заметить, что каждое подпространство слабо полного пространства также слабо полно.

С. Бохнеру [3] принадлежит следующее обобщение теоремы Боля-Бора:

Теорема Бохнера. *Если $x(t)$ п. п. функция со значениями в произвольном банаховом пространстве и если множество значений интеграла $X(t)$ относительно компактно, то $X(t)$ — п. п. функция.*

С помощью метода эквивалентных норм, примененного при доказательстве теоремы 1, можно усилить и этот результат.

Лемма 2а. *Утверждения леммы 2 справедливы и в том случае, если E произвольное банахово пространство, но множество значений интеграла (1) относительно слабо компактно.*

Действительно, мы можем полностью повторить рассуждения, проведенные при доказательстве леммы 2. Только при установлении существования $Y(t)$ нужно воспользоваться не слабой полнотой пространства E (которая в этом случае не предполагается), а слабой компактностью множества значений интеграла (1).

Теорема 2. *Пусть $x(t)$ п. п. функция со значениями в банаховом пространстве E. Если множество значений интеграла $X(t)$ слабо относительно компактно в E, то $X(t)$ — п. п. функция.*

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что E сепарабельно и что в нем введена эквивалентная норма, удовлетворяющая требованиям предложения 1 для $\Gamma = E^*$. Затем мы можем дословно повторить доказательство теоремы 1, воспользовавшись леммой 2а вместо леммы 2.

Цитированная литература

[1] L. Amerio, *Abstract almost-periodic functions and functional equations*, Boll. Unione Mat. Ital. 20 (1965), стр. 267-333.

[2] — *Sull'integratione delle funzioni quasi-periodiche astratte*, Ann. di Mat. 53 (1961), стр. 371-382.

[3] S. Bochner, *Abstrakte fastperiodische Funktionen*, Acta Math. 61 (1933), стр. 149-184.

[4] М. И. Кадец, *О связи между слабой и сильной сходимостью*, ДАН УССР 9 (1959), стр. 949-952 (на украинском языке).

[5] — и А. Пелчински, *Базисные последовательности, биортогональные системы и нормирующие множества в пространствах Банаха и Фреше*, Studia Math. 25 (1965), стр. 297-323.

[6] Б. М. Левитан, *Почти-периодические функции*, Москва 1953.

Reçu par la Rédaction le 10. 2. 1968

STUDIA MATHEMATICA, T. XXXI. (1968)

Interpolationstheorie für Banachideale von beschränkten linearen Operatoren

von

ALBRECHT PIETSCH und HANS TRIEBEL (Jena)

Den Herren Stanisław Mazur und Władysław Orlicz gewidmet

Die vorliegende Arbeit ist ein Beitrag zur Theorie der vollständigen Normideale (= Banachideale) von beschränkten linearen Operatoren in Banachräumen. Wir benutzen das von A. P. Calderón und J. L. Lions entwickelte komplexe Interpolationsverfahren dazu, um für zwei beliebige Banachideale $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ eine Schar von Banachidealen $\boldsymbol{I}_\theta = [\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]_\theta$ mit $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ zu konstruieren. Ein besonders interessantes Resultat ergibt sich, wenn man zwischen dem Banachideal $\boldsymbol{L}$ aller beschränkten linearen Operatoren und dem Banachideal $\boldsymbol{N}$ der nuklearen Operatoren interpoliert. Es zeigt sich nämlich, daß die zu den Banachidealen $\boldsymbol{S}_r = [\boldsymbol{L}, \boldsymbol{N}]_{1/r}$ mit $1 \leqslant r \leqslant \infty$ gehörigen Operatoren als Verallgemeinerung der durch J. v. Neumann und R. Schatten im separablen Hilbertraum H eingeführten Operatoren der Klasse $\boldsymbol{S}_r(H, H)$ aufgefaßt werden können. Als Beispiele betrachten wir Einbettungsoperatoren in Sobolev-Slobodeckij-Räumen $\boldsymbol{W}_p^l$ und schwach singuläre Integraloperatoren in den Banachräumen $\boldsymbol{L}_p$.

1. Banachideale von beschränkten linearen Operatoren. Im folgenden ist $\boldsymbol{L}$ die Klasse aller beschränkten linearen Operatoren, die zwischen beliebigen komplexen Banachräumen $E, F, G, \ldots$ definiert sind. Die Teilmenge derjenigen Operatoren, die E in F abbilden, wird mit $\boldsymbol{L}(E, F)$ bezeichnet.

Eine Klasse $\boldsymbol{A}$ von Operatoren heißt *Ideal*, wenn die Mengen

$$\boldsymbol{A}(E, F) = \boldsymbol{L}(E, F) \cap \boldsymbol{A}$$

den folgenden Bedingungen genügen:

(A) Aus $S, T \in \boldsymbol{A}(E, F)$ folgt $S + T \in \boldsymbol{A}(E, F)$.

(I_l) Aus $T \in \boldsymbol{L}(E, F)$ und $S \in \boldsymbol{A}(F, G)$ folgt $ST \in \boldsymbol{A}(E, G)$.

(I_r) Aus $T \in \boldsymbol{A}(E, F)$ und $S \in \boldsymbol{L}(F, G)$ folgt $ST \in \boldsymbol{A}(E, G)$.

Es zeigt sich, daß die Klasse $\boldsymbol{L}_0$ der Operatoren mit endlichdimensionalem Bildraum das kleinste eigentliche Ideal ist.

Eine Abbildung $\boldsymbol{\alpha}$, die jedem Operator T eines Ideals $\boldsymbol{A}$ eine nicht negative Zahl $\boldsymbol{\alpha}(T)$ zuordnet, heißt *Idealnorm*, wenn die folgenden Aussagen gelten:

(NO) Aus $\boldsymbol{\alpha}(T)=0$ folgt $T=0$.

(NA) Für $S, T \in \boldsymbol{A}(E,F)$ gilt $\boldsymbol{\alpha}(S+T) \leqslant \boldsymbol{\alpha}(S)+\boldsymbol{\alpha}(T)$.

(NI$_l$) Für $T \in \boldsymbol{L}(E,F)$ und $S \in \boldsymbol{A}(F,G)$ gilt $\boldsymbol{\alpha}(ST) \leqslant \boldsymbol{\alpha}(S)\|T\|$.

(NI$_r$) Für $T \in \boldsymbol{A}(E,F)$ und $S \in \boldsymbol{L}(F,G)$ gilt $\boldsymbol{\alpha}(ST) \leqslant \|S\|\boldsymbol{\alpha}(T)$.

Zu jeder Idealnorm $\boldsymbol{\alpha}$ gibt es eine positive Konstante ϱ mit

$$\|T\| \leqslant \varrho\boldsymbol{\alpha}(T) \quad \text{für } T \in \boldsymbol{A}.$$

Ein Ideal $\boldsymbol{A}$, auf dem eine Idealnorm $\boldsymbol{\alpha}$ gegeben ist, wird als *Normideal* bezeichnet. Ein Normideal $\boldsymbol{A}$ heißt *Banachideal*, wenn die einzelnen Komponenten $\boldsymbol{A}(E,F)$ vollständig sind.

2. Komplexe Interpolation von Banachidealen (vgl. [3]). Sind $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ zwei beliebige Banachideale mit den Idealnormen $\boldsymbol{\alpha}$ und $\boldsymbol{\beta}$, so bezeichnen wir mit $\boldsymbol{\Phi}(E,F)$ die Gesamtheit der auf dem Streifen

$$\{z=\xi+i\eta : 0 \leqslant \xi \leqslant 1\}$$

definierten Funktionen T_z, die folgende Eigenschaften besitzen:

(S) Auf dem ganzen Streifen ist T_z eine stetige und beschränkte $\boldsymbol{L}(E,F)$-wertige Funktion.

(S$_0$) Auf dem Rand $\xi=0$ ist T_z eine stetige und beschränkte $\boldsymbol{A}(E,F)$-wertige Funktion.

(S$_1$) Auf dem Rand $\xi=1$ ist T_z eine stetige und beschränkte $\boldsymbol{B}(E,F)$-wertige Funktion.

(H) Im Inneren des Streifens ist T_z eine holomorphe $\boldsymbol{L}(E,F)$-wertige Funktion.

Man kann nachweisen, daß $\boldsymbol{\Phi}(E,F)$ ein Banachraum mit der Norm

$$\boldsymbol{\Phi}(T_z)=\max\{\sup_\eta \boldsymbol{\alpha}(T_{0+i\eta}), \sup_\eta \boldsymbol{\beta}(T_{1+i\eta})\}$$

ist.

Für jede Zahl θ aus dem Intervall $[0,1]$ besteht die Menge $\boldsymbol{I}_\theta(E,F)$ aus allen Operatoren T, die sich mit einer Funktion $T_z \in \boldsymbol{\Phi}(E,F)$ in der Form

$$T=T_\theta$$

darstellen lassen, und wir setzen

$$\boldsymbol{\iota}_\theta(T)=\inf\{\boldsymbol{\Phi}(T_z) : T=T_\theta\}.$$

Vereinigt man die Operatoren der einzelnen Komponenten $\boldsymbol{I}_\theta(E,F)$ zu der Klasse $\boldsymbol{I}_\theta$, so ergibt sich

Satz 1. *Die interpolierte Operatorenklasse $\boldsymbol{I}_\theta=[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]_\theta$ ist ein Banachideal mit der Idealnorm $\boldsymbol{\iota}_\theta=[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]_\theta$.*

Beweis. Aus der allgemeinen Interpolationstheorie folgt, daß die Mengen $\boldsymbol{I}_\theta(E,F)$ Banachräume mit der Norm $\boldsymbol{\iota}_\theta$ sind. Wir müssen deshalb nur noch die typischen Idealeigenschaften nachweisen. Zu diesem Zweck betrachten wir zwei Operatoren $T \in \boldsymbol{I}_\theta(E,F)$ und $S \in \boldsymbol{L}(F,G)$. Dann gibt es zu jeder Zahl $\varepsilon>0$ eine Funktion $T_z \in \boldsymbol{\Phi}(E,F)$ mit

$$T=T_\theta \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\Phi}(T_z) \leqslant \boldsymbol{\iota}_\theta(T)+\varepsilon.$$

Weil die Funktion ST_z zu $\boldsymbol{\Phi}(E,G)$ gehört, folgt aus der Ungleichung

$$\boldsymbol{\Phi}(ST_z) \leqslant \|S\|\boldsymbol{\Phi}(T_z),$$

daß das Produkt $ST=ST_\theta$ ein $\boldsymbol{I}_\theta$-Operator mit

$$\boldsymbol{\iota}_\theta(ST) \leqslant \|S\|\,\boldsymbol{\iota}_\theta(T)$$

ist. Damit haben wir gezeigt, daß die Bedingungen (I$_r$) und (NI$_r$) erfüllt sind. Ganz analog läßt sich beweisen, daß auch die Aussagen (I$_l$) und (NI$_l$) gelten.

Bemerkung. (1) Wenn für eine positive Konstante ϱ die Ungleichungen

$$\|T\| \leqslant \varrho\boldsymbol{\alpha}(T) \text{ für } T \in \boldsymbol{A} \quad \text{und} \quad \|T\| \leqslant \varrho\boldsymbol{\beta}(T) \text{ für } T \in \boldsymbol{B}$$

bestehen, so gilt auch

$$\|T\| \leqslant \varrho\boldsymbol{\iota}_\theta(T) \quad \text{für } T \in \boldsymbol{I}_\theta.$$

Wir zeigen nun, daß alle Operatoren der Ideale $\boldsymbol{I}_\theta$ kompakt sind, wenn der Durchschnitt $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$ nur aus kompakten Operatoren besteht. Es gilt der allgemeinere

Satz 2. *Ist das Ideal $\boldsymbol{K}$ bezüglich der Operatorennorm abgeschlossen* (1), *so folgt aus $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{K}$ stets $\boldsymbol{I}_\theta \subset \boldsymbol{K}$.*

Beweis. In [3] und [7] wurde gezeigt, daß es zu jedem Operator $T \in \boldsymbol{I}_\theta(E,F)$ eine Folge von Operatoren $T_n \in \boldsymbol{A}(E,F) \cap \boldsymbol{B}(E,F)$ mit

$$\boldsymbol{\iota}_\theta\text{-}\lim T_n=T$$

gibt. Auf Grund der Ungleichung

$$\|T_n-T\| \leqslant \varrho\boldsymbol{\iota}_\theta(T_n-T)$$

gilt dann erst recht die Beziehung

$$\|\cdot\|\text{-}\lim T_n=T.$$

Deshalb gehört der Operator T zu dem Ideal $\boldsymbol{K}$.

(1) Für $\boldsymbol{K}$ kann man z. B. auch das Ideal der schwach kompakten Operatoren einsetzen.

Wir nennen ein Ideal $\boldsymbol{A}$ *symmetrisch*, wenn mit jedem Operator T auch der duale Operator T' zu $\boldsymbol{A}$ gehört. Ist $\boldsymbol{A}$ sogar ein Banachideal, so folgt aus dem Satz vom abgeschlossenen Graphen, daß der durch die Zuordnung $T \to T'$ definierte Operator von $\boldsymbol{A}(E, F)$ in $\boldsymbol{A}(F', E')$ beschränkt ist.

SATZ 3. *Für zwei symmetrische Banachideale $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ sind auch alle Banachideale $\boldsymbol{I}_\theta$ symmetrisch.*

Beweis. Wir betrachten einen beliebigen Operator $T \in \boldsymbol{I}_\theta(E, F)$. Dann gibt es eine Funktion $T_z \in \boldsymbol{\Phi}(E, F)$ mit $T = T_\theta$. Wir müssen nun zeigen, daß die Funktion T'_z zu $\boldsymbol{\Phi}(F', E')$ gehört. Da aus unserer Vorbemerkung unmittelbar folgt, daß die Bedingungen (S), (S_0) und (S_1) erfüllt sind, können wir uns auf den ebenfalls elementaren Nachweis der Holomorphie beschränken. Zu diesem Zweck wird die Funktion T_z für jeden Punkt z_0 aus dem Inneren des betrachteten Streifens in eine lokale Potenzreihe

$$T_z = \sum_0^\infty T_n(z-z_0)^n$$

entwickelt. Durch Übergang zu den dualen Operatoren ergeben sich dann die lokalen Potenzreihen

$$T'_z = \sum_0^\infty T'_n(z-z_0)^n.$$

Damit ist die Aussage $T'_z \in \boldsymbol{\Phi}(F', E')$ bewiesen, und der Operator $T' = T'_\theta$ gehört zu dem Ideal $\boldsymbol{I}_\theta$.

3. Skalen von Banachidealen. Wir untersuchen nun die zu einem beliebigen Banachideal $\boldsymbol{A}$ gehörige Skala der Banachideale $\boldsymbol{A}_\theta = [\boldsymbol{L}, \boldsymbol{A}]_\theta$ mit den Idealnormen $\boldsymbol{\alpha}_\theta = [\|\cdot\|, \boldsymbol{\alpha}]_\theta$. Dabei können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß auf $\boldsymbol{A}$ sogar die Ungleichung $\|T\| \leqslant \boldsymbol{\alpha}(T)$ gilt.

Als unmittelbare Folgerungen aus der allgemeinen Interpolationstheorie [3], [7] ergeben sich die folgenden Aussagen:

SATZ 4. *Für jeden Operator $T \in \boldsymbol{A}$ ist $\boldsymbol{\alpha}_\theta(T)$ eine stetige, monoton wachsende und logarithmisch konvexe Funktion der Variablen θ. Insbesondere gilt*

$$\boldsymbol{\alpha}_0(T) = \|T\| \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\alpha}_1(T) = \boldsymbol{\alpha}(T).$$

SATZ 5. *Aus $\theta_1 \leqslant \theta_2$ folgt $\boldsymbol{A}_{\theta_1} \supset \boldsymbol{A}_{\theta_2}$.*

SATZ 6. *Es gilt $[\boldsymbol{L}, \boldsymbol{A}_\theta]_{\theta^*} = \boldsymbol{A}_{\theta\theta^*}$ und $[\|\cdot\|, \boldsymbol{\alpha}_\theta]_{\theta^*} = \alpha_{\theta\theta^*}$.*

Außerdem ergibt sich der interessante

SATZ 7. *Unter der Voraussetzung*

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 \leqslant 1$$

folgt aus $T \in \boldsymbol{A}_{\theta_1}(E, F)$ und $S \in \boldsymbol{A}_{\theta_2}(F, G)$ stets $ST \in \boldsymbol{A}_\theta(E, G)$, und es gilt

$$\boldsymbol{\alpha}_\theta(ST) \leqslant \boldsymbol{\alpha}_{\theta_2}(S)\, \boldsymbol{\alpha}_{\theta_1}(T).$$

Beweis. Wir setzen zuerst voraus, daß die Operatoren S und T zu dem Ideal $\boldsymbol{A}$ gehören. Dann bestehen die Ungleichungen

$$\boldsymbol{\alpha}_\theta(ST) \leqslant \boldsymbol{\alpha}_\theta(S)\|T\| \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\alpha}_\theta(ST) \leqslant \|S\|\boldsymbol{\alpha}_\theta(T),$$

und nach [3], § 10.1, ergibt sich mit $\theta^* = \theta_1/\theta$ die Abschätzung

$$\boldsymbol{\alpha}_\theta(ST) \leqslant [\boldsymbol{\alpha}_\theta, \|\cdot\|]_{\theta^*}(S)[\|\cdot\|, \boldsymbol{\alpha}_\theta]_{\theta^*}(T).$$

Da aber nach Satz 6 die Identitäten

$$[\boldsymbol{\alpha}_\theta, \|\cdot\|]_{\theta^*} = [\|\cdot\|, \boldsymbol{\alpha}_\theta]_{1-\theta^*} = \boldsymbol{\alpha}_{\theta_2} \quad \text{und} \quad [\|\cdot\|, \boldsymbol{\alpha}_\theta]_{\theta^*} = \boldsymbol{\alpha}_{\theta_1}$$

gelten, hat man

$$\boldsymbol{\alpha}_\theta(ST) \leqslant \boldsymbol{\alpha}_{\theta_2}(S)\boldsymbol{\alpha}_{\theta_1}(T).$$

Sind die Operatoren $T \in \boldsymbol{A}_{\theta_1}(E, F)$ und $S \in \boldsymbol{A}_{\theta_2}(F, G)$ beliebig, so bestimmen wir zwei Folgen von Operatoren $T_n \in \boldsymbol{A}(E, F)$ und $S_n \in \boldsymbol{A}(F, G)$ mit

$$\boldsymbol{\alpha}_{\theta_1}\text{-}\lim T_n = T \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\alpha}_{\theta_2}\text{-}\lim S_n = S.$$

Dann folgt aus der Ungleichung

$$\boldsymbol{\alpha}_\theta(S_nT_n - S_mT_m) \leqslant \boldsymbol{\alpha}_{\theta_2}(S_n)\boldsymbol{\alpha}_{\theta_1}(T_n - T_m) + \boldsymbol{\alpha}_{\theta_2}(S_n - S_m)\boldsymbol{\alpha}_{\theta_1}(T_m),$$

daß die Produkte S_nT_n eine $\boldsymbol{\alpha}_\theta$-Cauchy-Folge bilden, deren Limes auf Grund der Beziehung

$$\|\cdot\|\text{-}\lim S_nT_n = ST$$

mit ST übereinstimmt. Demnach ist das Produkt ST ein $\boldsymbol{A}_\theta$-Operator mit

$$\boldsymbol{\alpha}_\theta(ST) = \lim \boldsymbol{\alpha}_\theta(S_nT_n) \leqslant \lim \boldsymbol{\alpha}_{\theta_2}(S_n)\boldsymbol{\alpha}_{\theta_1}(T_n) = \boldsymbol{\alpha}_{\theta_2}(S)\boldsymbol{\alpha}_{\theta_1}(T).$$

4. Die Banachideale $\boldsymbol{S}_r$. Vorläufig beschränken wir unsere Betrachtungen auf den Operatorenring des unendlichdimensionalen separablen komplexen Hilbertraumes H. Für jede Zahl $r \geqslant 1$ ist dann die Menge derjenigen Operatoren $T \in \boldsymbol{L}(H, H)$, die sich mit zwei Orthonormalsystemen $\{e_n\}$ und $\{f_n\}$ sowie einer Folge $\{\lambda_n\} \in \boldsymbol{l}_r$ in der Form

$$Tx = \sum_1^\infty \lambda_n(x, e_n)f_n$$

darstellen lassen, ein Banachideal $\boldsymbol{S}_r(H, H)$ mit der Idealnorm

$$\boldsymbol{\sigma}_r(T) = \left\{\sum_1^\infty |\lambda_n|^r\right\}^{1/r}$$

(vgl. [4] oder [16]).

Wir zeigen nun, daß die Banachideale $\boldsymbol{S}_r(H, H)$ eine komplexe Interpolationsskala bilden.

Satz 8. *Für $\theta = 1/r$ gilt*

$$[\boldsymbol{L}(H, H), \boldsymbol{S}_1(H, H)]_\theta = \boldsymbol{S}_r(H, H) \quad \textit{und} \quad [\|\cdot\|, \boldsymbol{\sigma}_1]_\theta = \boldsymbol{\sigma}_r.$$

Beweis. Zu jedem Operator $T \in [\boldsymbol{L}(H, H), \boldsymbol{S}_1(H, H)]_\theta$ gibt es eine Funktion $T_z \in \boldsymbol{\Phi}(H, H)$ mit

$$T = T_\theta \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\Phi}(T_z) \leqslant [\|\cdot\|, \boldsymbol{\sigma}_1]_\theta(T) + \varepsilon.$$

Deshalb folgt aus [4], S. 175, daß der Operator $T = T_\theta$ zu $\boldsymbol{S}_r(H, H)$ gehört. Dabei gilt die Ungleichung

$$\boldsymbol{\sigma}_r(T) \leqslant [\|\cdot\|, \boldsymbol{\sigma}_1]_\theta(T) + \varepsilon.$$

Wir betrachten nun einen ausgearteten Operator $T \in \boldsymbol{L}(H, H)$ und stellen ihn in der Form (2)

$$Tx = \sum_1^\infty \lambda_n (x, e_n) f_n \quad (\lambda_n \geqslant 0)$$

dar. Dann erhält man durch den Ansatz

$$T_z x = \boldsymbol{\sigma}_r(T)^{1-rz} \sum_1^\infty \lambda_n^{rz} (x, e_n) f_n$$

eine Funktion $T_z \in \boldsymbol{\Phi}(H, H)$ mit

$$T = T_\theta \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\Phi}(T_z) \leqslant \boldsymbol{\sigma}_r(T).$$

Deshalb gilt

$$[\|\cdot\|, \boldsymbol{\sigma}_1]_\theta(T) \leqslant \boldsymbol{\sigma}_r(T).$$

Da die ausgearteten Operatoren in $\boldsymbol{S}_r(H, H)$ dicht liegen, ergibt sich aus dieser Abschätzung die Beziehung

$$\boldsymbol{S}_r(H, H) \subset [\boldsymbol{L}(H, H), \boldsymbol{S}_1(H, H)]_\theta.$$

Ein Operator $T \in \boldsymbol{L}(E, F)$ heißt *nuklear*, wenn er sich in der Form

$$Tx = \sum_1^\infty \langle x, a_i \rangle y_i$$

darstellen läßt, so daß für die linearen Funktionale $a_i \in E'$ und die Elemente $y_i \in F$ die Ungleichung

$$\sum_1^\infty \|a_i\| \|y_i\| < +\infty$$

(2) Es treten nur endlich viele $\lambda_n > 0$ auf.

gilt. Wird das Infimum

$$\boldsymbol{\nu}(T) = \inf \Big\{ \sum_1^\infty \|a_i\| \|y_i\| \Big\}$$

über alle möglichen Darstellungen gebildet, so erhält man eine Idealnorm $\boldsymbol{\nu}$, und es zeigt sich, daß die Klasse $\boldsymbol{N}$ der nuklearen Operatoren das kleinste Banachideal ist. Da die Identitäten

$$\boldsymbol{N}(H, H) = \boldsymbol{S}_1(H, H) \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\sigma}_1$$

bestehen, kann man das Banachideal $\boldsymbol{N}$ als eine Fortsetzung von $\boldsymbol{S}_1(H, H)$ ansehen. Unter allen möglichen Fortsetzungen ist $\boldsymbol{N}$ durch seine Minimalität ausgezeichnet.

Der vorangehende Satz gibt uns nun die Möglichkeit, die bisher nur für den Hilbertraum H definierten Banachideale $\boldsymbol{S}_r(H, H)$ auf einheitliche Weise auch für beliebige Banachräume zu erklären, indem wir für $1 \leqslant r \leqslant +\infty$

$$\boldsymbol{S}_r = [\boldsymbol{L}, \boldsymbol{N}]_{1/r} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\sigma}_r = [\|\cdot\|, \boldsymbol{\nu}]_{1/r}$$

setzen.

5. Absolut-(p, q)-summierende Operatoren. Sind p und q zwei Zahlen mit $1 \leqslant q \leqslant p \leqslant +\infty$, dann heißt ein Operator $T \in \boldsymbol{L}(E, F)$ *absolut-(p, q)-summierend* (3), wenn es eine nicht negative Zahl ϱ gibt, so daß für alle endlichen Systeme von Elementen $x_1, \ldots, x_n \in E$ die Ungleichung

$$\Big\{ \sum_1^n \|Tx_k\|^p \Big\}^{1/p} \leqslant \varrho \sup_{\|a\| \leqslant 1} \Big\{ \sum_1^n |\langle x_k, a \rangle|^q \Big\}^{1/q}$$

besteht (4). Bezeichnet man die kleinstmögliche Zahl ϱ mit $\boldsymbol{\pi}_{(p,q)}(T)$, so ist die Klasse $\boldsymbol{\Pi}_{(p,q)}$ aller derartigen Operatoren ein Banachideal mit der Idealnorm $\boldsymbol{\pi}_{(p,q)}$.

Satz 9. *Mit*

$$1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$$

gilt

$$[\boldsymbol{\Pi}_{(p_0,q)}, \boldsymbol{\Pi}_{(p_1,q)}]_\theta \subset \boldsymbol{\Pi}_{(p,q)} \quad \textit{und} \quad [\boldsymbol{\pi}_{(p_0,q)}, \boldsymbol{\pi}_{(p_1,q)}]_\theta \geqslant \boldsymbol{\pi}_{(p,q)}.$$

Beweis. Wir betrachten einen beliebigen Operator

$$T \in [\boldsymbol{\Pi}_{(p_0,q)}, \boldsymbol{\Pi}_{(p_1,q)}]_\theta(E, F).$$

Dann existiert eine Funktion $T_z \in \boldsymbol{\Phi}(E, F)$ mit

$$T = T_\theta \quad \text{und} \quad \Phi(T_z) \leqslant [\boldsymbol{\pi}_{(p_0,q)}, \boldsymbol{\pi}_{(p_1,q)}]_\theta(T) + \varepsilon.$$

(3) Die Definition dieser Operatoren stammt von B. S. Mitiagin und A. Pełczyński. Vgl. [9].

(4) Für $p = \infty$ bzw. $q = \infty$ hat man die übliche Modifikation vorzunehmen.

Ist nun $x_1, \ldots, x_n$ ein beliebiges endliches System von Elementen aus E, so ergibt sich unter Verwendung des Dreiliniensatzes die Ungleichung [5]

$$\Big\{\sum_1^n \|T_\theta x_k\|^p\Big\}^{1/p} \leqslant \Big[\sup_\eta \Big\{\sum_1^n \|T_{0+i\eta} x_k\|^{p_0}\Big\}^{1/p_0}\Big]^{1-\theta} \cdot \Big[\sup_\eta \Big\{\sum_1^n \|T_{1+i\eta} x_k\|^{p_1}\Big\}^{1/p_1}\Big]^\theta .$$

Folglich hat man

$$\Big\{\sum_1^n \|T x_k\|^p\Big\}^{1/p} \leqslant \Phi(T_z) \sup_{\|a\|\leqslant 1} \Big\{\sum_1^n |\langle x_k, a\rangle|^q\Big\}^{1/q}.$$

Damit haben wir gezeigt, daß T ein absolut-(p, q)-summierender Operator mit

$$\pi_{(p,q)}(T) \leqslant [\pi_{(p_0,q)}, \pi_{(p_1,q)}]_\theta(T)$$

ist.

Als Anwendung der vorangehenden Untersuchungen erhalten wir den schon von B. S. Mitiagin (unveröffentlicht) und S. Kwapień [8] bewiesenen

Satz 10. *In dem unendlichdimensionalen separablen Hilbertraum H gelten die folgenden Aussagen:*

(1) $$\Pi_{(p,q)}(H, H) = L(H, H) \quad \textit{für} \quad 1/2+1/p \leqslant 1/q,$$

(2) $$\Pi_{(p,q)}(H, H) = S_r(H, H)$$

für $1/r = 1/2+1/p-1/q > 0$ *und* $1 \leqslant q \leqslant 2$,

(3) $$S_r(H, H) \subset \Pi_{(p,q)}(H, H) \subset S_p(H, H)$$

für $r = 2p/q$ *und* $2 \leqslant q < +\infty$.

Beweis. (1) Bereits von Mazur [10] wurde gezeigt, daß die Identität

$$\Pi_{(2,1)}(H, H) = L(H, H)$$

besteht. Da sich als Verallgemeinerung von Satz 5 aus [15] die Inklusion

$$\Pi_{(p_1,q_1)} \subset \Pi_{(p_2,q_2)} \quad \text{für } 0 \leqslant 1/q_1 - 1/q_2 \leqslant 1/p_1 - 1/p_2$$

ergibt, hat man insbesondere

$$\Pi_{(2,1)}(H, H) \subset \Pi_{(p,q)}(H, H) \quad \text{für } 1/2+1/p \leqslant 1/q.$$

Demnach gilt

$$\Pi_{(p,q)}(H, H) = L(H, H) \quad \text{für } 1/2+1/p \leqslant 1/q.$$

(2) Für $1 \leqslant q \leqslant 2$ wurde in [15] die Identität

$$\Pi_{(q,q)}(H, H) = S_2(H, H)$$

[5] Vgl. den Beweis von Theorem 13.1 (S. 175) in [4].

bewiesen. Andererseits besteht nach (1) die Beziehung

$$\Pi_{(p_0,q)}(H, H) = L(H, H) \quad \text{für } 1/p_0 = 1/q - 1/2.$$

Deshalb ergibt sich mit $\theta = 2/r$ wegen

$$1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/q$$

die Inklusion

$$\begin{aligned} S_r(H, H) &= [L(H, H), S_2(H, H)]_\theta \\ &= [\Pi_{(p_0,q)}(H, H), \Pi_{(q,q)}(H, H)]_\theta \subset \Pi_{(p,q)}(H, H). \end{aligned}$$

Aus der Voraussetzung

$$1/r = 1/2+1/p-1/q > 0$$

folgt leicht, daß der identische Operator nicht zu $\Pi_{(p,q)}(H, H)$ gehört. Deshalb besteht das Ideal $\Pi_{(p,q)}(H, H)$ nur aus kompakten Operatoren (vgl. [4], S. 89). Jeder absolut-(p, q)-summierende Operator T läßt sich demnach mit zwei Orthogonalsystemen $\{e_k\}$ und $\{f_k\}$ in der Form

$$Tx = \sum_1^\infty \lambda_k (x, e_k) f_k$$

darstellen. Setzt man

$$1/s = 1/q - 1/2 \quad \text{und} \quad x_k = |\lambda_k|^{r/s} e_k,$$

so bestehen die Beziehungen

$$\sup_{\|a\|\leqslant 1} \Big\{\sum_1^n |(x_k, a)|^q\Big\}^{1/q} \leqslant \Big\{\sum_1^n |\lambda_k|^r\Big\}^{1/s}$$

und

$$\Big\{\sum_1^n \|T x_k\|^p\Big\}^{1/p} = \Big\{\sum_1^n |\lambda_k|^r\Big\}^{1/p}.$$

Deshalb folgt aus der Ungleichung

$$\Big\{\sum_1^n \|T x_k\|^p\Big\}^{1/p} \leqslant \pi_{(p,q)}(T) \sup_{\|a\|\leqslant 1} \Big\{\sum_1^n |(x_k, a)|^q\Big\}^{1/q}$$

die Abschätzung

$$\Big\{\sum_1^n |\lambda_k|^r\Big\}^{1/r} \leqslant \pi_{(p,q)}(T) \quad \text{für } n = 1, 2, \ldots$$

Damit haben wir gezeigt, daß der Operator T zu $S_r(H, H)$ gehört.

(3) Für $2 \leqslant q < +\infty$ wurde in [13] die Beziehung

$$\Pi_{(q,q)}(H, H) = S_2(H, H)$$

bewiesen. Andererseits gilt die Identität

$$\Pi_{(\infty,q)}(H, H) = L(H, H).$$

Deshalb ergibt sich mit $\theta = q/p$ die Inklusion

$$S_r(H, H) = [L(H, H), S_2(H, H)]_\theta$$
$$= [\Pi_{(\infty,q)}(H, H), \Pi_{(q,q)}(H, H)]_\theta \subset \Pi_{(p,q)}(H, H).$$

Vermutlich besteht sogar die Identität

$$S_r(H, H) = \Pi_{(p,q)}(H, H) \quad \text{mit } r = 1p/q.$$

Bis jetzt ist jedoch nur die schwächere Aussage

$$\Pi_{(p,q)}(H, H) \subset S_p(H, H)$$

bekannt, die sich sehr einfach beweisen läßt.

6. Beispiele. Im folgenden betrachten wir ein offenes und beschänktes Gebiet Ω des n-dimensionalen euklidischen Raumes mit hinreichend glattem Rand. Für $l > 0$ und $1 \leqslant p < +\infty$ ist $W_p^l(\Omega)$ die vollständige Hülle des linearen Raumes $C^\infty(\overline{\Omega})$ in der Norm

$$\|u\|_{W_p^l} = \sum_{|\alpha| \leqslant l} \|D^\alpha u\|_{L_p} \quad (l = 1, 2, \ldots),$$

bzw.

$$\|u\|_{W_p^l} = \|u\|_{W_p^{[l]}} + \left(\sum_{|\alpha|=[l]} \int\int_{\Omega \times \Omega} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^p}{|x-y|^{n+(l-[l])p}} dx dy \right)^{1/p} \quad (l \neq 1, 2, \ldots) \ (^6).$$

Satz 11. *Für $l > n$ ist der Einbettungsoperator*

$$W_p^l(\Omega) \xrightarrow{I} L_p(\Omega)$$

nuklear.

Beweis. Wir setzen

$$\alpha_j(I) = \inf \|I - A\| \quad (j = 0, 1, \ldots),$$

wobei das Infimum über alle Operatoren $A \in L(W_p^l(\Omega) \times L_p(\Omega))$ gebildet wird, deren Bildraum höchstens j-dimensional ist. Birman und Solomjak [2], Theorem 3.3, haben gezeigt, daß dann die Abschätzung

$$\alpha_j(I) \leqslant cj^{-l/n}$$

gilt (⁷). Deshalb konvergiert die Reihe

$$\sum_0^\infty \alpha_i(I)$$

und nach [14], Theorem 3, ergibt sich die Nuklearität des Einbettungsoperators I.

Bemerkungen. (2) Aus dem bereits benutzten Theorem von Birman und Solomjak folgt, daß der Einbettungsoperator

$$W_p^l(\Omega) \xrightarrow{I} L_q(\Omega)$$

nuklear ist, wenn die Bedingungen

$$l > n \quad \text{für } p \geqslant q$$

bzw.

$$l > n(1+1/p-1/q) \quad \text{für } p \leqslant q$$

erfüllt sind.

(3) Mit anderen Methoden kann man beweisen, daß dieser Einbettungsoperator für beliebige Exponenten p und q unter der Voraussetzung $l > n$ nuklear ist. Diese Bedingung ist im Falle $p = q = 2$ nach [17], Satz 2, auch notwendig. Andererseits folgt für $l > n/p$ aus dem Diagramm

$$W_p^l(\Omega) \xrightarrow{I_1} L_\infty(\Omega) \xrightarrow{I_2} L_1(\Omega),$$

daß der Operator $I = I_2 I_1$ als Produkt des kompakten Operators I_1 mit dem integralen Operator I_2 nuklear sein muß (vgl. [6], Chap. I, S. 132). Diese Überlegungen führen zu der Vermutung, daß die folgenden Nuklearitätskriterien gelten:

$$l > n(1+1/p-1/q) \quad \text{für } p \geqslant q$$

bzw.

$$l > n \quad \text{für } p \leqslant q.$$

(4) Die Nuklearität des Einbettungsoperators

$$W_p^l(\Omega) \xrightarrow{I} W_q^k(\Omega)$$

hängt in analoger Weise von der Differenz $l-k$ ab. Der Fall $p = q = 2$ wurde bereits in [17], Satz 2, behandelt.

Als Anwendung von Satz 11 erhalten wir eine hinreichende Bedingung für die Nuklearität von schwach singulären Integraloperatoren.

(⁶) $C^\infty(\overline{\Omega})$ besteht aus allen in $\overline{\Omega}$ beliebig oft differenzierbaren komplexen Funktionen, und $[l]$ ist die größte ganze Zahl mit $[l] \leqslant l$. Die Länge des Multiindex $\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ wird durch den Ansatz $|\alpha| = \sum \alpha_i$ definiert.

(⁷) In den Überlegungen von Birman und Solomjak werden nur quaderförmige Gebiete betrachtet. Mit Hilfe des bekannten Fortsetzungsverfahrens gewinnt man die benötigte Abschätzung auch für beschränkte Gebiete mit glattem Rand (vgl. [1]).

Dabei sollen für die erzeugenden Kerne $K(x, y)$ stets die folgenden Voraussetzungen erfüllt sein:

(V_1) Die im Gebiet $\Omega\times\Omega$ definierte komplexe Funktion $K(x, y)$ ist in jedem Punkt (x, y) mit $x \neq y$ beliebig oft differenzierbar.

(V_2) Es gibt eine reelle Zahl ϱ, so daß für jeden Multiindex α mit einer geeigneten positiven Konstanten c_α die Abschätzung

$$|D_x^\alpha K(x, y)| \leqslant \frac{c_\alpha}{|x-y|^{\varrho+|\alpha|}}$$

gilt. Das Infimum aller zulässigen Werte von ϱ wird als *Index* des Kernes bzw. des zugehörigen Integraloperators bezeichnet.

Jeder Kern der Form

$$K(x, y) = \frac{K_0(x, y)}{|x-y|^\varrho} \quad \text{mit } K_0(x, y)\in C^\infty(\overline{\Omega\times\Omega})$$

genügt den geforderten Bedingungen. Die Zweckmäßigkeit der von uns benutzten Definition zeigt sich bei der Herleitung der folgenden Sätze und ihrer Anwendung auf die Integraldarstellungen von M. Nagumo (vgl. [11], S. 82).

Es ergibt sich

Satz 12. *Für jeden Kern $K(x, y)$ mit negativem Index ϱ wird durch die Zuordnung*

$$u(x) \xrightarrow{K} (Ku)(x) = \int_\Omega K(x, y)u(y)\,dy$$

in $\boldsymbol{L}_p(\Omega)$ ein nuklearer Integraloperator K definiert.

Beweis. Wählt man eine Zahl ε mit $0<\varepsilon<-\varrho$, so folgt aus der Ungleichung

$$\frac{|D^\alpha(Ku)(x) - D^\alpha(Ku)(y)|}{|x-y|^\varepsilon} \leqslant \int_\Omega \frac{|D_x^\alpha K(x, z) - D_y^\alpha K(y, z)|}{|x-y|^\varepsilon}|u(z)|\,dz \quad \text{mit } |\alpha| = n$$

unter Verwendung der für schwach singuläre Integraloperatoren typischen Abschätzungstechnik, daß K ein beschränkter linearer Operator von $\boldsymbol{L}_p(\Omega)$ in $\boldsymbol{W}_p^{n+\varepsilon}(\Omega)$ ist. Abschließend ergibt sich aus Satz 11, daß der Operator K nuklear ist, wenn man ihn als Abbildung von $\boldsymbol{L}_p(\Omega)$ in sich betrachtet.

Bemerkungen. (5) Der durch einen meßbaren und beschränkten Kern $K(x, y)$ in $\boldsymbol{L}_1(\Omega)$ erzeugte Integraloperator K ist nicht notwendig nuklear.

(6) Von besonderem Interesse ist die Nuklearität von Integraloperatoren im Hilbertraum $\boldsymbol{L}_2(\Omega)$. Setzt man voraus, daß der Kern $K(x, y)$ meßbar, beschränkt und positiv semidefinit ist, so erweist sich der zugehörige Operator als nuklear (vgl. [18], S. 341-342, und [4], S. 147). Für nicht hermitesche Kerne sind jedoch zusätzliche Bedingungen notwendig, wenn man Nuklearität erzwingen will (vgl. [4], S. 152). Es liegt deshalb nahe, von den betrachteten Kernen gewisse Differenzierbarkeitseigenschaften zu fordern. So wurde in [17], Satz 5, gezeigt, daß ein in $\boldsymbol{L}_2(\Omega)$ betrachteter Integraloperator K nuklear ist, wenn sein erzeugender Kern $K(x, y)$ zu $\boldsymbol{W}_{2,2}^{l,0}(\Omega\times\Omega)$ mit $l > n/2$ gehört ([8]). Die Ergebnisse von Krejn ([4], S. 157), Paraska ([12], S. 625) und Weidmann ([18], S. 344) sind Spezialfälle dieses Resultates.

(7) Es gibt Kerne mit dem Index 0, die einen nicht nuklearen Integraloperator in $\boldsymbol{L}_2(\Omega)$ erzeugen. Als Beispiel kann man den Integrationsoperator

$$u(x) \xrightarrow{K} (Ku)(x) = \int_0^x u(y)\,dy$$

im Hilbertraum $\boldsymbol{L}_2(0, 1)$ betrachten.

Wir bestimmen nun eine Klasse von schwach singulären Integraloperatoren, die zu dem Banachideal $\boldsymbol{S}_r = [\boldsymbol{L}, \boldsymbol{N}]_{1/r}$ gehören.

Satz 13. *Für jeden Kern $K(x, y)$, dessen Index ϱ kleiner als $n(1-1/r)$ ist, wird durch die Zuordnung*

$$u(x) \xrightarrow{K} (Ku)(x) = \int_\Omega K(x, y)u(y)\,dy$$

in $\boldsymbol{L}_p(\Omega)$ ein Integraloperator vom Typ $\boldsymbol{S}_r$ definiert.

Beweis. Für jede komplexe Zahl $z = \xi + i\eta$ mit $0 \leqslant \xi \leqslant 1$ erhält man durch den Ansatz

$$(T_z u)(x) = \int_\Omega K(x, y)|x-y|^{(z-1/r)n} u(y)\,dy$$

einen Integraloperator T_z mit dem Index $\varrho - (\xi - 1/r)n$. Es zeigt sich, daß für die Funktion T_z die im Abschnitt 2 geforderten Bedingungen erfüllt sind. Insbesondere folgt aus Satz 12, daß die Integraloperatoren $T_{1+i\eta}$ nuklear sind. Deshalb gehört der Integraloperator $K = T_{1/r}$ zu dem Banachideal $\boldsymbol{S}_r$.

Satz 14. *Für jede natürliche Zahl $l > n/r$ ist der Einbettungsoperator*

$$\boldsymbol{W}_p^l(\Omega) \xrightarrow{I} \boldsymbol{L}_p(\Omega)$$

vom Typ $\boldsymbol{S}_r$.

([8]) $\boldsymbol{W}_{2,2}^{l,0}(\Omega\times\Omega)$ ist die Vervollständigung der linearen Hülle der Funktionen $f(x)\cdot g(y)$, $f\in\boldsymbol{W}_2^l(\Omega_x)$, $g\in\boldsymbol{L}_2(\Omega_y)$, in der Norm $\big\| \|u(x, y)\|_{\boldsymbol{W}_2^l(\Omega_x)}\big\|_{\boldsymbol{L}_2(\Omega_y)}$. Durch Ω_x soll angedeutet werden, daß die Variable in Ω mit x bezeichnet wird.

Beweis. In [11], S. 82, wurde gezeigt, daß für alle Funktionen $u \in C_0^\infty(\Omega)$ die Integralidentität

$$u(x) = \sum_{|\alpha|=l} c_\alpha \int_\Omega \frac{(x-y)^\alpha}{|x-y|^n} D^\alpha u(y)\,dy$$

besteht. Da die Kerne

$$K^\alpha(x, y) = \frac{(x-y)^\alpha}{|x-y|^n} \quad \text{für } |\alpha| = l$$

den Index $n-l$ besitzen, gehört der Einbettungsoperator

$$\mathring{W}_p^l(\Omega) \xrightarrow{I} L_p(\Omega)$$

auf Grund der Beziehung

$$I = \sum_{|\alpha|=l} c_\alpha K^\alpha D^\alpha$$

zu dem Banachideal S_r. Dabei ist $\mathring{W}_p^l(\Omega)$ die in $W_p^l(\Omega)$ gebildete abgeschlossene Hülle von $C_0^\infty(\Omega)$. Die Behauptung unseres Satzes ergibt sich abschließend aus der Tatsache, daß jeder Banachraum $W_p^l(\Omega)$ durch ein Fortsetzungsverfahren in einen Banachraum $\mathring{W}_p^l(\Omega')$ mit $\overline{\Omega} \subset \Omega'$ eingebettet werden kann.

Bemerkungen. (8) Im Fall $p = 2$ läßt sich die Aussage von Satz 14 nicht verschärfen, denn nach [17], Satz 2, ist der Einbettungsoperator

$$W_2^l(\Omega) \xrightarrow{I} L_2(\Omega)$$

nicht vom Typ $S_{n/l}$.

(9) Da man erwarten kann, daß sich die Einschränkung auf natürliche Zahlen l lediglich aus der Beweismethode ergibt, gilt Satz 14 wahrscheinlich für alle Zahlen $l > n/r$.

(10) In Verallgemeinerung unserer Bemerkung (2) ist zu vermuten, daß der Einbettungsoperator

$$W_p^l(\Omega) \xrightarrow{I} L_q(\Omega)$$

zu dem Banachideal S_r gehört, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$l > n(1+1/p-1/q)/r \quad \text{für } p \geqslant q,$$

bzw.

$$l > n/r \quad \text{für } p \leqslant q.$$

Literaturnachweis

[1] О. В. Бесов, *О плотности финитных функций в $L_{p,\theta}$ и распространение функций*, Труды мат. инст. им. Стеклова 89 (1967), S. 18-30.

[2] М. Ш. Бирман и М. З. Соломяк, *Кусочно-полиномиальные приближения функций классов W_p^α*, Мат. сборник 73 (1967), S. 331-355.

[3] A. P. Calderón, *Intermediate spaces and interpolation, the complex method*, Studia Math. 24 (1964), S. 113-190.

[4] Й. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов*, Москва 1965.

[5] A. Grothendieck, *La théorie de Fredholm*, Bull. Soc. Math. France 84 (1956), S. 319-384.

[6] — *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, Mem. Amer. Math. Soc. 16 (1955).

[7] С. Г. Крейн и Ю. И. Петунин, *Шкалы банаховых пространств*, Успехи мат. наук 21 (1966), S. 89-168.

[8] S. Kwapień, *Some remarks on (p, q)-absolutely summing operators in l_p-spaces*, Studia Math. 29 (1968), S. 327-337.

[9] J. Lindenstrauss and A. Pełczyński, *Absolutely summing operators in L_p-spaces and their applications*, ibidem 29 (1968), S. 275-326.

[10] S. Mazur, *Une remarque sur l'homéomorphie des champs fonctionnels*, ibidem 1 (1930), S. 83-85.

[11] М. Нагумо, *Лекции по современной теории уравнений в частных производных*, Москва 1967.

[12] В. Й. Параска, *Об асимптотике собственных и сингулярных чисел линейных операторов, повышающих гладкость*, Мат. сборник 68 (110) (1965), S. 623-631.

[13] A. Pełczyński, *A characterization of Hilbert-Schmidt operators*, Studia Math. 28 (1967), S. 355-360.

[14] A. Pietsch, *Einige neue Klassen von kompakten linearen Abbildungen*, Revue Math. Pures Appl. 8 (1963), S. 427-447.

[15] — *Absolut p-summierende Abbildungen in normierten Räumen*, Studia Math. 28 (1967), S. 333-353.

[16] R. Schatten, *Norm ideals of completely continuous operators*, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1960.

[17] H. Triebel, *Über die Verteilung der Approximationszahlen kompakter Operatoren in Sobolev-Besov-Räumen*, Inventiones Math. 4 (1967), S. 275-293.

[18] J. Weidmann, *Integraloperatoren der Spurklasse*, Math. Annalen 163 (1966), S. 340-345.

Reçu par la Rédaction le 13. 2. 1968