STUDIA MATHEMATICA, T. XXXI. (1968)

Принцип сходимости последовательностей линейных положительных операторов

М. А. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ и Е. А. ЛИФШИЦ (Воронеж)

В конструктивной теории функций, в теории сингулярных интегралов и других разделах анализа важную роль играет тот факт, что сильная сходимость на пространстве B последовательности операторов A_n к единичному оператору I вытекает из сходимости на некотором конечномерном подпространстве B_0 и из положительности операторов A_n. Детальному анализу, начиная с работ П. П. Коровкина (см. [3]) были подвергнуты последовательности положительных операторов в пространствах C непрерывных функций. Особо отметим интересную работу Ю. А. Шашкина [9].

В настоящей статье предлагается общий принцип сходимости для операторов, действующих из банахова пространства в линейное топологическое пространство. В применении к пространствам функций этот принцип приводит к новым, повидимому, теоремам о сходимости последовательностей операторов по нормам различных пространств измеримых функций, о сходимости по мере.

Отметим, что настоящая работа возникла в связи с докладом В. К. Дзядыка (см. [1]) на Математическом конгрессе в Москве (август 1966 г.).

1. Основные понятия. Пусть B — вещественное банахово пространство с телесным конусом K. Пусть P — линейный оператор, действующий из B в линейное топологическое пространство E, нуль θ которого имеет счетную базу окрестностей. Подчеркнем, что пространство E не предполагается хаусдорфовым.

Точка $x_0 \in K$ называется [3] *точкой гладкости* (конуса K), если существует единственный (с точностью до нормы) положительный линейный функционал f_0 такой, что $f_0(x_0) = 0$; при этом говорят, что f_0 *проходит через точку гладкости* x_0. Пусть $\mathfrak{F}$ — система множеств нормированных положительных линейных функционалов, проходящих через точки гладкости, обладающая тем свойством, что пересечение любой последовательности множеств из $\mathfrak{F}$ содержит множество из $\mathfrak{F}$.

В дальнейшем предполагается, что P удовлетворяет двум требованиям:

1° *Если* $Px_n \to \theta$ $(x_n \in B, Px_n \in E)$, *то найдется такая подпоследовательность* x_{n_i}, *что* $f(x_{n_i}) \to 0$ *при всех* f *из некоторого* $F \in \mathfrak{F}$.

2° *Пусть* $u_n - Px_n (x_n \in K)$ *принадлежит замыканию* $\overline{PK}$ *множества* PK *в* E, *где* $u_n \in E$ — *последовательность, сходящаяся в* E *к некоторому элементу из* PK. *Пусть* $f(x_n) \to f(x^*)$ *при всех* f *из некоторого* $F \in \mathfrak{F}$. *Тогда* $Px_n \to Px^*$.

Заметим, что из свойства 2° вытекает непрерывность оператора P (выше, когда мы говорили о линейности оператора P, подразумевалась его однородность и аддитивность).

Мы будем изучать линейные (то-есть аддитивные и однородные) операторы A, действующие из B в E. Оператор A называется *положительным*, если $AK \subset \overline{PK}$.

Пусть B_0 — подпространство пространства B. *Тенью* $T(B_0)$ подпространства B_0 назовем совокупность всех таких $y \in B$, что для каждой последовательности положительных линейных операторов A_n из $A_n x \to Px$ $(x \in B_0)$ вытекает соотношение $A_n y \to Py$.

2. Теорема 1 (о полной тени). *Пусть* B_0 — *сепарабельное подпространство пространства* B, *содержащее внутренний элемент* x^1 *конуса* K. *Пусть множество* $F(B_0)$ *нормированных линейных положительных функционалов, проходящих через точки гладкости, лежащие в* B_0, *содержит некоторое множество* $F \in \mathfrak{F}$. *Тогда* $T(B_0) = B$.

Доказательство. Теорему будем доказывать от противного. Допустим, что некоторая последовательность положительных операторов A_n сходится к оператору P на B_0 и в то же время последовательность $A_n y - Py$ не сходится к θ. Без ограничения общности можно считать, что y — внутренний элемент конуса K. Кроме того, можно считать, что Py не принадлежит замыканию последовательности $A_n y$, то-есть $A_n y - Py \notin U$, где U — некоторая окрестность нуля θ пространства E.

Так как операторы A_n положительны, то можно выбрать такую последовательность $y_n \in K$, что $A_n y - Py_n \to \theta$. Пусть $x + \lambda y \in K$, где $x \in B_0$, а λ — некоторое число. Снова в силу положительности операторов A_n можно построить такую последовательность $z_n \in K$, что $A_n(x+\lambda y) - Pz_n \to \theta$. Тогда

$$P(x+\lambda y_n - z_n) = Px - A_n x + \lambda(Py_n - A_n y) + A_n(x+\lambda y) - Pz_n \to \theta.$$

В силу 1° найдется такое множество $F(x;\lambda) \in \mathfrak{F}$ и такая последовательность индексов n_i, что

$$\lim_{i\to\infty} f(x+\lambda y_{n_i} - z_{n_i}) = 0 \qquad (f \in F(x;\lambda)),$$

откуда вытекает неравенство

$$\underline{\lim}_{i\to\infty} f(x+\lambda y_{n_i}) \geqslant 0 \qquad (f \in F(x;\lambda)).$$

Пусть теперь задана последовательность элементов $x^k + \lambda_k y \in K$ $(x^k \in B_0)$. Повторяя проверенные выше рассуждения, можно построить такие множества $F(x^k; \lambda_k) \in \mathfrak{F}$ и такие последовательности индексов n_i^k, что каждая последовательность $y_{n_i^k}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ является подпоследовательностью последовательности $y_{n_i^{k-1}}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ и

$$\underline{\lim}_{i\to\infty} f(x^k + \lambda_k y_{n_i^k}) \geqslant 0 \qquad (f \in F(x^k; \lambda_k)).$$

Пусть

$$F_0 \subset \left[\bigcap_{k=1}^{\infty} F(x^k; \lambda_k)\right] \cap F(B_0), \qquad F_0 \in \mathfrak{F}.$$

Тогда для диагональной последовательности $y_{n_i^i}$

(1) $$\lim_{i\to\infty} f(x^k + \lambda_k y_{n_i^i}) \geqslant 0 \qquad (f \in F_0;\ k = 1, 2, \ldots).$$

Допустим, что

(2) $$\underline{\lim}_{i\to\infty} f(y_{n_i^i}) = f(y) \qquad (f \in F_0).$$

Пусть элемент x^1 входит в K вместе с шаровой окрестностью радиуса $\varrho > 0$. Тогда $\|y\| x^1/\varrho - y \in K$ и поэтому $u_i - Py_{n_i^i} \in \overline{PK}$, где

$$u_i = Py_{n_i^i} - A_{n_i^i} y + \frac{\|y\|}{\varrho} A_{n_i^i} x^1.$$

Так как $u_i \to \|y\| Px^1/\varrho$, то в силу свойства 2° $Py_{n_i^i} \to Py$, то-есть $Py_{n_i^i} - Py \to \theta$. Последовательность y_n была построена так, что выполнено соотношение $A_n y - Py_n \to \theta$. Поэтому

$$A_{n_i^i} y - Py = (A_{n_i^i} y - Py_{n_i^i}) + (Py_{n_i^i} - Py) \to \theta.$$

Мы пришли к противоречию, так как все элементы $A_{n_i^i} y - Py$ не принадлежат некоторой окрестности U нуля пространства E.

Таким образом, равенство (2) неверно. Это значит, что существует такой функционал $f_0 \in F_0$, что

(3) $$\overline{\lim}_{i\to\infty} |f_0(y_{n_i^i}) - f_0(y)| > 0.$$

Без ограничения общности можно считать, что элемент $x^1 - \varrho y/\|y\|$ входит в последовательность $x^k + \lambda_k y$, для которой доказано неравенство (1). Из этого неравенства вытекает, что

$$\varlimsup_{i\to\infty} f_0(y_{n_i^i}) \leqslant \frac{\|y\|}{\varrho} f_0(x^1). \tag{4}$$

Кроме этого,

$$\varliminf_{i\to\infty} f_0(y_{n_i^i}) \geqslant 0, \tag{5}$$

так как $y_{n_i^i} \in K$, а f_0 — положительный функционал. В силу (3) — (5) из последовательности $y_{n_i^i}$ можно выбрать подпоследовательность y_{m_i} $(i = 1, 2, \ldots)$ такую, что

$$\lim_{i\to\infty} f_0(y_{m_i}) = a \neq f_0(y). \tag{6}$$

Пусть f_0 проходит через точку гладкости $x_0 \in B_0$. Обозначим через R^3 трёхмерное пространство, натянутое на элементы x_0, x^1 и y. Определим на R^3 линейный функционал g равенством

$$g(ax_0 + \beta x^1 + \gamma y) = \beta f_0(x^1) + \gamma a \tag{7}$$

и покажем, что этот функционал положителен на $R^3 \frown K$.

Будем считать, что последовательность $x^k + \lambda_k y$, для которой установлено неравенство (1), выбрана так, что она содержит все положительные элементы вида $z_j + b_r y$, где z_j — счетное плотное в B_0 множество, а числа b_r рациональны (эти элементы определяются лишь подпространством B_0 и элементом y, но не зависят от последовательности A_n, и от функционалов, проходящих через точки гладкости).

Пусть $ax_0 + \beta x^1 + \gamma y$ — внутренний элемент конуса K. Последовательность $z_{j(k)} + b_{r(k)} y$ $(k = 1, 2, \ldots)$, сходящуюся к $ax_0 + \beta x^1 + \gamma y$, также можно считать положительной. Из

$$\lim_{k\to\infty} \|ax_0 + \beta x^1 + \gamma y - (z_{j(k)} + b_{r(k)} y)\| = 0$$

вытекает, что $b_{r(k)} \to \gamma$ и $z_{j(k)} \to ax_0 + \beta x^1$. Переходя в левой и правой частях тождества

$$g(ax_0 + \beta x^1 + \gamma y) =$$
$$f_0(z_{j(k)} + b_{r(k)} y_{m_i}) + f_0(ax_0 + \beta x^1 - z_{j(k)}) + (\gamma - b_{r(k)}) f_0(y_{m_i}) + \gamma[a - f_0(y_{m_i})]$$

к нижним пределам при $i \to \infty$ (при фиксированном k), получим в силу (1) неравенство

$$g(ax_0 + \beta x^1 + \gamma y) \geqslant f_0(ax_0 + \beta x^1 - z_{j(k)}) + (\gamma - b_{r(k)}) a.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу, убеждаемся в неотрицательности $g(ax_0 + \beta x^1 + \gamma y)$.

Итак, функционал (7) неотрицателен на $R^3 \frown K$. В силу известной теоремы М. Г. Крейна [5] функционал (7) можно продолжить до положительного функционала, определенного на всём B. Сохраним за продолженным функционалом то же обозначение g.

Функционал g очевидным образом проходит через точку гладкости x_0. Поэтому он отличается лишь множителем от функционала $f_0 : g(x) = \mu f_0(x)$ $(x \in B)$. Полагая $x = x^1$ и $x = y$, получим равенства $1 = \mu$, $a = \mu f_0(y)$. Следовательно, $a = f_0(y)$, а это противоречит (6). Теорема доказана.

Теорема 1, естественно, применяется в таких ситуациях, когда $F(B_0)$ достаточно богато функционалами. Полезно иметь в виду, что из существования в $F(B_0)$ двух различных функционалов вытекает существование в B_0 внутренних точек конуса K.

При доказательстве теоремы 1 фактически доказано более общее утверждение. Показано, что последовательность $A_n y$ сходится к Py, если положительные линейные операторы A_n определены лишь на B_0 и на y и если $A_n x \to Px$ при $x \in B_0$.

3. Первые приложения. В этом и следующем пунктах B — это пространство C непрерывных функций на некотором компакте Q; K — конус неотрицательных функций. Точками гладкости являются неотрицательные функции $x_0(t)$, обращающиеся в нуль лишь в одной точке; положительный нормированный функционал f_0, проходящий через точку гладкости $x_0(t)$, определяется равенством

$$f_0(x) = x(t_0) \quad (x \in C), \tag{8}$$

если $x_0(t_0) = 0$. Формула (8) позволяет в дальнейшем, там, где это удобно, рассматривать функционалы, проходящие через точки гладкости, как точки компакта Q.

Пусть на Q задана конечная счетно аддитивная непрерывная и регулярная мера; при этом все замкнутые множества измеримы. Систему $\mathfrak{F}$ составим из таких множеств, мера которых (если эти множества функционалов рассматривать как подмножества Q) совпадает с мерой всего Q.

Пусть E — пространство всех измеримых на Q функций с топологией, определенной сходимостью по мере; P — оператор естественного вложения C в E; $\overline{PK}$ — совокупность неотрицательных измеримых функций. Свойства 1° и 2° очевидны.

Теорема 2 (о сходимости по мере). *Пусть подпространство $B_0 \subset C$ обладает тем свойством, что множество $F(B_0)$ нормированных положительных функционалов, проходящих через точки гладкости из B_0, имеет полную меру. Пусть A_n — последовательность линейных поло-*

жительных операторов, действующих из C в E. Пусть, наконец, последовательности $A_n x - x$ сходятся по мере к нулю при $x \in B_0$.

Тогда сходятся по мере к нулю и все последовательности $A_n x - x$ при $x \in C$.

Для доказательства достаточно сослаться на теорему 1.

Пусть теперь E — банахово пространство измеримых функций, определенных на Q, обладающее следующими свойствами:

α_1. *Из сходимости последовательности функций $x_n \in E$ по норме вытекает сходимость по мере.*

α_2. *Непрерывные функции образуют плотное в E множество.*

α_3. *Норма монотонна: из $|x(t)| \leqslant |y(t)|$ $(y \in E)$ вытекает, что $x \in E$ и $\|x\|_E \leqslant \|y\|_E$.*

α_4. *Норма каждой функции $x \in E$ абсолютно непрерывна в том смысле, что $\|x(t)\,\varkappa(t;\Omega)\|_E \to 0$ при $\operatorname{mes}\Omega \to 0$, где $\varkappa(t;\Omega)$ — характеристическая функция множества $\Omega \subset Q$.*

Отметим, что в наших предположениях требования α_1-α_4 не являются независимыми; достаточно было потребовать выполнения свойств α_3 и α_4.

Перечисленными свойствами обладают основные функциональные пространства, применяющиеся в анализе: пространства L_p; пространства Орлича L_M^*, порожденные N-функциями $M(u)$, удовлетворяющими Δ_2-условию Юнга; пространства E_M, являющиеся замыканием множества непрерывных функций по любой норме Орлича; пространства Лоренца Λ_φ; пространства Марцинкевича M_φ^0 и др. (см., напр., [2], [5]).

Пусть снова P — оператор вложения C в E. Из теоремы 1 вытекает

Теорема 3 (о сходимости по норме). *Пусть подпространство $B_0 \subset C$ обладает тем свойством, что множество $F(B_0)$ нормированных положительных функционалов, проходящих через точки гладкости из B_0, имеет полную меру. Пусть A_n — последовательность линейных положительных операторов, действующих из C в A. Пусть, наконец, $\|A_n x - x\|_E \to 0$ при $x \in B_0$.*

Тогда $\|A_n x - x\|_E \to 0$ при всех $x \in C$.

Утверждения теорем этого пункта (как и дальнейшие теоремы статьи) можно усилить, если воспользоваться замечанием, сделанным в конце предыдущего пункта.

В связи с теоремами 2 и 3 возникает вопрос об описании таких подпространств $B_0 \subset C$, для которых множество $F(B_0)$ имеет полную меру. Ограничимся здесь лишь несколькими замечаниями.

Можно, в частности, искать такие подпространства B_0, что $F(B_0)$ содержит все функционалы вида (8). Такие подпространства в [4] названы *вполне насыщенными* (точками гладкости). Если Q — замкнутое ограниченное множество в m-мерном пространстве R^m точек $t = \{t_1, t_2, \ldots, t_m\}$, то вполне насыщенным будет $(m+2)$-мерное подпространство B_0 с базисом

$$e_0 = 1,\ e_1 = t_1,\ e_2 = t_2, \ldots,\ e_m = t_m,\ e_{m+1} = t_1^2 + t_2^2 + \ldots + t_m^2. \tag{9}$$

В частности, при $Q = [a, b]$ вполне насыщенным является подпространство, натянутое на три функции $1, t, t^2$. Если Q можно гомеоморфно вложить в $(m-1)$-мерную сферу, то (см. [4]) существует $(m+1)$-мерное вполне насыщенное подпространство.

Подпространства $B_0 \subset C$, для которых $F(B_0)$ имеет полную меру, могут иметь меньшую размерность, чем минимальная размерность тех подпространств $B_1 \subset C$, для которых $F(B_1)$ совпадает с множеством всех функционалов (8). Например (см. [4]), если Q — лист Мебиуса (с мерой, которая индуцирована мерой Лебега на прямоугольнике), то минимальная размерность указанных выше подпространств B_1, равна 5, но в то же время существует такое четырехмерное подпространство B_0, что $F(B_0)$ имеет полную меру.

4. Принцип локальности.

Теорема 4 (о локальной сходимости по мере). *Пусть Q_0 — некоторое подмножество Q с ненулевой мерой. Пусть подпространство $B_0 \subset C$ обладает тем свойством, что*

$$\operatorname{mes}[F(B_0) \cap Q_0] = \operatorname{mes} Q_0 \tag{10}$$

(здесь $F(B_0)$ рассматривается как подмножество Q). Пусть A_n — последовательность линейных положительных операторов, действующих из C в пространство измеримых функций. Пусть, наконец, последовательности

$$\varkappa(t; Q_0)\,[A_n x(t) - x(t)] \quad (x \in B_0), \tag{11}$$

где $\varkappa(t; Q_0)$ — характеристическая функция множества Q_0, сходятся по мере к нулю.

Тогда сходятся по мере к нулю и все последовательности

$$\varkappa(t; Q_0)\,[A_n x(t) - x(t)] \quad (x \in C). \tag{12}$$

Теорема 5 (о локальной сходимости по норме). *Пусть множество $Q_0 \subset Q$ и подпространство $B_0 \subset C$ удовлетворяют условиям теоремы 4. Пусть A_n — последовательность линейных положительных операторов, действующих из C в банахово пространство E измеримых функций, обладающее свойствами α_1-α_4. Пусть, наконец, последовательности* (11) *сходятся в E по норме к нулю.*

Тогда в E сходятся по норме к нулю и все последовательности (12).

Для доказательства этих теорем можно сослаться на теоремы 2 и 3, перейдя предварительно к новой мере на Q, определенной равенством

$$\text{mes}_1\, \Omega = \text{mes}\,(\Omega \cap Q_0) \qquad (\Omega \subset Q). \tag{13}$$

Можно непосредственно сослаться на теорему 1: в случае теоремы 4 тогда нужно определить в пространстве E измеримых функций сходимость последовательности x_n к нулю как сходимость по мере к нулю последовательности функций $\varkappa(t; Q_0)x_n(t)$, а в случае теоремы 5 определить в банаховом пространстве E топологию при помощи полунормы $\|x(t)\|_* = \|\varkappa(t; Q_0)x(t)\|_E$.

Заметим в заключение, что каждое подпространство $B_0 \subset C$, удовлетворяющее требованиям теорем 2 и 3, автоматически удовлетворяет требованиям теорем 4 и 5. Обратное, конечно, неверно.

5. Переход к другим пространствам. Вернемся к общей постановке вопроса в первых двух пунктах. Допустим, что оператор P является суперпозицией $P = P_2 P_1$ двух линейных операторов P_1 и P_2, первый из которых действует из B в некоторое пространство E_1, а второй — из E_1 в E. Пусть A_n — такая последовательность линейных операторов, действующих из E_1 в E, что действующие из B в E операторы A_nP_1 положительны.

Предположим, что подпространство $B_0 \subset B$ удовлетворяет условиям теоремы 1. Тогда из сходимости в E к нулю последовательностей $A_nP_1x - Px$ при $x \in B_0$ вытекает сходимость к нулю всех последовательностей $A_nP_1x - Px$ при $x \in B$. Иначе говоря, из сходимости в E к нулю последовательностей $A_ny - P_2y$ при $y \in P_1B_0$ вытекает сходимость к нулю последовательностей $A_ny - P_2y$ при $y \in P_1B$.

Будем считать, что P_1B плотно в E_1. Возникает естественный вопрос о том, сходятся ли к нулю все последовательности $A_ny - P_2y$ при $y \in E_1$. Ответ на этот вопрос, очевидно, положителен, если оператор P_2 непрерывен и если операторы A_n равномерно непрерывны в совокупности в том смысле, что из $y_n \to \theta$ $(y_n \in E_1)$ вытекает сходимость к нулю в E последовательности A_ny_n. В случае, когда пространства E_1 и E банаховы, равномерная непрерывность равносильна ограниченности в совокупности норм операторов A_n.

Эти рассуждения позволяют сформулировать аналоги теорем 2-5 для последовательностей положительных операторов A_n, определенных на отличных от C пространствах функций. В частности, здесь можно рассмотреть операторы, действующие из банахова пространства E_1, обладающего свойствами α_1-α_4, в более широкое такое же пространство E или в пространство S всех измеримых функций со сходимостью по мере. Читатель легко сформулирует соответствующие

утверждения, рассматривая в качестве P_1 и P_2 операторы естественного вложения C в E_1 и E_1 в E. Приведем одно менее тривиальное следствие.

Теорема 6 (о трехмерном подпространстве с полной тенью). *Пусть E — банахово пространство измеримых на Q функций, удовлетворяющее условиям α_1-α_4. Тогда существуют такие тройки элементов $e_1, e_2, e_3 \in E$, что любая последовательность действующих в E положительных линейных операторов A_n с ограниченными в совокупности нормами сильно сходится на всем E к единичному оператору, если только*

$$\lim_{n\to\infty}\|A_ne_1 - e_1\|_E = \lim_{n\to\infty}\|A_ne_2 - e_2\|_E = \lim_{n\to\infty}\|A_ne_3 - e_3\|_E = 0. \tag{14}$$

Ограничимся схемой доказательства. Как известно, можно установить взаимно однозначное соответствие $\xi = \varphi(t)$ между точками ξ отрезка $[0, \text{mes}\, Q]$ и точками $t \in Q$, при котором каждое измеримое множество $\Omega \subset Q$ переходит в измеримое множество $\varrho(\Omega) \subset [0, \text{mes}\, Q]$, причем $\text{mes}\, \Omega$ равна лебеговой мере множества $\varrho(\Omega)$.

Пусть B — пространство C непрерывных на $[0, \text{mes}\, Q]$ функций с конусом K неотрицательных функций. Определим оператор P равенством

$$Px(t) = x[\varphi(t)] \qquad (x(\xi) \in C). \tag{15}$$

Оператор P действует из C в E и удовлетворяет условиям 1° и 2° (систему $\mathfrak{F}$, как выше, построим из множеств функционалов (8), имеющих полную меру).

Положим $e_1 = 1$, $e_2 = \varphi(t)$, $e_3 = [\varphi(t)]^2$. Из (14) вытекает, что операторы A_nP сходятся к оператору P на трехмерном подпространстве B_0, натянутом на функции 1, ξ, ξ^2. Из теоремы 1 вытекает, что $\|A_nPx - Px\|_E \to 0$ при всех $x \in C$. Иначе говоря, $\|A_nx[\varphi(t)] - x[\varphi(t)]\|_E \to 0$ при всех непрерывных $x(\xi)$. Остается заметить, что функции $x[\varphi(t)]$, где $x(\xi)$ непрерывны, образуют плотное в E множество.

6. Сходимость почти всюду. В этом пункте рассматриваются операторы A, действующие в пространстве C непрерывных на Q функций.

Теорема 7 (принцип локальной равномерной сходимости). *Пусть Q_0 — содержащее не менее двух точек замкнутое подмножество Q. Пусть B_0 — такое подпространство пространства C, что $F(B_0) \supset Q_0$. Пусть последовательность линейных положительных операторов A_n обладает тем свойством, что*

$$\lim_{n\to\infty}\max_{t\in Q_0}|A_nx(t) - x(t)| = 0 \qquad (x \in B_0). \tag{16}$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \max_{t\in Q_0} |A_n x(t) - x(t)| = 0 \qquad (x \in C). \tag{17}$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 4 из [4]. Предположим противное. Тогда найдутся такая функция $y(t)\in C$, такая последовательность точек $t_k \in Q_0$ и такая последовательность индексов $n_k \to \infty$, что

$$|A_{n_k} y(t_k) - y(t_k)| \geqslant \varepsilon_0 > 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{18}$$

При этом без ограничения общности можно считать, что точки t_k сходятся к некоторой точке $t^* \in Q_0$. Рассмотрим последовательность функционалов

$$g_k(x) = A_{n_k} x(t_k) \qquad (x \in C). \tag{19}$$

Пусть $x^*(t)$ — такая лежащая в B_0 точка гладкости, что $x^*(t^*) = 0$, а $x^1(t)$ — строго положительная функция, лежащая в B_0. В силу (16) последовательности $A_{n_k} x^*(t)$ и $A_{n_k} x^1(t)$ равномерно сходятся на Q_0 соответственно к функциям $x^*(t)$ и $x^1(t)$; отсюда вытекают следующие равенства:

$$\lim_{k\to\infty} g_k(x^*) = 0, \qquad \lim_{k\to\infty} g\ (x\ ) = x^1(t^*). \tag{20}$$

Как показано в [4] (теорема 1), из (20) следует сходимость на всем пространстве C последовательности (19) к нормированному положительному функционалу, проходящему через точку гладкости x^*. Иначе говоря, $A_{n_k} x(t_k) \to x(t^*)$ $(x \in C)$ и поэтому

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} |A_{nk} y(t_k) - y(t_k)| \leqslant \lim_{k\to\infty} |A_{n_k} y(t_k) - y(t^*)| + \lim_{k\to\infty} |y(t_k) - y(t^*)| = 0.$$

Последнее равенство противоречит (18).

Теорема доказана.

Из теоремы 7 почти непосредственно следует

Теорема 8 (о сходимости почти всюду). *Пусть B_0 — такое подпространство пространства C, что $\operatorname{mes} F(B_0) = \operatorname{mes} Q$. Пусть последовательность положительных операторов A_n обладает тем свойством, что для каждой функции $x(t) \in B_0$ последовательность $A_n x(t)$ сходится к $x(t)$ почти всюду.*

Тогда при любой функции $x(t) \in C$ последовательность $A_n x(t)$ сходится к $x(t)$ почти всюду.

Для доказательства нужно лишь заметить, что из сходимости почти всюду последовательности $A_n x(t)$ следует равномерная сходимость на множествах $Q_\delta \subset F(B_0)$ сколь угодно мало по мере отличающихся от множества Q.

7. Развитие схемы Бернштейна-Коровкина. Пусть в пространстве C непрерывных на метрическом компакте Q функций существует такое конечномерное подпространство B_0 с базисом $e_1, \ldots, e_m$, что $\operatorname{mes} F(B_0) = \operatorname{mes} Q$. Тогда существуют такие (определённые на множестве полной меры) ограниченные функции $a_1(s), \ldots, a_m(s)$, что функция двух переменных

$$\varphi(s, t) = \sum_{i=1}^{m} a_i(s) e_i(t) \qquad (s \in F(B_0);\ t \in Q) \tag{21}$$

положительна при $t \neq s$ и обращается в нуль при $t = s$; будем считать функции $a_1(s), \ldots, a_m(s)$ измеримыми; пусть, кроме этого $\sum_{i=1}^{m} |a_i(t)| = 1$.

Пусть линейные положительные операторы A_n действуют из C в банахово пространство E измеримых функций, удовлетворяющее условиям α_1-α_4. Тогда из равенств

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n e_1 - e_1\|_E = \ldots = \lim_{n\to\infty} \|A_n e_m - e_m\|_E = 0 \tag{22}$$

вытекает равенство

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n y - y\|_E = 0 \qquad (y \in C). \tag{23}$$

Это утверждение, конечно, содержится в теореме 3; мы приведем доказательство по методу, который восходит к С. Н. Бернштейну и который детально разработан П. П. Коровкиным и его последователями для случаев, когда функция (21) непрерывна по совокупности переменных $s, t \in Q$.

Наши рассуждения, естественно, относятся к тому случаю, когда $F(B_0)$ содержит не менее двух различных точек. Тогда в B_0 существует функция $x^1(t)$, удовлетворяющая неравенству $x^1(t) \geqslant 1$.

Пусть $y \in C$. По каждому $\varepsilon > 0$ можно выбрать такое $\delta(\varepsilon) > 0$ что $|y(s)x^1(t) - x^1(s)y(t)| \leqslant \varepsilon x^1(t)$ при $\varrho(t, s) \leqslant \delta(\varepsilon)$.

Тогда

$$|y(s)x^1(t) - x^1(s)y(t)| \leqslant \varepsilon x^1(t) + \chi(s; \varepsilon)\varphi(s, t), \tag{24}$$

где

$$\chi(s; \varepsilon) = \frac{2\|y\|_c \|x^1\|_c}{\psi(s)}, \qquad \psi(s) = \inf_{\varrho(t,s) \geqslant \delta(\varepsilon)} \varphi(s, t).$$

Функция $\chi(s; \varepsilon)$ почти всюду конечна и измерима вместе с функциями $a_1(s), \ldots, a_m(s)$. Поэтому по каждому $\tau > 0$ можно выбрать такое множество $Q_\tau \subset Q$, что $\operatorname{mes} Q_\tau \leqslant \tau$, $Q \setminus Q_\tau \subset F(B_0)$ и что функция $\chi(s; \varepsilon)$ ограничена на $Q \setminus Q_\tau$. Обозначим через $\varkappa(s; Q_\tau)$ и $\varkappa(s; Q \setminus Q_\tau)$ характеристические функции соответственно множеств Q_τ и $Q \setminus Q_\tau$.

Из (24) следует неравенство

$$(25)\qquad |y(s)x^1(t)-x^1(s)y(t)|\leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon x^1(t)+a(\varepsilon;\tau)\varkappa(s;Q\setminus Q_\tau)\varphi(s,t)+\beta\varkappa(s;Q_\tau)x^1(t),$$

где $a(\varepsilon;\tau)$ и β — константы. Первое слагаемое в правой части очевидного неравенства

$$\|y-A_ny\|_E\leqslant\|y(t)x^1(t)-y(t)A_nx^1(t)\|_E+\|y(t)A_nx^1(t)-x^1(t)A_ny(t)\|_E$$

стремится к нулю при $n\to\infty$ в силу (22), так как $x^1(t)$ является линейной комбинацией функций $e_1,\ldots,e_m$. Поэтому для доказательства равенства (23) достаточно показать, что

$$(26)\qquad \lim_{n\to\infty}\|y(t)A_nx^1(t)-x^1(t)A_ny(t)\|_E=0.$$

Перепишем неравенство (25) в виде двух неравенств

$$-\varepsilon x^1(t)-a(\varepsilon;\tau)\varkappa(s;Q\setminus Q_\tau)\varphi(s,t)-\beta\varkappa(s;Q_\tau)x^1(t)\leqslant$$
$$\leqslant y(s)x^1(t)-x^1(s)y(t)\leqslant$$
$$\leqslant\varepsilon x^1(t)+a(\varepsilon;\tau)\varkappa(s;Q\setminus Q_\tau)\varphi(s,t)+\beta\varkappa(s;Q_\tau)x^1(t);$$

применим к этим неравенствам оператор A_n (при фиксированном n) и положим $s=t$. Из получившихся неравенств вытекает, что

$$(27)\qquad \|y(t)A_nx^1(t)-x^1(t)A_ny(t)\|_E\leqslant$$
$$\leqslant\varepsilon\|A_nx^1(t)\|_E+a(\varepsilon;\tau)\|\varkappa(t;Q\setminus Q_\tau)\sum_{i=1}^m a_i(t)A_ne_i(t)\|_E+\beta\|\varkappa(t;Q_\tau)A_nx^1(t)\|_E.$$

Первое слагаемое в правой части имеет порядок ε (нормы функций $A_nx^1(t)$ ограничены в совокупности); третье слагаемое при достаточно малых τ не превышает ε (так как нормы последовательности $A_nx^1(t)$ абсолютно равностепенно непрерывны). Следовательно, (26) будет доказано, если мы установим равенство

$$(28)\qquad \lim_{n\to\infty}\|\varkappa(t;Q\setminus Q_\tau)\sum_{i=1}^m a_i(t)A_ne_i(t)\|_E=0.$$

Но (28) непосредственно вытекает из (22) и из очевидной оценки

$$\|\varkappa(t;Q\setminus Q_\tau)\sum_{i=1}^m a_i(t)A_ne_i(t)\|_E=$$
$$=\|\varkappa(t;Q\setminus Q_\tau)\sum_{i=1}^m a_i(t)[A_ne_i(t)-e_i(t)]\|_E\leqslant\sum_{i=1}^m\|A_ne_i-e_i\|_E.$$

Переход от операторов A_n, действующих из C в пространство E, к операторам, действующим из некоторого пространства E_1 в E, очевиден, если C плотно в E_1 и если A_n равностепенно непрерывны как операторы из E_1 в E.

В работе Дзядыка [1] рассмотрен случай, когда $Q=[0,2\pi]$, B_0 — трехмерное подпространство с базисом $1,\sin t,\cos t$. В этом случае в качестве $\varphi(s,t)$ рассматривается функция $\sin^2[(t-s)/2]$. Дзядык рассматривает операторы со значениями в пространстве L_p.

Изложенные в этом пункте соображения, как уже говорилось, ранее применялись для случаев, когда функция (21) непрерывна по совокупности переменных. Освобождение от предположения о её непрерывности существенно расширяет возможности выбора функций $e_1,\ldots,e_m$. Пусть, например, C — пространство функций, непрерывных на $[-1,1]$; легко видеть, что $F(B_0)=F(C)$, если B_0 — трехмерное подпространство с базисом $e_1=1$, $e_2=t$, $e_3=t^2+|t|$; непрерывную функцию (21) в этом случае построить нельзя, но можно положить

$$\varphi(s,t)=(s-t)^2+|t|-t\operatorname{sign}s=s^2\cdot1-(2s+\operatorname{sign}s)t+t^2+|t|.$$

8. Дополнительные замечания. а. Замкнутость подпространства B_0 в основных теоремах статьи не играет роли — можно было перейти к линейным множествам. Мы не стали этого делать, так как основной интерес представляет случай конечномерных B_0.

б. Теоремы статьи по обычным схемам (см., напр., [1, 3]) могут быть применены к исследованию сингулярных интегралов и другим аналогичным вопросам.

в. З. Семадени обратил наше внимание на тот интересный факт, что из равенств $Ax=x$ при $x\in E_0$, где E_0 — некоторое специальное подпространство банахова пространства E, вытекает равенство $Ax=x$ при всех $x\in E$, если A нерастягивающий (в том смысле, что $\|A\|\leqslant1$).

Легко видеть, что развитая в [4] и в настоящей статье теория позволяет получить различные теоремы типа утверждений Семадени или теорем о том, что сходимость (по некоторой топологии) последовательности нерастягивающих операторов A_n к единичному оператору I на всем пространстве E вытекает из сходимости на подпространстве. Для этого достаточно ввести пространство $\boldsymbol{E}$ пар $\{t,x\}$ ($-\infty<t<\infty$, $x\in E$), выделить в нем конус K элементов $\{t,x\}$, для которых $t\geqslant0$, $\|x\|\leqslant t$, а затем заметить, что точки гладкости x^* единичного шара в E порождают точки гладкости $\{1,x^*\}$ конуса K и что операторы

$$\tilde A_n\{t,x\}=\{t,A_nx\}$$

положительны. Впрочем, нетрудно провести построения статьи [4] и настоящей работы непосредственно для нерастягивающих операторов.

Цитированная литература

[1] В. К. Дзядык, Матем. сборник 70 (112), № 4 (1966).

[2] П. П. Забрейко, Труды Воронежского семинара по функц. анализу, вып. 8 (1966).

[3] П. П. Коровкин, *Линейные операторы и теория приближений*, Москва 1959.

[4] М. А. Красносельский, В. С. Климов и Е. А. Лифшиц, Труды Московск. матем. о-ва 15 (1966).

[5] М. А. Красносельский и Я. Б. Рутицкий, *Выпуклые функции и пространства Орлича*, Москва 1958.

[6] М. Г. Крейн и М. А. Рутман, Успехи мат. наук 3, № 1 (1948).

[7] G. G. Lorentz, *Some new functional spaces*, Ann. Math. (2), 51 (1950).

[8] W. A. I. Luxemburg and A. C. Zaanen, *Notes on the Banach function spaces I-V*, Indagat. Math. 25 (1963).

[9] Ю. А. Шашкин, Изв. АН СССР, сер. матем., 26 (1962).

Reçu par la Rédaction le 10. 8. 1967

STUDIA MATHEMATICA, T. XXXI. (1968)

From triangular matrices to separated inductive limits

by

ALBERT WILANSKY (Lehigh)

Professor Mazur's prize-winning 1929 article, [5], contains some of the earliest and most successful applications of three fundamental tools of functional analysis, the closed graph and Hahn-Banach theorems and the principle of uniform boundedness. Subsequent developments in summability due to Mazur and Orlicz provided much of the impetus towards extending the Banach space theory to cover Fréchet spaces. In this article we shall show a thread of development which has its origin in the 1929 Mazur article. We shall also point out how the use of inductive limits simplifies, unifies, and generalizes some of the theory of interpolated and embedded spaces and of lattices of topologies found in articles by Steiner [11], [12], Schäffer [10], and Aronszajn and Gagliardo [1]. Also we recall the known fact that infima and quotients of linear topologies are special cases of inductive limits, which we shall use to set up their metrizability conditions. (Remarks 1, 2 following Theorem 17.)

If A is a *triangle* (a summation matrix with $a_{nk} = 0$ when $k > n$; $a_{nn} \neq 0$) the *convergence domain* c_A of A (set of sequences mapped by A into c, the convergent sequences) is made into a Banach space by the fact that $A : c_A \to c$ is an isomorphism onto. But the crucial fact about c_A, for Mazur's purpose, was this: if B is a *stronger* matrix ($c_B \supset c_A$), then $\lim_B$ is a continuous function on c_A ($\lim_B x = \lim\limits_n \sum\limits_k b_{nk} x_k$.) To prove this, it is sufficient to show that each x_k is continuous in x on c_A, for a standard argument about the pointwise limit of a sequence of continuous functions yields the continuity of $\lim_B$; see [14], Section 7.6, Theorem 3. The continuity of each x_k follows by the way that c_A is topologized; namely, for $x \in c_A$, $\|x\| = \|y\|_c = \sup |y_n|$ where $y = Ax \in c$. With $Z = A^{-1}$, we have

$$|x_k| = \Big|\sum z_{ki} y_i\Big| \leqslant \Big(\sum |z_{ki}|\Big) \cdot \|y\|.$$

The logical next step in this development, taken independently by Mazur-Orlicz [6], (these results were announced more than 20 years earlier!), and by Zeller [17], was to extend these ideas to non-triangular