element of X_∞ and $Q(X_\infty, \emptyset)$ is a two-point discrete space. Thus, in this case the objects

$$\lim^{\leftarrow} Q(X_s, A_s) \quad \text{and} \quad Q\big(\lim^{\leftarrow}(X_s, A_s)\big)$$

are not isomorphic.

References

[1] R. G. Bartle, *On compactness in functional analysis*, Trans. Amer. Math. Soc. 79 (1955), p. 35-57.

[2] S. Eilenberg and N. Steenrod, *Foundations of algebraic topology*, Princeton 1952.

[3] B. Mitchell, *Theory of categories*, New York 1965.

[4] A. Pełczyński, *Linear extensions, linear averagings, and their applications to linear topological classification of spaces of continuous functions*, Rozprawy Mat. 58 (1968).

[5] Z. Semadeni, *Categorical methods in convexity*, Proc. Colloq. on Convexity, Copenhagen 1965 (1967), p. 281-307.

[6] — *Categorical approach to extension problems*, Proc. Symp. Extension of Topol. Structures, Berlin 1967 (in print).

[7] — *Banach spaces of continuous functions* (in print).

[8] — and H. Zidenberg, *Inductive and inverse limits in the category of Banach spaces*, Bull. Acad. Pol. Sci. 13 (1965), p. 579-583.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUTE OF MATHEMATICS OF THE POLISH ACADEMY OF SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 22. 3. 1968

STUDIA MATHEMATICA, T. XXXI. (1968)

О разложении унитарного представления комплексной полупростой группы Ли на ее неприводимые представления

М. А. НАЙМАРК (Москва)

1. Введение. Пусть G — топологическая группа со счетной базой окрестностей. Как известно (см. напр. [13], гл. VIII) каждое непрерывное унитарное представление $g \to V_g$ группы в сепарабельном гильбертовом пространстве H разлагается в прямой интеграл ее неприводимых представлений. С другой стороны, фактическое разложение на неприводимые представления заданного унитарного представления может представить значительные трудности. Для связной комплексной полупростой группы Ли G Гельфанд и Граев [1] разработали весьма общий метод фактического получения подобного разложения, который в ряде интересных случаев (например, в случае тензорного произведения двух представлений основной невырожденной серии) довольно просто приводит к цели. С другой стороны, в ряде других интересных случаев (например, в случае тензорного произведения неприводимых представлений других серий (¹)) этот метод наталкивается пока на существенные трудности.

В настоящей статье мы предлагаем другой метод фактического разложения на неприводимые представления также для случая связной комплексной полупростой группы Ли G. В этом методе использована конструкция, предложенная ранее автором [11] для описания неприводимых унитарных представлений группы G и развитая далее Желобенко и автором [9] (см. также Желобенко [6]-[8]) для получения описания всех вполне неприводимых (унитарных и неунитарных) представлений этой группы. В следующих сообщениях излагаемый здесь метод будет перенесен на некоторые неунитарные представления, а также будут даны приложения этого метода к конкретным представлениям.

2. Некоторые вспомогательные сведения. Всюду в дальнейшем G обозначает связную комплексную полупростую группу Ли, r — ее ранг, U — ее максимальную компактную подгруппу, H — сепара-

(¹) Для $GL(2, C)$ этот и вообще все случаи разобраны в статьях автора [12].

бельное гильбертово пространство. Пусть $g \to V_g$ (кратко V)—непрерывное унитарное представление группы G в H и пусть $u \to c^m(u)$—неприводимое представление группы U, $m = (m_1, m_2, \ldots, m_r)$—его вес, r_m—его размерность, $c^m_{je}(u)$—матричные элементы представления $u \to c^m(u)$ в ортонормированном базисе из его весовых векторов.

Положим

$$P^m_{je} = r_m \int \overline{c^m_{je}(u)}\, V_u du, \tag{2.1}$$

где мера Хаара на U нормирована условием $\int du = 1$,

$$P^m = \sum_j P^m_{jj}, \quad M^m_j = P^m_{jj} H, \quad M^m = P^m H. \tag{2.2}$$

Тогда P^m_{jj}—проекторы,

$$P^m_{jj} P^{m'}_{j'j'} = \begin{cases} 0 & \text{при } m' \neq m \text{ при } j' \neq j, \\ P^m_{jj} & \text{при } m' = m \text{ и } j' = j; \end{cases} \tag{2.3}$$

$$P^m P^{m'} = \begin{cases} 0 & \text{при } m' \neq m, \\ P^m & \text{при } m' = m; \end{cases} \tag{2.4}$$

$$M^m = \sum_j \oplus M^m_j, \quad \sum_m \oplus M^m = H; \tag{2.5}$$

эти утверждения легко следуют из соотношений ортогональности для $c^m_{je}(u)$ и их полноты в $L^2(U)$ (подробные доказательства см. в [11]).

Из (2.5) следует, что

$$\sum_{mj} P^m_{jj} = \sum_m P^m = 1. \tag{2.6}$$

Кроме того:

I. *Представление $u \to c^m(u)$ тогда и только тогда содержится в представлении V, когда $M^m \neq (0)$ и в этом случае M^m есть инвариантное подпространство представления $u \to V_u$, на котором сужение $u \to V^{(m)}_u$ этого представления кратно представлению $u \to c^m(u)$ и M^m содержит каждое другое инвариантное подпространство, обладающее этим свойством.*

II. *Если $M^m \neq (0)$, то $\sum_{\tau_j = \tau} \oplus M^m_j$ есть подпространство, состоящее из нуля и всех весовых векторов представления $u \to V^{(m)}_u$ веса τ, где τ_j—вес j-ого весового базисного вектора в пространстве представления $u \to c^m(u)$.*

Доказательства этих утверждений см. в [11]; см. также [10]. Упорядочим теперь веса m как обычно, лексикографически и положим для данного представления $g \to V_g$

$$k = k_v = \min\{m \colon M^{(m)} \neq (0)\}. \tag{2.7}$$

Пусть j_k—тот индекс j для которого $\tau_{jk} = k$; такой индекс существует и только один, так как в пространстве неприводимого представления $u \to c^k(u)$ имеется только один с точностью до множителя вектор веса k.

Положим

$$M^{[k]} = M^k_{j_k} \quad \text{и} \quad P^{[k]} = P_{j_k j_k}; \tag{2.8}$$

Очевидно, $P^{[k]}$—проектор на $M^{[k]}$. Будем писать $M^m_v, P^m_v, M^{[k]}_v, P^{[k]}_v$ если надо будет подчеркнуть, что они построены для V.

3. Критерий неприводимости. Сохраним обозначения п. 2 и обозначим еще через $X = X(G)$ алгебру всех бесконечно дифференцируемых функций $x(g)$ на G с умножением-сверткой, инволюцией $x \to x^*$, где $x^*(g) = \overline{x(g^{-1})}$ и с топологией Шварца; $X(G)$ будем называть *групповой алгеброй* группы G. Для $x \in X$ положим

$$V_x = \int x(g) V_g dg, \tag{3.1}$$

где dg—дифференциал меры Хаара на G. Тогда $x \to V_x$ симметричное (т.е. $V_{x^*} = (V_x)^*$) представление алгебры X.

Теорема I. *Унитарное представление V группы G неприводимо тогда и только тогда, когда для него выполнены следующие условия:*

1. *$M^{[k]}$ одномерно;*
2. *$\{V_x M^{[k]}, x \in X\}$ плотно в H.*

Доказательство. Необходимость условия 1 следует из [9] (см. также [11]), а условие 2 очевидно. Обратно, пусть эти условия выполнены и пусть M'—подпространство в H, инвариантное относительно всех V_g, $g \in G$. Тогда $M'' = H \ominus M'$ также инвариантно относительно всех V_g, $g \in G$. Пусть V', V''—сужения представления V на M' и M'' соответственно, а M'^m_j, M''^m_j—соответствующие подпространства M^m_j. Очевидно

$$M^m_j = M'^m_j \oplus M''^m_j \tag{3.2}$$

и

$$M'^m = M^m \cap M', \quad M''^m_j = M^m \cap M''_j. \tag{3.3}$$

Так как $M^{[k]}$ одномерно, то либо каждое из $M^{[k]} \cap M'$, $M^{[k]} \cap M'' = (0)$, либо хотя бы одно из них совпадает с $M^{[k]}$. Но во втором случае $M^{[k]} \subset M'$ или $M^{[k]} \subset M''$, а отсюда, в силу условия 2, $M' = H$, или $M'' = H$. Докажем, что первый случай невозможен; этим будет доказана неприводимость представления. Но в первом случае из (3.3) при $m = k$, $j = j_k$ следует, что $M'^k_{j_k} = M^k_{j_k} \cap M' = M^{[k]} \cap M' = (0)$ и аналогично $M''^k_{j_k} = (0)$. Отсюда в силу (3.2) при $m = k$, $j = j_k$: $M^{[k]} = (0)$, что невозможно.

Замечание I. Условия 1 и 2 достаточны для неприводимости, если а) G—топологическая группа, б) U—компактная подгруппа группы G, являющаяся компактной группой Ли. Действительно, в доказательстве достаточности были использованы только свойства а) и б).

Замечание 2. Условия 1 и 2 достаточны для неприводимости и в том случае, когда они выполняются для некоторого фиксированного веса $m = m'$ вместо k. Это непосредственно видно из доказательства.

4. Однородные представления; разложение в прямую сумму однородных представлений. Пусть V унитарное представление группы G в пространстве H и пусть задано разложение представления V в прямой интеграл неприводимых представлений $V(t)$, определенный пространством с σ-конечной мерой (T, μ), так что

$$(4.1)\qquad H = \int H(t)\,d\mu, \qquad V_g = \{V_g(t)\},$$

где интеграл берется по T. Второе равенство (4.1) означает, что

$$(4.2)\qquad V_g\{\xi(t)\} = \{V_g(t)\,\xi(t)\},$$

для $\{\xi(t)\}\in H$ и $V_g(t)$ μ-измеримая операторная функция от t при каждом $g\in G$. В этом случае для $x\in X$

$$(4.3)\qquad V_x = \{V_x(t)\}, \qquad P_{jl}^m = \{P_{jl}^m(t)\}, \qquad P^m = \{P^m(t)\},$$

где

$$V_x(t) = \int x(g)\,V_g(t)\,dg, \qquad P_{jl}^m(t) = r_m \int \overline{c_{jl}^m(u)}\,V_u(t)\,du,$$

$$(4.4)\qquad P^m(t) = \sum_j P_{jj}(t)$$

(см. [5], 18.7.4).

Обозначим через $k(t)$ вес k (см. (2.3)) для представления $V(t)$. Положим

$$(4.5)\qquad T_k = \{t\colon\ k(t) = k\};$$

тогда

$$(4.6)\qquad T = \bigcup_k T_k.$$

I. *Каждое T_k μ-измеримо.*

Доказательство. Положим $S_m = \{t : P^m(t) \neq 0\}$; S_m μ-измеримо, ибо $P^m(t)$ μ-измеримо. С другой стороны,

$$(4.7)\qquad T_k = \bigcap_{m<k} (T\setminus S_m) \cap S_k$$

и потому T_k — также μ-измеримо.

Унитарное представление V группы G называется *однородным веса k*, если в его разложении (4.1) $k(t) = \mathrm{const} = k$. Так как G — группа типа I (см. напр. [3], § 1), то это определение не зависит от способа разложения V на неприводимые представления (см. напр. [5], 8.6). Из [5], 8.6, следует также, что

II. *Всякое сужение на инвариантном подпространстве однородного представления веса k есть также однородное представление веса k.*

Далее

III. *Всякое унитарное представление $g\to V_g$ группы G есть дискретная ортогональная сумма однородных представлений.*

Доказательство. Положим

$$(4.8)\qquad H_k = \int_{T_k} H(t)\,d\mu.$$

Это законно ибо T_k μ-измеримо в силу 1. Тогда в силу (4.6)

$$(4.9)\qquad H = \sum_k \oplus H_k.$$

Очевидно, каждое H_k инвариантно относительно V и, по самому определению множества T_k (см. 4.5) сужение $V^{(k)}$ представления V на H_k однородно веса k.

С другой стороны, если уже задано разложение представления V в дискретную ортогональную сумму однородных представлений $V^{(k)}$ (во многих конкретных случаях такое разложение не трудно произвести), то задача сводится к нахождению разложения каждого однородного представления $V^{(k)}$ в прямой интеграл неприводимых представлений. Действительно, пусть дано разложение

$$(4.10)\qquad H_k = \int_{T_k} H(t)\,d\mu_k, \qquad V_g^{(k)} = \{V_g^{(k)}(t)\},$$

где $V_g^{(k)}(t)$ неприводимы. Положим $T = \bigcup_k T_k$ и $\mu(\Delta) = \sum \mu_k(\Delta \cap T_k)$ (множество $\Delta\in T$ считается μ-измеримым, если каждое $\Delta\cap T_k$ μ_k-измеримо) и $V_g(t) = V_g^{(k)}(t)$ при $t\in T_k$. Мы получим тогда разложение

$$H = \int_T H(t)\,d\mu, \qquad V_g = \{V_g(t)\}$$

исходного представления в прямой интеграл неприводимых представлений.

5. Разложение однородного представления. Пусть V — однородное унитарное представление группы G веса k, так что при его разложении вида (4.1) $k(t) = k$. Определим операторы $x \to e^m_{je} x$, $x \to x e^m_{je}$ в X по формулам

$$(e^m_{je} x)(g) = rm \int \overline{c^m_{je}(u)}\, x(u^{-1} g)\, du, \qquad (x e^m_{je})(g) = rm \int c^m_{ej}(k)(gu)\, du. \tag{5.1}$$

Тогда (см. [11])

$$(e^m_{je} x) e^{m'}_{pq} = e^m_{je}(x e^{m'}_{pq}), \tag{5.2}$$

$$P^m_{je} V_x = V_{e^m_{je} x}, \qquad V_x P^m_{je} = V_{x e^m_{je}}. \tag{5.3}$$

Поэтому, положив

$$e^m = \sum_j e^m_{jj}, \tag{5.4}$$

получим

$$P^m V_x = V_{e^m x}, \qquad V_x P^m = V_{x e^m}. \tag{5.5}$$

Положим $e^{[k]} = e^k_{j_k j_k}$ (см. п. 2 и (5.1)) и

$$X_k = \{x\colon\, x \in X;\ e^{[k]} x = x e^{[k]} = x\}. \tag{5.6}$$

Тогда X_k — замкнутая симметричная подалгебра алгебры X и в силу (5.5) для $x \in X_k$

$$V_x = V_{x e^{[k]}} = V_x P^{[k]}, \qquad V_x = V_{e^{[k]} x} = P^{[k]} V_x \tag{5.7}$$

и потому

$$V_x = 0 \quad \text{на} \quad M^{[k]\perp}, \tag{5.8}$$

$$V_x M^{[k]} \subset M^{[k]}. \tag{5.9}$$

Пусть $A^{[k]}_x$ — сужение оператора V_x на $M^{[k]}$. Тогда $x \to A^{[k]}_x$ непрерывное симметричное представление алгебры X_k в пространстве $M^{[k]}$; мы назовем его, а также алгебру $\mathfrak{A}^{[k]} = \{A^{[k]}_x, x \in X_k\}$, *ассоциированными* с исходным представлением V (или $x \to V_x$, $x \in X$). Иногда мы будем писать $\mathfrak{A}^{[k]}_v$ вместо $\mathfrak{A}^{[k]}$. Очевидно, $\mathfrak{A}^{[k]}$ симметрична, т.е. из $A \in \mathfrak{A}^{[k]}$ следует $A^* \in \mathfrak{A}^{[k]}$. Положим далее

$$X_{mk} = \{x\colon\, e^m x = x e^{[k]} = x\}, \tag{5.10}$$

$$X_{km} = \{x\colon\, e^{[k]} x = x e^m = x\} \tag{5.11}$$

и

$$I_k = \overline{\sum_{m<k} X_{km} X_{mk}}. \tag{5.12}$$

Тогда I_k — замкнутый двусторонний идеал в X_k.

I. *Если V однородно веса k, то ассоциированная алгебра $\mathfrak{A}^{[k]}$ коммутативна и $A^{[k]}_x = 0$ при $x \in I^{[k]}$.*

Доказательство. Из второго равенства (4.3) при $m = k$, $j = l = j_k$ следует, что

$$P^{[k]} = \{P^{[k]}(t)\} \tag{5.13}$$

и потому

$$M^{[k]} = \int M^{[k]}(t)\, d\mu. \tag{5.14}$$

Отсюда при $\xi = \{\xi(t)\} \in M^{[k]}$, $x \in X_k$,

$$A^{[k]}_x \xi = V_x \xi = \{V_x(t)\, \xi(t)\} = \{A^{[k]}_x(t)\, \xi(t)\}. \tag{5.15}$$

Но в силу теоремы 1 п. 3 каждое $M^{[k]}(t)$ одномерно, поэтому

$$A^{[k]}_x(t)\, \xi(t) = a_x(t)\, \xi(t), \tag{5.16}$$

где: (α) $a_x(t)$ — числовая функция, $a_x(t) \in L^\infty_\mu(T)$; (β) для μ-почти каждого $t \in T$ $x \to a_x(t)$ — одномерное симметричное представление алгебры X_k. Следовательно (5.15) перепишется в виде

$$A^{[k]}_x \xi = \{a_x(t)\, \xi(t)\}, \qquad A^{[k]}_x = \{a_x(t) 1\}. \tag{5.17}$$

Отсюда следует, что $\mathfrak{A}^{[k]}$ коммутативна. Кроме того, в силу (5.3) и (5.10)-(5.12), $a_x(t) = 0$ для $x \in I_k$ (см. также [9]); отсюда в силу (5.15) и (5.16) также $A^{[k]}_x = 0$ при $x \in I_k$. Одновременно мы видим, что:

II. *В случае однородного представления веса k разложение (5.14) диагонализирует алгебру $\mathfrak{A}^{[k]}$.*

Далее:

III. *В случае однородного представления веса k линейная оболочка всех $V_x \xi$, $\xi \in M^{[k]}$, $x \in X$, плотна в H.*

Доказательство. Положим $M = \{V_x \xi,\ \xi \in M^{[k]}\}^\perp$. Очевидно, M — инвариантное подпространство относительно всех V_x и $M \perp M^{[k]}$. Поэтому при $M \neq (0)$ сужение представления V на M разлагается на неприводимые представления веса $> k$, а это противоречит однородности представления V. Следовательно, $M = (0)$ и линейная оболочка всех $V_x \xi$, $\xi \in M^{[k]}$, $x \in X$, плотна в H.

Обратно:

IV. *Если для прямого интеграла $g \to V_g = \{V_g(t)\}$ ($H = \int H(t)\, d\mu$) неприводимых унитарных представлений $g \to V_g(t)$ в $H(t)$ линейная оболочка $\hat{M}$ всех $V_x \xi$, $\xi \in M^{[k]}$ плотна в H, то для μ-почти каждого $t \in T$ линейная оболочка всех $V_x(t)\, \xi(t)$, $\xi(t) \in M^{[k]}(t)$ плотна в $H(t)$.*

Доказательство. Пусть $M(t)$ и $\tilde{M}$ — замкнутые линейные оболочки множеств $\{V_x(t)\xi(t),\ \xi(t)\in M^{[k]}(t),\ x\in X\}$, $\{V_x\xi,\ \xi\in M^{[k]},\ x\in X\}$ соответственно и $\Delta = \{t: M(t)\neq H(t)\}$. По условию $\tilde{M} = H$. Положим $N(t) = H(t)\ominus M(t)$, $M = \int M(t)\,d\mu$ и

$$N = \int N(t)\,d\mu = \int_{\Delta} N(t)\,d\mu.$$

Очевидно, $M\perp N$, и если $\mu(\Delta)>0$, то $N\neq(0)$. С другой стороны, $\hat{M}\subset M$ и потому $\tilde{M}\subset M$, следовательно, $H=\tilde{M}\subset M\subset H\ominus N$, что невозможно, при $N\neq(0)$.

Пусть теперь снова $g\to V_g$ — однородное представление веса k. Так как $M^{[k]}(t)$ одномерны, то каждый элемент $\xi=\{\xi(t)\}$ задается формулой

$$\xi(t) = \lambda(t)\,\xi_0(t), \tag{5.18}$$

где $\xi_0=\{\xi_0(t)\}\in M^{[k]}$, $\xi_0(t)\in M^{[k]}(t)$, $\xi_0(t)\neq 0$ для μ-почти каждого $t\in T$, а $\lambda(t)$ — такая числовая μ-измеримая функция, что

$$\int |\lambda(t)|^2|\xi_0(t)|^2\,d\mu<\infty.$$

Поэтому для $\xi,\eta\in M^{[k]}$, $x,y\in X$, $\xi(t)=\lambda(t)\,\xi_0(t)$, $\eta(t)=\lambda_1(t)\,\xi_0(t)$,

$$(V_x\xi,\ V_y\eta) = (V_xP^{[k]}\xi,\ V_yP^{[k]}\eta) = (P^{[k]}V_{y^*}V_xP^{[k]}\xi,\ \eta) = (V_z\xi,\ \eta), \tag{5.19}$$

где $z=e^{[k]}y^*xe^{[k]}\in X_k$. Комбинируя (5.16) и (5.19) заключаем, что для $\xi,\eta\in M^{[k]}$, $x,y\in X$, $\xi=\{\lambda(t)\,\xi_0(t)\}$, $\eta=\{\lambda_1(t)\,\xi_0(t)\}$

$$(V_x\xi,\ V_y\eta) = \int a_z(t)\,\lambda(t)\,\overline{\lambda_1(t)}\big(\xi_0(t),\ \xi_0(t)\big)\,d\mu \qquad \text{при } z=e^{[k]}y^*xe^{[k]}. \tag{5.20}$$

Эти формулы приводят к следующей конструкции. Пусть V — унитарное представление группы G, для которого $M^m=0$ при $m<k$ и $\mathfrak{A}^{[k]}$ коммутативна. Отсюда сразу следует, что

$$A_x = 0 \qquad \text{для } x\in I_k. \tag{5.21}$$

Действительно, если $x\in X_{km}X_{mk}$ при $m<k$, то $x=yz$, где $y\in X_{km}$, $z\in X_{mk}$. В силу (5.10) и (5.11) $x=ye^mz$ и потому $Ax=Vx=VyP^mV_z=0$, ибо по условию $P^m=0$ при $m<k$. Отсюда и из (5.12) следует, что $A_x=0$ для $x\in I_k$.

Пусть $\bar{\mathfrak{A}}^{[k]}$ — алгебра операторов в $M^{[k]}$, полученная из $\mathfrak{A}^{[k]}$ замыканием по норме оператора и присоединением единичного оператора; тогда $\bar{\mathfrak{A}}^{[k]}$ — коммутативная симметричная банахова алгебра. Пусть $\mathscr{T}$ — пространство максимальных идеалов τ алгебры $\bar{\mathfrak{A}}^{[k]}$. Существует (см. напр. [4], гл. II, § 6) изометрическое отображение пространства $M^{[k]}$ на прямой интеграл $\tilde{M}=\int M(\tau)\,d\mu(\tau)$ по некоторой

регулярной борелевской мере, μ на $\mathscr{T}$, при котором операторы $A\in\bar{\mathfrak{A}}^{[k]}$ переходят в операторы $\tilde{A}$, где

$$\tilde{A}\{\xi(\tau)\} = \{A(\tau)\,\xi(\tau)\} \qquad \text{при } \{\xi(\tau)\}\in\tilde{M}$$

и где $A(\tau)$ значение A на идеале τ и совокупность всех $\{A(\tau)\}$, $A\in\bar{\mathfrak{A}}^{[k]}$ совпадает с $C(T)$. Для каждого $n=1,2,\ldots,\infty$ положим

$$\mathscr{T}_n = \{t:\ \dim M(\tau)=n\},\qquad T=\bigcup_n T_n,\quad \text{где } T_n=\mathscr{T}_n^{(1)}\cup\ldots\cup\mathscr{T}_n^{(n)} \tag{5.22}$$

и где $\mathscr{T}_n^{(1)},\ldots,\mathscr{T}_n^{(n)}$ — экземпляры одного и того же пространства $\mathscr{T}_n$. Отождествление $\mathscr{T}_n^{(j)}$ с $\mathscr{T}_n$ порождает n-краное отображение T_n на $\mathscr{T}_n$ и, следовательно, не более чем счетнократное отображение $\varphi\colon t\to\tau$ пространства T на $\mathscr{T}$.

Перенесем меру μ на T, считая множество $\Delta\subset T$ μ-измеримым тогда и только тогда, когда каждое $\varphi(\Delta\cap\mathscr{T}_n^{(j)})$ μ-измеримо и полагая

$$\mu(\Delta) = \sum_n\sum_j \mu\{\varphi(\Delta\cap T_n^{(j)})\}.$$

Тогда (T,μ) станет пространством с σ-конечной мерой μ. Пусть (при $n<\infty$) l_n^2 — подпространство в l^2 составленное из всех $\{\xi_1,\ldots,\xi_n,0,0,\ldots\}$, где $\xi_1,\ldots,\xi_n$ — произвольные комплексные числа и $l_\infty^2=l^2$. Не нарушая общности мы можем считать (см. [4], гл. II, § 1, Предложение 1), что

$$M(\tau) = l_n^2 \qquad \text{при } \tau\in\mathscr{T}_n. \tag{5.23}$$

Положим

$$\tilde{M}_n = \int_{\mathscr{T}_n} M(\tau)\,d\mu; \tag{5.24}$$

тогда

$$\tilde{M} = \sum_n \oplus\tilde{M}_n. \tag{5.25}$$

В силу (5.23) и (5.24) $\tilde{M}_n$ есть совокупность всех вектор функций $\{\tilde{\xi}_1(\tau),\ldots,\tilde{\xi}_n(\tau)\}$, $\tilde{\xi}_j(\tau)\in L_\mu^2(\tau_n)$, $j=1,\ldots,n$. Каждой такой вектор функции поставим в соответствие числовую функцию

$$\xi_n(t) = \tilde{\xi}_j\big(\varphi(t)\big) \qquad \text{при } t\in\mathscr{T}_n^{(j)},\quad j=1,\ldots,n.$$

Мы получим изометрическое отображение пространства $\tilde{M}_n$ на $L^2(T_n)$, при котором оператор $\tilde{A}$ переходит в оператор умножения на числовую функцию $\hat{A}(t)=A\big(\varphi(t)\big)$. С другой стороны, $L_\mu^2(T_n)$ можно рассматривать как прямой интеграл одномерных пространств $\hat{M}(t) = C$ (где C — поле комплексных чисел):

$$\text{(5.26)} \qquad L^2_\mu(T_n) = \int_{T_n} \hat{M}(t)\, d\mu.$$

В силу (5.24), (5.25) и (5.26) мы получаем тем самым изометрическое отображение пространства $M^{[k]}$ на

$$\hat{M} = \int_T \hat{M}(t)\, d\mu,$$

где $\hat{M}(t) = C$, при котором операторы $A \in \overline{\mathfrak{A}}^{[k]}$ переходят в операторы умножения на

$$\text{(5.27)} \qquad \hat{A}(t) = A(\varphi(t)).$$

Полученную реализацию алгебры $\overline{\mathfrak{A}}^{[k]}$ в пространстве $\hat{M}$ мы будем называть *стандартной*.

Для каждого $t \in T$ в стандартной реализации алгебры $\overline{\mathfrak{A}}^{[k]}$ определим линейный функционал $f_t(x)$ на X по формуле

$$\text{(5.28)} \qquad f_t(x) = \widehat{(P^{[k]} A^{[k]}_x P^{[k]})}(t) = \hat{A}^{[k]}_{e^{[k]}xe^{[k]}}(t).$$

Положим

$$\text{(5.29)} \qquad T^0 = \{t\colon f_t(x) \ \text{ не положителен}\}.$$

V. *T^0 μ-измеримо и $\mu(T^0) = 0$.*

Доказательство. Положим $T^0_{nj} = T^0 \cap \mathscr{T}^{(j)}_n$. Достаточно доказать, что каждое T^0_{nj} μ-измеримо и $\mu(T^0_{nj}) = 0$. Полагая $\varphi(T^0_{nj}) = \mathscr{T}^0_n$, мы видим, что утверждение сводится к равенству $\mu(\mathscr{T}^0_n) = 0$. Для его доказательства достаточно установить, что каждая точка $\tau_0 \in \mathscr{T}^0_n$ обладает такой окрестностью U_0, что $\mu(U_0 \cap \mathscr{T}_n) = 0$. Это следует из того, что $\overline{\mathfrak{A}}^{[k]}$ сепарабельна и потому $\mathscr{T}$ — пространство со счетной базой. В силу (5.28) и (5.27)

$$\text{(5.30)} \qquad f_t(x) = \tilde{f}_\tau(x) \quad \text{при } \tau = \varphi(t),$$

где

$$\text{(5.31)} \qquad \tilde{f}_\tau(x) = (P^{[k]} A^{[k]}_x P^{[k]})(\tau) = A^{[k]}_{e^{[k]}xe^{[k]}}(\tau).$$

Пусть $\tau_0 \in \mathscr{T}^0_n$. Тогда $\tau_0 = f(t_0)$, где $t_0 \in T^0_{nj} \subset T^0$; поэтому существует такой элемент $x_0 \in X$, что $\tilde{f}_{\tau_0}(x_0^* x_0) < 0$. В силу (5.31) функция $\tau \to \tilde{f}_\tau(x)$ непрерывна; следовательно существует такая окрестность U_0 точки τ_0, что

$$\text{(5.32)} \qquad \tilde{f}_\tau(x_0^* x_0) < 0 \quad \text{при } \tau \in U_0.$$

Положим

$$\text{(5.33)} \qquad x_1 = e^{[k]} x_0^* x_0 e^{[k]}.$$

Пусть U_{0nj} — прообраз $U_0 \cap \mathscr{T}_n$ при отображении $\varphi\colon \mathscr{T}^{(j)}_n \to \mathscr{T}_n$ и пусть ξ_0 — такой вектор из $M^{[k]}$, что при стандартной реализации $\xi_0 \to \{\xi_0(t)\}$

$$\text{(5.34)} \qquad \begin{aligned} &\xi_0(t) \neq 0 \quad \mu\text{-почти всюду на } U_{0nj},\\ &\xi_0(t) = 0 \quad \text{при } t \notin U_{0nj}.\end{aligned}$$

Положим далее

$$\text{(5.35)} \qquad \tilde{\xi}_0(\tau) = \begin{cases} \xi_0(t) & \text{при } \tau = \varphi(t),\ t \in U_{0nj},\\ 0 & \text{при } \tau \notin U_0 \cap \mathscr{T}_n\end{cases}$$

и $f(x) = (V_x \xi_0, \xi_0)$. Так как $x \to V_x$ симметрично, то f — положительный функционал. Отсюда и из (5.5), (5.30), (5.31) и (5.33)-(5.35) заключаем, что

$$\text{(5.36)} \qquad \begin{aligned} 0 \leqslant f(x_0^* x_0) &= (V_{x_0^* x_0} \xi_0, \xi_0) = (V_{x_0^* x_0} P^{[k]} \xi_0, P^{[k]} \xi_0) = \\ &= (V_{x_1} \xi_0, \xi_0) = (A^{[k]}_{x_1} \xi_0, \xi_0) = \int_{U_{0nj}} f_t(x_1) |\xi_0(t)|^2 d\mu = \\ &= \int_{U_0 \cap \mathscr{T}_n} \tilde{f}_\tau(x_1) |\tilde{\xi}_0(\tau)|^2 d\mu.\end{aligned}$$

Но если $\mu(U_0 \cap \mathscr{T}_n) > 0$, то последний интеграл < 0 в силу (5.32) и (5.35). Следовательно $\mu(U_0 \cap \mathscr{T}_n) = 0$ и предложение V доказано [2].

Положим теперь

$$T^1 = \{t : f_t(x) \not\equiv 0 \ \text{ на } I_k\}.$$

VI. *T^1 μ-измеримо и $\mu(T^1) = 0$.*

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать утверждение для множества $T^2 = T^1 \setminus T^1 \cap T^0$. Положим $\mathscr{T}^2_n = \varphi(T^2 \cap \mathscr{T}^{(j)}_n)$; достаточно доказать, что каждая точка $\tau_0 \in \mathscr{T}^2_n$ обладает такой окрестностью U_0, что $\mu(U_0 \cap \mathscr{T}_n) = 0$. Пусть $\tau_0 \in \mathscr{T}^2_n$; тогда, по опеределению T^1 и T^0, существует такой элемент $x_0 \in I^{[k]}$, что $f_{\tau_0}(x_0^* x_0) > 0$. По непрерывности существует такая окрестность U_0 точки τ_0, что

$$\text{(5.37)} \qquad \tilde{f}_\tau(x_0^* x_0) > 0 \quad \text{при } \tau \in U_0.$$

---

[2] Последняя часть этого доказательства является обобщением рассуждения на стр. 474 в [2].

Пусть U_{0nj}, f и ξ_0 — те же, что и в доказательстве предложения V. Если $\mu(U_0 \frown \mathscr{T}_n) > 0$, то из (5.36) и (5.37) заключаем, что

$$|V_{x_0}\xi_0|^2 = f(x_0^* x_0) > 0,$$

где $x_0 \epsilon I^{[k]}$, а это противоречит (5.21).

Пусть теперь $\tilde{V}(t)$ для каждого $t \epsilon T \diagdown (T^0 \smile T^1)$ — представление группы G (и алгебры X), порожденное положительным функционалом $f_t(x)$ а $\tilde{H}(t)$ — пространство этого представления. Так как функция $t \to f_t(x)$ измерима при каждом $x \epsilon X$, то, $\tilde{H}(t)$ и $\tilde{V}(t)$ — измеримые семейства гильбертовых пространств и представлений. Поэтому можно построить прямой интеграл

$$\tilde{H} = \int \tilde{H}(t)\,d\mu$$

пространств $\tilde{H}(t)$ по T и соответствующий прямой интеграл представлений $\tilde{V}(t)$, который мы обозначим через $\tilde{V}$; $\tilde{H}$ и $\tilde{V}$ мы будем называть *прямыми интегралами пространств и представлений, порожденными стандартной реализацией алгебры* $\mathfrak{A}^{[k]}$.

VII. *Для каждого* $t \epsilon T \diagdown (T^0 \smile T^1)$ *представление* $\tilde{V}(t)$ *неприводимо и веса* k.

Доказательство. Из формулы (5.28) вытекает, что $f_t(x)$ — непрерывный функционал на $\mathfrak{A}^{[k]}$, обращающийся в нуль на I_k в силу VI.

Но, как известно (см. [8] и [9]), для каждого такого функционала существует в точности одно вполне неприводимое представление $\hat{V}(t)$ веса k такое, что

$$\hat{V}_x(t)\,\hat{\xi}_0(t) = f_t(x)\,\hat{\xi}_0(t) \qquad \text{для } x \epsilon X_k,\ \hat{\xi}_0(t) \epsilon \hat{M}^{[k]}(t).$$

Пусть $\hat{H}(t)$ — пространство этого представления и пусть $L(t) = \{\hat{V}_x(t)\,\hat{\xi}_0(t),\ x \epsilon X\}$; тогда $L(t)$ плотно в $\hat{H}(t)$. Определим в $L(t)$ эрмитову форму, полагая

$$(5.38) \qquad \big(\hat{V}_x(t)\,\hat{\xi}_0(t),\ \hat{V}_y(t)\,\hat{\xi}_0(t)\big) = f_t(y^* x).$$

Пусть $\mathscr{K}(t)$ — определенное этой формой гильбертово пространство. Тогда формула

$$(5.39) \qquad W_{g_0}(t)\,\hat{V}_x(t)\,\hat{\xi}_0(t) = \hat{V}_{x_{g_0}}(t)\,\hat{\xi}_0(t) = \hat{V}_{g_0}(t)\,\hat{V}_x(t)\,\hat{\xi}_0(t),$$

где $x_{g_0} = x(g_0^{-1}g)$ задает унитарное представление $W(t)$ в $\mathscr{K}(t)$ эквивалентное представлению $\tilde{V}(t)$; действительно, оба представления и задаются одним и тем же положительным функционалом $f_t(x)$. Поэтому достаточно доказать, что $W(t)$ неприводимо. Для этого достаточно проверить, что $W(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 1, п. 3. Пусть $Q_j^m(t)$ и $N_j^m(t)$ — операторы P_j^m и подпространства M_j^m для $W(t)$. В силу (5.39) $Q_j^m(t) = P_j^m(t)$ на $L(t)$ и потому $P_j^m(t)L(t)$ одновременно плотно в $\hat{M}_j^m(t)$ и $N_j^m(t)$, ибо $L(t)$ плотно в $\hat{H}(t)$ и $\mathscr{K}(t)$. Но $\hat{M}_j^m(t) = 0$ при $m < k$ и $\hat{M}^{[k]}(t)$ одномерно; поэтому также $N_j^m(t) = 0$ при $m < k$ и $M^{[k]}(t)$ одномерно, ибо содержит $\hat{\xi}_0(t)$.

Наконец

$$\{W_x(t)\,\hat{N}_j^{(k)}(t),\ x \epsilon X\} = \{\hat{V}_x(t)\,\hat{\xi}_0(t),\ x \epsilon X\} = L(t)$$

плотно в $\mathscr{K}(t)$. Этим завершается доказательство предложения VII.

Теорема 2. *Пусть* V — *непрерывное унитарное представление группы* G *в гильбертовом пространстве* H.

1. *Если* V *однородно веса* k, *то*:

A. *Алгебра* $\mathfrak{A}_v^{[k]}$ *коммутативна*.

B. $M_v^m = (0)$ *при* $m < k$.

C. *Линейная оболочка всех* $V_x \xi$, $\xi \epsilon M^{[k]}$, $x \epsilon X$, *плотна в* H.

D. *Разложение*

$$H = \int H(t)\,d\mu, \qquad V_g = \{V_g(t)\}$$

представления V *в прямой интеграл непрерывных неприводимых унитарных представлений* $V(t)$ *порождает разложение*

$$M_v^{[k]} = \int M^{[k]}(t)\,d\mu$$

в прямой интеграл одномерных подпространств $M^{[k]}(t)$, *для которого*

(α) $A_x^{[k]}(t)\,\xi(t) = a_x(t)\,\xi(t)$ *при* $\xi(t) \epsilon M^{[k]}(t)$, $x \epsilon X_k$, *где* $a_x(t)$ — *числовая функция из* $L_\mu^\infty(T)$ *для каждого* $x \epsilon X_k$;

(β) *для* μ-*почти каждого* $t \epsilon T$ *соответствие* $x \to a_x(t)$ *симметричное одномерное непрерывное представление алгебры* X_k.

2. *Обратно, пусть для* V *выполнены условия* A-C. *Тогда*:

E. V *однородно веса* k.

F. *Если* $\tilde{H} = \int \tilde{H}(t)\,d\mu$ *и* $\tilde{V} = \{\tilde{V}(t)\}$ *прямые интегралы пространств и представлений, порожденные стандартной реализацией алгебры* $\mathfrak{A}^{[k]}$, *то* $\tilde{V}(t)$ *неприводимо веса* k *для* μ-*почти каждого* $t \epsilon T$ *и существует изометрическое отображение пространства* H *на подпространство* $\tilde{H}'$ — *пространства* $\tilde{H}$, *инвариантное относительно* $\tilde{V}$ *при котором* V *переходит в сужение* $\tilde{V}$ *на* $\tilde{H}'$.

G. *Если, кроме того, для* $(\mu \times \mu)$-*почти всех пар* $t_1 \times t_2 \epsilon T \times T$ *представления* $A_x^{[k]}(t_1) \not\equiv A_x^{[k]}(t_2)$ *при* $t_1 \neq t_2$, $x \epsilon X_k$, *то* $\tilde{H}' = \tilde{H}$.

Доказательство. 1. A совпадает с I, B следует из (4.3), С совпадает с III, D следует из доказательства I.

2. Пусть выполнены условия A-C. В силу VII, $\tilde{V}$ однородно веса k. Пусть $\tilde{\xi}_0 = \{\tilde{\xi}_0(t)\}$ — такой вектор из $\tilde{M}$, что $\tilde{\xi}_0(t) \not\equiv 0$ для μ-почти всех $t \in T$. Для каждой μ-измеримой функции $\lambda(t)$, удовлетворяющей условию $\int |\lambda(t)|^2 |\xi_0(t)|^2 d\mu < \infty$ положим $\tilde{\xi}_\lambda = \{\lambda(t)\tilde{\xi}_0(t)\}$; тогда $\tilde{\xi}_\lambda \in \tilde{M}$ и совокупность всех $\tilde{\xi}_\lambda$ совпадает с $\tilde{M}$. Пусть ξ_0 и ξ_λ — прообразы $\tilde{\xi}_0$ и $\tilde{\xi}_\lambda$ при стандартной реализации; тогда совокупность всех ξ_λ совпадает с $M^{[k]}$. Выберем циклический вектор $\tilde{\tilde{\xi}}_0(t)$ представления $\tilde{V}(t)$ так, что вектор-функция $\tilde{\tilde{\xi}}_0(t)$ μ-измерима и

$$|\tilde{\tilde{\xi}}_0(t)| = |\tilde{\xi}_0(t)|$$

для μ-почти всех $t \in T$. Это возможно. Действительно, пусть $\tilde{\tilde{\xi}}_1(t)$ — класс из $\tilde{H}(t)$, содержащий $a(t)e$, где $a(t)$ — измеримая числовая функция, отличная от нуля для μ-почти всех t, а e — единичный элемент, присоединенный к алгебре X. Тогда вектор функция

$$\tilde{\tilde{\xi}}_0(t) = \frac{|\tilde{\xi}_0(t)|}{|\tilde{\tilde{\xi}}_1(t)|}\tilde{\tilde{\xi}}_1(t)$$

будет обладать требуемыми свойствами. Эта вектор функция есть элемент $\tilde{\tilde{\xi}}_0 = \{\tilde{\tilde{\xi}}_0(t)\} \in \tilde{H}$. Так как $\tilde{\xi}_0(t) \in \tilde{M}^{(k)}(t)$ (см. доказательство предложения VII), то

$$\tilde{P}^{[k]}(t)\tilde{\tilde{\xi}}_0(t) = \tilde{\tilde{\xi}}_0(t). \tag{5.40}$$

Пусть $\tilde{H}'$ — замкнутая линейная оболочка всех $\tilde{V}_x\tilde{\tilde{\xi}}_\lambda$. Тогда $\tilde{H}'$ — замкнутое подпространство в $\tilde{H}$, инвариантное относительно всех $\tilde{V}_g$. Пусть L — линейная оболочка всех $V_x\xi_\lambda$. Определим оператор S из L в $\tilde{H}'$ полагая

$$SV_x\xi_\lambda = \tilde{V}_x\tilde{\tilde{\xi}}_\lambda \tag{5.41}$$

и распространяя его затем линейно на всевозможные конечные линейные комбинации векторов $V_x\xi_\lambda$, тогда S—изометричен. Действительно, в силу (5.5), (5.39), (5.40) и (5.28) для $x, y \in X$, $z = e^{[k]}y^*xe^{[k]}$

$$\begin{aligned}
(SV_x\xi_\lambda, SV_y\xi_{\lambda_1}) &= (\tilde{V}_x\tilde{\tilde{\xi}}_\lambda, \tilde{V}_y\tilde{\tilde{\xi}}_{\lambda_1}) = \\
&= \int\big(\tilde{V}_x(t)\lambda(t)\tilde{\tilde{\xi}}_0(t), \tilde{V}_y(t)\lambda_1(t)\tilde{\tilde{\xi}}_0(t)\big)d\mu = \\
&= \int\lambda(t)\overline{\lambda_1(t)}\big(\tilde{V}_{y^*x}(t)\tilde{P}^{[k]}(t)\tilde{\tilde{\xi}}_0(t), \tilde{P}^{[k]}(t)\tilde{\tilde{\xi}}_0(t)\big)d\mu = \\
&= \int\lambda(t)\overline{\lambda_1(t)}\big(\tilde{P}^{[k]}(t)\tilde{V}_{y^*x}(t)\tilde{P}^{[k]}(t)\tilde{\tilde{\xi}}_0(t), \tilde{\tilde{\xi}}_0(t)\big)d\mu = \\
&= \int\lambda(t)\overline{\lambda_1(t)}\big(\hat{V}_z(t)\tilde{\tilde{\xi}}_0(t), \tilde{\tilde{\xi}}_0(t)\big)d\mu = \\
&= \int\lambda(t)\overline{\lambda_1(t)}f_t(z)\big(\tilde{\xi}_0(t), \tilde{\xi}_0(t)\big)d\mu = \\
&= \int\lambda(t)\overline{\lambda_1(t)}\hat{A}_z^{[k]}(t)\big(\tilde{\xi}_0(t), \tilde{\xi}_0(t)\big)d\mu = (\tilde{A}_z^{[k]}\tilde{\xi}_\lambda, \tilde{\xi}_{\lambda_1}) = \\
&= (A_z^{[k]}\xi_\lambda, \xi_{\lambda_1}) = (V_z\xi_\lambda, \xi_{\lambda_1}) = (P^{[k]}V_{y^*x}P^{[k]}\xi_\lambda, \xi_{\lambda_1}) = \\
&= (V_x\xi_y, V_x\xi_{\lambda_1}).
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$(S\xi, S\eta) = (\xi, \eta)$$

для всех $\xi = V_x\xi_\lambda$, $\eta = V_y\xi_{\lambda_1}$, а значит и для всех их конечных линейных комбинаций, т.е. всех $\xi, \eta \in L$, т.е. S изометрически отображает L на линейную оболочку $\tilde{V}_x\tilde{\tilde{\xi}}_\lambda$. Но в силу C, L плотно в H. Поэтому S продолжается естественным образом до изометрического отображения пространства H на $\tilde{H}'$. Из (5.41) вытекает, что при этом отображение V переходит в сужение $\tilde{V}$ на $\tilde{H}'$. Этим доказано утверждение F. Так как $\tilde{V}$ однородно веса k, то его сужение на $\tilde{H}'$, а значит, и эквивалентное этому сужению представление V однородно веса k (см. II, п. 4) Этим доказано утверждение E. Пусть наконец $A_x(t_1) \not\equiv A_x(t_2)$ при $t_1 \neq t_2$ для $(\mu\times\mu)$-почти всех пар $t_1 \times t_2 \in T\times T$. Отсюда следует, что $\mu(T_n) = 0$ при $n \geqslant 2$ и поэтому можно считать, что $T = \mathscr{T}$. Но тогда представление $x \to \tilde{V}_x(t)$, $t \in T$, удовлетворяют всем условиям континдального аналога леммы Шура (см. напр. [13], § 26, теорема 1). Так как $\tilde{H}'$ содержит вектор $\tilde{\xi}_0 = \{\xi_0(t)\}$, для которого $\xi_0(t) \neq 0$ μ-почти всюду на T, то в силу следствия 1, п. 5, § 26 в [13] имеем $\tilde{H}' = \tilde{H}$.

Цитированная литература

[1] И. М. Гельфанд и М. И. Граев, *Геометрия однородных пространств, представления групп в однородных пространствах и связанные с ними вопросы интегральной геометрии*, Труды моск. мат. общ. 8 (1959), стр. 321-390.

[2] И. М. Гельфанд и М. А. Наймарк, *Унитарные представления унимодулярной группы, содержащие единичное представление унитарной подгруппы*, там же 1 (1952), стр. 423-475.

[3] R. Godement, *A theory of spherical functions I*, Trans. Amer. Math. Soc. 73 (1952), стр. 496-556.

[4] J. Dixmier, *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien* (algèbres de von Neumann), Paris 1957.

[5] — *Les C*-algèbres et leurs représentations*, Paris 1954.

[6] Д. П. Желобенко, *Операционные исчисление и теоремы типа Пэли-Винера для полупростой комплексной группы Ли*, ДАН СССР 170, №- 6 (1966), стр. 1243-1246.

[7] — *Симметрия в классе элементарных представлений полупростой комплексной группы Ли*, Функциональный анализ и его приложения 1, вып. 2 (1967), стр. 15-38.

[8] — *Структура элементарных представлений полупростой комплексной группы Ли*, ДАН СССР 170, № 5 (1966), стр. 1009-1012.

[9] — и М. А. Наймарк, *Описание вполне неприводимых представлений полупростой комплексной группы Ли*, там же 171, № 1 (1966), стр. 25-28.

[10] М. А. Наймарк, *Линейные представления группы Лоренца*, Москва 1958.

[11] — *Об описании всех унитарных представлений комплексных классических групп* I, II, Мат. сб. 35 (77) (1954), стр. 317-356; 37 (79) (1955), стр. 121-140.

[12] — *Разложение тензорного произведения представлений собственной группы Лоренца на неприводимые представления* I, II, III, Труды Моск. мат. общ. 8 (1959), стр. 121-153; 9 (1960), стр. 237-282; 10 (1961), стр. 181-216.

[13] M. A. Naimark, *Normed rings*, Groningen 1964.

Reçu par la Rédaction le 2. 4. 1968

STUDIA MATHEMATICA, T. XXXI. (1968)

Raikov systems and the pathology of $M(R)$

by

J. H. WILLIAMSON (Cambridge)

Dedicated to
Professor Stanisław Mazur
and
Professor Władysław Orlicz

This paper may be regarded as a continuation of [8], where some preliminary results on Raikov systems and their applications were given. We shall assume here the basic results of that paper. The main result to be proved here (Theorem 2) was conjectured in [8] (Proposition 9′ of that paper) and generalises Proposition 9 of [8], which was stated without proof. In general terms, what we prove is that the pathological features of the measure algebra $M(R)$ of the real line R are in a certain sense uniformly spread throughout the algebra. If A and B are two subalgebras of $M(R)$, of a certain type, with A properly contained in B, then the phenomena associated with the names of Wiener and Pitt, which have been known for many years [4], [6] to occur between the atomic measures $M_a(R)$ and the whole measure algebra $M(R)$, occur also between A and B. The techniques used to apply to the measure algebra information available about Raikov systems are those described in [7], and we assume the results of § 1 of that paper. The main theorems of the present paper are generalisations (in the special case $G = R$) of Theorems 2.3 and 2.5 of [7].

In order to simplify the exposition we maintain the restriction (observed in [8]) of stating and proving results for the case of the real line R only. In many cases the extension to a general locally compact abelian group is straightforward, but there are some others where the difficulties are more substantial, and we reserve a full discussion of the general case for another occasion.

We begin by recalling the basic definition. A subset of R is of type F_σ if it is a countable union of compact sets. A collection $\mathscr{F}$ of subsets of R, of type F_σ, is a *Raikov system* if the following properties hold: