_x mit $\varphi_x(a)=\langle x,a\rangle$ zuordnet. Außerdem ergibt sich eine beschränkte lineare Abbildung Q_0, die den linearen Teilraum $IP(E)$ von $\boldsymbol{L}_p(K,\mu)$ in $\boldsymbol{B}(S)$ abbildet, wenn man

$$Q_0(\hat{\varphi}_x)=Tx\quad \text{für}\quad x\in E$$

setzt. Weil dann die Ungleichung

$$\|Q_0(\hat{\varphi}_x)\|_B=\|Tx\|_B\leqslant\boldsymbol{\pi}_p(T)\Big\{\int_{U^0}|\langle x,a\rangle|^p\,d\mu\Big\}^{1/p}=\boldsymbol{\pi}_p(T)\,\|\hat{\varphi}_x\|_{L_p}$$

besteht, hat man $\|Q_0\|\leqslant\boldsymbol{\pi}_p(T)$. Da sich aber Q_0 unter Beibehaltung der Norm zu einer beschränkten linearen Abbildung Q von ganz $\boldsymbol{L}_p(K,\mu)$ in $\boldsymbol{B}(S)$ fortsetzen läßt, ist damit die gesuchte Zerlegung der Abbildung T gefunden. Dabei gilt für die Abbildung Q wegen

$$\boldsymbol{\pi}_p(T)\leqslant\|Q\|\boldsymbol{\pi}_p(I)\|P\|\leqslant\|Q\|\leqslant\boldsymbol{\pi}_p(T)$$

die Aussage $\|Q\|=\boldsymbol{\pi}_p(T)$.

Hinlänglichkeit. Wenn sich eine Abbildung T in der angegebenen Form $T=QIP$ darstellen läßt, muß sie auf Grund von Satz 4 und der Verallgemeinerung von Satz 6 absolut p-summierend sein.

Da man jeden normierten Raum F in einen Banachraum $\boldsymbol{B}(S)$ einbetten kann, ergibt sich das

Theorem 3. *Eine lineare Abbildung T von einem normierten Raum E in einen normierten Raum F ist dann und nur dann absolut p-summierend, wenn sie sich als Abbildung von E in einen F umfassenden normierten Raum G auf die folgende Art zerlegen läßt:*

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rrr, "T"] \arrow[dr, "P"] & & & F \arrow[dr, "J"] & \\
& \boldsymbol{C}(K) \arrow[r, "I"] & \boldsymbol{L}_p(K,\mu) \arrow[rr, "Q"] & & G
\end{tikzcd}$$

Dabei ist J die identische Abbildung von F in den Oberraum G.

Im Spezialfall $p=2$ erhält man

Satz 16. *Eine lineare Abbildung T von einem normierten Raum E in einen Banachraum F ist dann und nur dann absolut 2-summierend, wenn sie sich auf die folgende Art zerlegen läßt:*

$$E\xrightarrow{P}\boldsymbol{C}(K)\xrightarrow{I}\boldsymbol{L}_2(K,\mu)\xrightarrow{Q}F.$$

Beweis. Weil $\boldsymbol{L}_2(K,\mu)$ ein Hilbertraum ist, kann man die im Beweis von Satz 15 auftretende Abbildung Q_0 unter Beibehaltung der Norm zu einer beschränkten linearen Abbildung Q von ganz $\boldsymbol{L}_2(K,\mu)$ in F fortsetzen.

Als einfache Folgerung aus dem Faktorisierungstheorem ergibt sich

Satz 17. *Jede absolut p-summierende Abbildung T von einem normierten Raum E in einen Banachraum F ist schwach kompakt.*

Beweis. Auf Grund von Satz 5 kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß $p>1$ gilt. Nun folgt aus der Reflexivität von $\boldsymbol{L}_p(K,\mu)$, daß die in der Zerlegung von T auftretende kanonische Abbildung I schwach kompakt sein muß. Die gleiche Aussage gilt deshalb auch für die Abbildung $JT=QIP$. Folglich ist $JT(U)$ eine relativ schwach kompakte Teilmenge des Oberraumes G. Da aber F ein vollständiger und somit schwach abgeschlossener Teilraum von G sein sollte, ist $T(U)$ auch als Teilmenge von F relativ schwach kompakt.

Da auch die identische Abbildung von $\boldsymbol{L}_\infty(K,\mu)$ in $\boldsymbol{L}_p(K,\mu)$ absolut p-summierend ist, darf man in allen angegebenen Zerlegungen den Banachraum $\boldsymbol{C}(K)$ durch den Banachraum $\boldsymbol{L}_\infty(K,\mu)$ ersetzen. Unter Verwendung der in [9] benutzten Methoden ergibt sich deshalb

Satz 18. *Die biduale Abbildung T'' jeder absolut p-summierenden Abbildung T ist ebenfalls absolut p-summierend, und es gilt $\boldsymbol{\pi}_p(T'')=\boldsymbol{\pi}_p(T)$.*

6. Produkte von absolut p-summierenden Abbildungen. Sind E, F und G drei beliebige normierte Räume, so ergibt sich

THEOREM 4. *Unter der Voraussetzung*

$$1/r = 1/p + 1/q \leqslant 1$$

folgt aus $T \in \boldsymbol{\Pi}_p(E, F)$ *und* $S \in \boldsymbol{\Pi}_q(F, G)$ *stets* $ST \in \boldsymbol{\Pi}_r(E, G)$, *und es gilt*

$$\boldsymbol{\pi}_r(ST) \leqslant \boldsymbol{\pi}_q(S)\boldsymbol{\pi}_p(T).$$

Beweis. Weil die Abbildung T absolut p-summierend ist, gibt es auf der abgeschlossenen Einheitskugel U^0 von E' ein normiertes positives Radonsches Maß μ, so daß die Beziehung

$$\|Tx\| \leqslant \boldsymbol{\pi}_p(T)\Big\{\int_{U^0} |\langle x, a\rangle|^p d\mu\Big\}^{1/p} \quad \text{für} \quad x \in E$$

besteht.

Wir bezeichnen nun mit $\boldsymbol{E}_p(U^0, \mu)$ denjenigen linearen Teilraum von $\boldsymbol{L}_p(U^0, \mu)$, der aus allen Restklassen $\hat{\varphi}_x$ besteht, die den Funktionen $\varphi_x \in \boldsymbol{C}(U^0)$ mit $\varphi_x(a) = \langle x, a\rangle$ und $x \in E$ zugeordnet sind. Dann erhält man für jede beschränkte Linearform $b \in F'$ durch den Ansatz

$$\langle \hat{\varphi}_x, \beta_0\rangle = \langle Tx, b\rangle$$

auf $\boldsymbol{E}_p(U^0, \mu)$ eine Linearform β_0 mit

$$|\langle \hat{\varphi}_x, \beta_0\rangle| \leqslant \|Tx\|\,\|b\| \leqslant \boldsymbol{\pi}_p(T)\Big\{\int_{U^0} |\varphi_x(a)|^p d\mu\Big\}^{1/p}\|b\|,$$

die sich unter Beibehaltung ihrer Norm zu einer Linearform β auf $\boldsymbol{L}_p(U^0, \mu)$ fortsetzen läßt. Deshalb gibt es in dem dualen Raum $\boldsymbol{L}_{p^*}(U^0, \mu)$ mit $1/p + 1/p^* = 1$ eine Funktionenrestklasse $\hat{f}$ mit

$$\langle Tx, b\rangle = \int_{U^0} \langle x, a\rangle f(a)\,d\mu \quad \text{für} \quad x \in E$$

und

$$\Big\{\int_{U^0} |f(a)|^{p^*} d\mu\Big\}^{1/p^*} \leqslant \boldsymbol{\pi}_p(T)\|b\|.$$

Bestimmt man die Zahl r^* aus der Identität $1/r + 1/r^* = 1$, so ergibt sich auf Grund der Hölderschen Ungleichung die Beziehung [5]

$$\begin{aligned}|\langle Tx, b\rangle| &\leqslant \int_{U^0} |\langle x, a\rangle|\,|f(a)|\,d\mu \\ &\leqslant \int_{U^0} |\langle x, a\rangle|^{r/p}|\langle x, a\rangle|^{r/q}|f(a)|^{p^*/q}|f(a)|^{p^*/r^*}d\mu \\ &\leqslant \Big\{\int_{U^0} |\langle x, a\rangle|^r d\mu\Big\}^{1/p}\Big\{\int_{U^0} |\langle x, a\rangle|^r |f(a)|^{p^*} d\mu\Big\}^{1/q}\Big\{\int_{U^0} |f(a)|^{p^*} d\mu\Big\}^{1/r^*}.\end{aligned}$$

[5] Im Falle $r = 1$ entfällt der dritte Faktor.

Wir betrachten nun endlich viele Elemente $x_1, \ldots, x_k \in E$ und setzen

$$x_i^0 = \Big\{\int_{U^0} |\langle x_i, a\rangle|^r d\mu\Big\}^{-1/p} x_i.$$

Dann besteht wegen

$$|\langle Tx_i^0, b\rangle|^q \leqslant \int_{U^0} |\langle x_i, a\rangle|^r |f(a)|^{p^*} d\mu \Big\{\int_{U^0} |f(a)|^{p^*} d\mu\Big\}^{q/r^*}$$

die Ungleichung

$$\Big\{\sum_{i=1}^k |\langle Tx_i^0, b\rangle|^q\Big\}^{1/q} \leqslant \sup_{\|a\|\leqslant 1}\Big\{\sum_{i=1}^k |\langle x_i, a\rangle|^r\Big\}^{1/q}\Big\{\int_{U^0} |f(a)|^{p^*} d\mu\Big\}^{1/p^*}.$$

Weil die Abbildung S absolut q-summierend sein soll, ergibt sich die Abschätzung

$$\Big\{\sum_{i=1}^k \|STx_i^0\|^q\Big\}^{1/q} \leqslant \boldsymbol{\pi}_q(S)\boldsymbol{\pi}_q(T)\sup_{\|a\|\leqslant 1}\Big\{\sum_{i=1}^k |\langle x_i, a\rangle|^r\Big\}^{1/q},$$

aus der man abschließend unter Verwendung der Hölderschen Ungleichung

$$\Big\{\sum_{i=1}^k \|STx_i\|^r\Big\}^{1/r} \leqslant \Big\{\sum_{i=1}^k \|STx_i^0\|^q\Big\}^{1/q}\Big\{\sum_{i=1}^k \int_{U^0} |\langle x_i, a\rangle|^r d\mu\Big\}^{1/p}$$

die Beziehung

$$\Big\{\sum_{i=1}^k \|STx_i\|^r\Big\}^{1/r} \leqslant \boldsymbol{\pi}_q(S)\boldsymbol{\pi}_p(T)\sup_{\|a\|\leqslant 1}\Big\{\sum_{i=1}^k |\langle x_i, a\rangle|^r\Big\}^{1/r}$$

erhält. Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

THEOREM 5. *Unter der Voraussetzung*

$$1/p + 1/q \geqslant 1$$

folgt aus $T \in \boldsymbol{\Pi}_p(E, F)$ *und* $S \in \boldsymbol{\Pi}_q(F, G)$ *stets* $ST \in \boldsymbol{\Pi}_1(E, G)$, *und es gilt*

$$\boldsymbol{\pi}_1(ST) \leqslant \boldsymbol{\pi}_q(S)\boldsymbol{\pi}_p(T).$$

Beweis. Im Falle $p = 1$ ist unsere Behauptung trivial, weil sie sich unmittelbar aus Satz 4 ergibt. Hat man aber $p > 1$, so erhält man aus den Beziehungen

$$1/p + 1/q \geqslant 1 \quad \text{und} \quad 1/p + 1/p^* = 1$$

die Ungleichung

$$1 \leqslant q \leqslant p^* < +\infty.$$

Wegen Satz 5 ist dann aber S eine absolut p^*-summierende Abbildung mit $\boldsymbol{\pi}_{p^*}(S) \leqslant \boldsymbol{\pi}_q(S)$. Auf Grund von Theorem 4 muß deshalb das Produkt ST eine absolut 1-summierende Abbildung mit

$$\boldsymbol{\pi}_1(ST) \leqslant \boldsymbol{\pi}_{p^*}(S)\boldsymbol{\pi}_p(T) \leqslant \boldsymbol{\pi}_q(S)\boldsymbol{\pi}_p(T)$$

sein.

Als unmittelbare Folgerung aus den vorangehenden Theoremen ergibt sich der fundamentale

Satz 19. *Das Produkt von n absolut p-summierenden Abbildungen ist für $nq \geqslant p$ absolut q-summierend.*

Aus Satz 16 erhält man unter Verwendung der in [8], Abschnitt 3.3, benutzten Methoden

Theorem 6. *Das Produkt ST von zwei absolut 2-summierenden Abbildungen $T \in \boldsymbol{\Pi}_2(E, F)$ und $S \in \boldsymbol{\Pi}_2(F, G)$ ist nuklear, und es gilt*

$$\boldsymbol{\nu}(ST) \leqslant \boldsymbol{\pi}_2(S)\boldsymbol{\pi}_2(T).$$

7. Verallgemeinerte Hilbert-Schmidt-Abbildungen. Die Theoreme 1 und 6 zeigen, daß die absolut 2-summierenden Abbildungen eine sehr natürliche Verallgemeinerung der Hilbert-Schmidt-Abbildungen sind. Diese Feststellung wird noch durch die Tatsache untermauert, daß sich auch das Spektralverhalten der Hilbert-Schmidt-Abbildungen auf die absolut 2-summierenden Abbildungen überträgt. Für sie gilt u.a. nach Satz 16 und [11], Theorem 6, eine Fredholmsche Determinantentheorie.

Da jedoch die duale Abbildung einer absolut 2-summierenden Abbildung im allgemeinen nicht wieder absolut 2-summierend ist, erhebt sich die Frage, ob es eventuell doch noch eine bessere Verallgemeinerung der Hilbert-Schmidt-Abbildung gibt.

Abschließend bemerken wir, daß die von Saphar [13] eingeführten *Links-Hilbert-Schmidt-Abbildungen* absolut 2-summierend sind.

8. Das verallgemeinerte Dvoretzky-Rogers-Theorem. Eine Folge $[x_i]$ von Elementen eines normierten Raumes E heißt *absolut p-summierbar*, wenn die Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^p < +\infty$$

besteht. Auf dem linearen Raum $\boldsymbol{l}^p\{E\}$ aller derartigen Folgen erhält man durch den Ansatz

$$\boldsymbol{\pi}_p[x_i] = \Big\{\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^p\Big\}^{1/p}$$

eine Norm.

Eine Folge $[x_i]$ von Elementen eines normierten Raumes E heißt *(schwach) p-summierbar*, wenn für alle beschränkten Linearformen $a \in E'$ die Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle x_i, a\rangle|^p < +\infty$$

besteht. Auf dem linearen Raum $\boldsymbol{l}^p(E)$ aller derartigen Folgen erhält man durch den Ansatz

$$\boldsymbol{\epsilon}_p[x_i] = \sup_{\|a\|\leqslant 1}\Big\{\sum_{i=1}^{\infty} |\langle x_i, a\rangle|^p\Big\}^{1/p}$$

eine Norm.

Jede absolut p-summierbare Folge $[x_i]$ ist auch p-summierbar, und es gilt die Beziehung $\boldsymbol{\epsilon}_p[x_i] \leqslant \boldsymbol{\pi}_p[x_i]$.

Theorem 7. *Eine lineare Abbildung T von einem normierten Raum E in einen normierten Raum F ist dann und nur dann absolut p-summierend, wenn sie jede p-summierbare Folge $[x_i]$ in eine absolut p-summierbare Folge $[Tx_i]$ überführt.*

Notwendigkeit. Wenn die Abbildung T absolut p-summierend ist, gilt für jede p-summierbare Folge $[x_i]$ und $k = 1, 2, \ldots$ die Abschätzung

$$\Big\{\sum_{i=1}^{k} \|Tx_i\|^p\Big\}^{1/p} \leqslant \boldsymbol{\pi}_p(T) \sup_{\|a\|\leqslant 1}\Big\{\sum_{i=1}^{k} |\langle x_i, a\rangle|^p\Big\}^{1/p} \leqslant \boldsymbol{\pi}_p(T)\boldsymbol{\epsilon}_p[x_i].$$

Deshalb ist die Bildfolge $[Tx_i]$ absolut p-summierbar, und man hat

$$\boldsymbol{\pi}_p[Tx_i] \leqslant \boldsymbol{\pi}_p(T)\boldsymbol{\epsilon}_p[x_i] \quad \text{für} \quad [x_i] \in \boldsymbol{l}^p(E).$$

Hinlänglichkeit. Wir betrachten eine lineare Abbildung T, die alle p-summierbaren Folgen $[x_i]$ in absolut p-summierbare Folgen $[Tx_i]$ überführt, und nehmen an, daß sie nicht absolut p-summierend ist. Dann gibt es zu jeder natürlichen Zahl j ein endliches System $x_1^{[j]}, \ldots, x_{k_j}^{[j]}$ von Elementen aus E mit

$$\sup_{\|a\|\leqslant 1}\Big\{\sum_{i=1}^{k_j} |\langle x_i^{[j]}, a\rangle|^p\Big\}^{1/p} \leqslant 1$$

und

$$\Big\{\sum_{i=1}^{k_j} \|Tx_i^{[j]}\|^p\Big\}^{1/p} \geqslant 2^j.$$

Nun folgt aus der Ungleichung

$$\Big\{\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{k_j} |\langle 2^{-j}x_i^{[j]}, a\rangle|^p\Big\}^{1/p} \leqslant \|a\|,$$

daß die auf eine beliebige Art angeordnete Folge der Elemente $2^{-j}x_i^{[j]}$ $(i = 1, \ldots, k_j; j = 1, 2, \ldots)$ p-summierbar ist. Sie müßte deshalb durch die Abbildung T in eine absolut p-summierbare Folge überführt werden. Das ist aber auf Grund der Beziehung

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{k_j} \|2^{-j}Tx_i^{[j]}\|^p = +\infty$$

unmöglich.

Bemerkung. Die vorangehenden Betrachtungen zeigen, daß eine lineare Abbildung T von E in F dann und nur dann absolut p-summierend ist, wenn durch die Zuordnung

$$[x_i] \to [Tx_i]$$

eine beschränkte lineare Abbildung $\boldsymbol{T}$ von $\boldsymbol{l}^p(E)$ in $\boldsymbol{l}^p\{F\}$ definiert wird. Deshalb stimmt $\boldsymbol{\pi}_p(T)$ mit der gewöhnlichen Norm von $\boldsymbol{T}$ überein, und man kann $\boldsymbol{\Pi}_p(E, F)$ als Teilraum von $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{l}^p(E), \boldsymbol{l}^p\{F\})$ auffassen.

Als Anwendung der Theorie der absolut p-summierenden Abbildungen ergibt sich nun das bereits von Grothendieck [4], S. 101, Cor. 2, bewiesene verallgemeinerte

DVORETZKY-ROGERS-THEOREM 8. *Jeder normierte Raum E, in dem alle p-summierbaren Folgen sogar absolut p-summierbar sind, ist endlichdimensional.*

Beweis 1. Aus unserer Voraussetzung folgt, daß die identische Abbildung I in dem betrachteten normierten Raum E absolut p-summierend ist. Wählt man die natürliche Zahl n so, daß $2n \geqslant p$ gilt, dann ergibt sich wegen $I = I^n$ aus Satz 15 in Verbindung mit Satz 5, daß I eine absolut 2-summierende Abbildung sein muß. Folglich gibt es auf der abgeschlossenen Einheitskugel U^0 von E' ein normiertes positives Radonsches Maß μ, für das mit einer positiven Zahl ϱ die Ungleichung

$$\|x\| \leqslant \varrho \Big\{ \int_{U^0} |\langle x, a\rangle|^2 d\mu \Big\}^{1/2}$$

besteht. Deshalb erhält man auf E durch den Ansatz

$$|x| = \Big\{ \int_{U^0} |\langle x, a\rangle|^2 d\mu \Big\}^{1/2}$$

eine äquivalente Norm, die sich aus dem Skalarprodukt

$$(x, y) = \int_{U^0} \langle x, a\rangle \overline{\langle y, a\rangle}\, d\mu$$

erzeugen läßt.

Nimmt man an, daß der normierte Raum E unendlichdimensional ist, so existiert eine orthonormale Folge $[e_i]$, die auf Grund der Besselschen Ungleichung 2-summierend sein müßte. Das kann aber nicht sein, weil sich dann die falsche Aussage

$$\sum_{=1}^{\infty} |e_i|^2 < +\infty$$

ergibt.

Beweis 2 [6]. Aus unserer Voraussetzung folgt, daß die identische Abbildung I in dem betrachteten normierten Raum E absolut-p-summierend ist. Da diese Eigenschaft beim Übergang zu der vollständigen Hülle erhalten bleibt, kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß E ein Banachraum sein soll. Dann ist aber die abgeschlossene Einheitskugel $U = I(U)$ nach Satz 17 schwach kompakt. Weil alle schwach kompakten Teilmengen eines Banachraumes auch schwach folgenkompakt sind (vgl. [5], S. 314), kann man aus jeder in U liegenden Folge eine schwach konvergente Teilfolge aussondern. Diese Folge wird aber nach Satz 14 durch die identische Abbildung in eine konvergente Folge übergeführt. Folglich ist die abgeschlossene Einheitskugel U kompakt, und der betrachtete Banachraum E muß endlichdimensional sein (vgl. [5], S. 159).

9. Nukleare lokalkonvexe Räume. Abschließend zeigen wir, wie sich die absolut p-summierenden Abbildungen in der Theorie der nuklearen lokalkonvexen Räume verwenden lassen. Dabei benutzen wir die Bezeichnungen aus [8].

Als erstes sei bemerkt, daß man unter Verwendung von Satz 16 das folgende Kriterium erhält:

THEOREM 9. *Ein lokalkonvexer Raum E ist dann und nur dann nuklear, wenn für eine (jede) Zahl $p \geqslant 1$ die folgende Aussage gilt: Zu jeder Nullumgebung $U \in \boldsymbol{U}(E)$ gibt es eine Nullumgebung $V \in \boldsymbol{U}(E)$ mit $V \precsim U$, so daß die kanonische Abbildung von $E(V)$ auf $E(U)$ absolut p-summierend ist.*

Werden für einen lokalkonvexen Raum E die lokalkonvexen Folgenräume $\boldsymbol{l}^p(E)$ und $\boldsymbol{l}^p\{E\}$ gebildet, die aus allen (schwach) p-summierbaren bzw. absolut p-summierbaren Folgen von Elementen aus E bestehen, und deren Topologie aus den Halbnormen

$$\boldsymbol{\epsilon}_{U,p}[x_i] = \sup_{a \in U^0} \Big\{ \sum_{i=1}^{\infty} |\langle x_i, a\rangle|^p \Big\}^{1/p}$$

bzw.

$$\boldsymbol{\pi}_{U,p}[x_i] = \Big\{ \sum_{i=1}^{\infty} p_U(x_i)^p \Big\}^{1/p}$$

erzeugt wird, so gilt

THEOREM 10. *Ein lokalkonvexer Raum E ist dann und nur dann nuklear, wenn für eine (jede) Zahl $p \geqslant 1$ die mengentheoretische und topolo-*

(6) Dieser Beweis stammt von Herrn Pełczyński.

gische Identität

$$l^p\{E\} \equiv l^p(E)$$

besteht.

Im Falle eines metrischen lokalkonvexen Raumes kann man zeigen, daß aus der mengentheoretischen Identität automatisch die topologische folgt.

10. Nukleare Funktionenräume. Die auf einer offenen Menge G des n-dimensionalen euklidischen Raumes definierten stetigen Funktionen φ bilden einen vollständigen und metrischen lokalkonvexen Raum $C(G)$, dessen Topologie aus den Halbnormen

$$q_K(\varphi) = \sup_{t\in K} |\varphi(t)|$$

gewonnen wird. Dabei soll K alle kompakten Teilmengen von G durchlaufen.

Wir geben nun eine Charakterisierung der nuklearen Teilräume von $C(G)$ an.

THEOREM 11. *Ein linearer Teilraum von $C(G)$ ist dann und nur dann nuklear, wenn es auf G ein positives Radonsches Maß μ gibt, so daß sich seine Topologie für eine feste Zahl $p \geqslant 1$ aus den Halbnormen*

$$p_K(\varphi) = \Big\{\int_K |\varphi(t)|^p \, d\mu\Big\}^{1/p}$$

erzeugen läßt.

Beweis. Die Notwendigkeit der angegebenen Bedingung wurde bereits in [10] bewiesen. Ihre Hinlänglichkeit ergibt sich unmittelbar aus Theorem 7 und der Verallgemeinerung von Satz 6.

Literaturnachweis

[1] I. Amemiya and K. Shiga, *On tensor products of Banach spaces*, Kodai Math. Sem. Reports 9 (1957), S. 161-178.

[2] N. Bourbaki, *Intégration*, Paris 1952.

[3] A. Dvoretzky and C. A. Rogers, *Absolute and unconditional convergence in normed linear spaces*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 36 (1950), S. 192-197.

[4] A. Grothendieck, *Sur certaines classes de suites dans les espaces de Banach et le théorème de Dvoretzky-Rogers*, Boletim Soc. Mat. São Paulo 8 (1956), S. 81-110.

[5] G. Köthe, *Topologische lineare Räume I*, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1960.

[6] K. Maurin, *Abbildungen vom Hilbert-Schmidtschen Typus und ihre Anwendungen*, Math. Scand. 9 (1961), S. 359-371.

[7] A. Pietsch, *Absolut summierende Abbildungen in lokalkonvexen Räumen*, Math. Nachr. 27 (1963), S. 77-103.

[8] — *Nukleare lokalkonvexe Räume*, Berlin 1965.

[9] — *Quasinukleare Abbildungen in normierten Räumen*, Math. Ann. 165 (1966) S. 79-90.

[10] — *Nukleare Funktionenräumen*, Math. Nachr. 33 (1967), S. 377-384.

[11] — *Zur Fredholmschen Theorie in lokalkonvexen Räumen*, Studia Math. 22 (1963), S. 161-179.

[12] V. Pták, *On a theorem of Mazur and Orlicz*, ibidem 15 (1956), S. 365-366.

[13] P. Saphar, *Applications à puissance nucléaires et applications de Hilbert-Schmidt dans les espaces de Banach*, C. R. Acad. Sci. Paris 261 (1965), S. 867-870.

[14] R. Schatten, *Norm ideals of completely continuous operators*, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1960.

[15] S. L. Sobolew, *Einige Anwendungen der Funktionalanalysis auf Gleichungen der mathematischen Physik*, Berlin 1964.

[16] A. Pełczyński, *A characterization of Hilbert-Schmidt operators*, Studia Math. 28 (1967), S. 355-360.

Reçu par la Rédaction le 12. 8. 1966