STUDIA MATHEMATICA, T. XXXII. (1969)

О сходимости некоторого семейства функционалов в пространстве Орлича

Д. В. САЛЕХОВ и Е. М. СЕМЕНОВ (Воронеж)

Через L_M^* обозначается пространство Орлича функций $x(t)$, определенных на отрезке $[0,1]$ (см. [2]).

В настоящей статье изучается вопрос о сходимости к нулю семейства функционалов

$$f_\tau(x) = \frac{\int\limits_0^\tau x(t)\,dt}{\|\varkappa_{(0,\tau)}\|_N},$$

где $x(t)\in L_M^*$, $\varkappa_{(0,\tau)}(t)$ — характеристическая функция промежутка $(0,\tau)$ и $N(u)$ — функция дополнительная к N — фунции $M(u)$. Полученные результаты используются для нахождения необходимого и достаточного условия телесности некоторого конуса в пространствах Орлича.

1. В работе часто используются определения и факты из теории пространств Орлича, которые можно найти в [2].

Ниже используется свойство функции

$$\gamma(u) = M^{-1}\left(\frac{1}{u}\right)N^{-1}\left(\frac{1}{u}\right)u,$$

где $M^{-1}(u)$ — функция, обратная к $M(u)$. Известно [2], что при любом $u>0$

$$1 < \gamma(u) \leqslant 2. \tag{1}$$

Норма характеристической функции $\varkappa_e(t)$ в порстранстве Орлича L_M^* определяется формулой

$$\|\varkappa_e\|_M = me\,N^{-1}\left(\frac{1}{me}\right).$$

Пользуясь формулой нормы характеристической функции получим

$$f_\tau(x) = \frac{N^{-1}(1/\tau)}{\gamma(\tau)}\int\limits_0^\tau x(t)\,dt.$$

Теорема 1. *Для того чтобы $f_\tau(x)\to 0$ при $\tau\to 0$ для всех функций $x(t)\in L_M^*$ необходимо и достаточно, чтобы $M(u)$ удовлетворяла Δ_2-условию.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $M(u)$ не удовлетворяет Δ_2-условию. Тогда функция

$$\varphi(u)=\frac{M(2u)}{M(u)}$$

не ограничена на бесконечности. Поэтому можно выбрать такую монотонную последовательность $u_n\to\infty$, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\varphi(u_n)}<\infty$$

и $M(2u_1)>1$.

Рассмотрим функцию

$$x_0(t)=\begin{cases}2u_n, & x\in(\tau_{n+1},\tau_n],\\ 0, & x\in(\tau_1,1],\end{cases}$$

где $\tau_n=1/M(2u_n)$.

Функция $x_0(t)\in L_M^*$. Чтобы в этом убедиться достаточно показать, что функция $\frac{1}{2}x_0(t)$ принадлежит классу Орлича L_M. Последнее следует из неравенства

$$\int_0^1 M[\tfrac{1}{2}x_0(t)]\,dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\tau_{n+1}}^{\tau_n}M(u_n)\,dt<\sum_{n=1}^{\infty}M(u_n)\tau_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\varphi(u_n)}<\infty.$$

Оказывается

$$\overline{\lim_{\tau\to 0}}\,N^{-1}\left(\frac{1}{\tau}\right)\int_0^\tau x_0(t)\,dt>0.$$

Действительно, при любом n

$$N^{-1}\left(\frac{1}{\tau_n}\right)\int_0^{\tau_n}x_0(t)\,dt>N^{-1}\left(\frac{1}{\tau_n}\right)\tau_n 2u_n=N^{-1}\left(\frac{1}{\tau_n}\right)M^{-1}\left(\frac{1}{\tau_n}\right)\tau_n=\gamma(\tau_n).$$

Следовательно $f_{\tau_n}(x_0)>1$ при любом n.

Необходимость условия теоремы доказана.

Достаточность. Если функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_2-условию, то для любой функции $x(t)\in L_M^*$ выполняется

$$\lim_{\tau\to 0}\|x\varkappa_{(0,\tau)}\|_M=0.$$

Из неравенства Гельдера вытекает

$$|f_\tau(x)|=\frac{\left|\int_0^1 x(t)\varkappa_{(0,\tau)}^2(t)\,dt\right|}{\|\varkappa_{(0,\tau)}\|_N}\leqslant\|x\varkappa_{(0,\tau)}\|_M\qquad (x\in L_M^*).$$

Поэтому для любой функции $x(t)\in L_M^*$

$$\lim_{\tau\to 0}|f_\tau(x)|=0.$$

Теорема доказана.

Заметим, что вторая часть теоремы 1 является точной в следующем смысле. Если $\beta(t)\to\infty$ при $t\to 0$, то для любой последовательности $\tau_n\to 0$ в пространстве Орлича L_M^* найдется такая функция $y(t)$, что

$$\lim_{\tau_n\to 0}\beta(\tau_n)f_{\tau_n}(y)=\infty.$$

Это утверждение непосредственно следует из теоремы Банаха Штейнгауса и неравенства $\|f_\tau\|\geqslant\frac{1}{2}$ верного при любом τ.

Пусть

$$\psi(t)=M^{-1}\left(\frac{1}{t}\right)-\frac{1}{tp[M^{-1}(1/t)]},$$

где $p(u)$ — правая производная функции $M(u)$.

Так как функция $tM^{-1}(1/t)$ возрастает и вогнута на $(0,1)$, то $\psi(t)$ — неотрицательная убывающая функция, почти всюду совпадающая с правой производной функции $tM^{-1}(1/t)$.

Теорема 2. *Для того чтобы в пространстве Орлича L_M^* существовала функция $\overline{x}(t)$, удовлетворяющая условию*

$$\underline{\lim_{\tau\to 0}}\,f_\tau(\overline{x})>0, \tag{2}$$

необходимо и достаточно, чтобы $\psi(t)\in L_M^*$.

Доказательство. Необходимость. Пусть в пространстве Орлича L_M^* существует такая функция $\overline{x}(t)$, что $f_\tau(\overline{x})>a>0$ для всех $\tau\in(0,1)$. Без ограничения общности можно считать $a=2$. Из определения функции $\psi(t)$ и свойства функции $\gamma(u)$ следует:

$$N^{-1}\left(\frac{1}{\tau}\right)\int_0^\tau\psi(t)\,dt\leqslant 2.$$

Поэтому

$$N^{-1}\left(\frac{1}{\tau}\right)\int_0^\tau\psi(t)\,dt\leqslant f_\tau(\overline{x})=\frac{N^{-1}(1/\tau)}{\gamma(\tau)}\int_0^\tau\overline{x}(t)\,dt.$$

Отсюда
$$\int_0^\tau \psi(t)\,dt \leqslant \int_0^\tau \overline{x}(t)\,dt$$
при всех $\tau \in (0, 1)$.

Как отмечалось выше, функция $\psi(t)$ неотрицательная и убывающая. Поэтому в силу леммы 3 из [4] функция $\psi(t) \in L_M^*$.

Необходимость условия теоремы доказана.

Достаточность. Если $\psi(t) \in L_M^*$, то в качестве функции $\overline{x}(t)$ можно взять функцию $\psi(t)$. Действительно, при любом $\tau \in (0, 1)$
$$f_\tau(\psi) = \frac{N^{-1}(1/t)}{\gamma(\tau)} \int_0^\tau \psi(t)\,dt = \frac{N^{-1}(1/\tau)}{\gamma(\tau)} M^{-1}\left(\frac{1}{\tau}\right)\tau = 1.$$

Теорема доказана.

Следствие 1. *Если функция $M^{-1}(1/t) \in L_M^*$, то в пространстве L_M^* существует функция $\overline{x}(t)$, удовлетворяющая* (2).

Действительно, $\psi(t) < M^{-1}(1/t)$. Поэтому $\psi(t) \in L_M^*$.

Следствие 2. *Пусть $N(u)$ удовлетворяет Δ_2-условию. Для того чтобы в L_M^* существовала функция $\overline{x}(t)$, для которой выполняется* (2), *необходимо и достаточно, чтобы $M^{-1}(1/t) \in L_M^*$.*

Достаточность вытекает из следствия 1, докажем необходимость. Если функция $N(u)$ удовлетворяет Δ_2-условию, то при $u > u_0$ почти всюду выполняется
$$\frac{up(u)}{M(u)} \geqslant q > 1.$$

Тогда в некоторой окрестности нуля
$$\frac{1}{tp[M^{-1}(1/t)]} \leqslant \frac{1}{q} M^{-1}\left(\frac{1}{t}\right).$$

Отсюда следует, что
$$M^{-1}\left(\frac{1}{t}\right) \leqslant \frac{q}{q-1}\psi(t).$$

Так как $\psi(t) \in L_M^*$, то и $M^{-1}(1/t) \in L_M^*$.

Следствие доказано.

Следствие 3. *Если $M(u)$ удовлетворяет Δ_3-условию, то в L_M^* существует функция $\overline{x}(t)$, удовлетворяющая* (2).

Доказательство непосредственно вытекает из следствия 1 и результатов Рутицкого [3].

В этом случае функционал
$$\varphi(x) = \overline{\lim_{\tau\to 0}} f_\tau(x^*),$$

где $x^*(t)$ невозрастающая перестановка функции $|x(t)|$ (см. [5]), эквивалентен полунорме $d(x, E_M)$.

Если N-функция $M(u)$ удовлетворяет Δ^2-условию, то $M(u)$ удовлетворяет Δ_3-условию и применимо следствие 3.

Теорема 3. *Если N-функция $N(v)$ не удовлетворяет Δ_2-условию, то $M^{-1}(1/t) \notin L_M^*$.*

Доказательство. Пусть $x(t) \in L_M^*$ и $\|x\|_M \leqslant 1$. Так как
$$\int_0^1 N\left[N^{-1}\left(\frac{1}{\tau}\right)\varkappa_{(0,\tau)}(t)\right]dt = 1,$$
то
$$N^{-1}\left(\frac{1}{\tau}\right)\tau\,\frac{\left|\int_0^\tau x(t)\,dt\right|}{\tau} \leqslant 1 \tag{3}$$

Из (3) и (1) вытекает, что
$$\frac{1}{\tau}\left|\int_0^\tau x(t)\,dt\right| \leqslant M^{-1}\left(\frac{1}{\tau}\right). \tag{4}$$

Оператор
$$Ax = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau x(t)\,dt$$
действует из L_M^* в L_M^* тогда и только тогда, когда функция $N(v)$ удовлетворяет Δ_2-условию [4]. Поэтому, если $N(v)$ не удовлетворяет Δ_2-условию, то
$$\sup_{\|x\|_M \leqslant 1} \|Ax\|_M = \infty.$$

Из (4) и последнего соотношения следует $M^{-1}(1/t) \notin L_M^*$.

Теорема доказана.

Заметим, что Δ_3-условие не является необходимым для существования в L_M^* функции $\overline{x}(t)$, удовлетворяющей (2). Это вытекает из следующего примера.

Пример. Пусть главная часть N-функции $M(u)$ совпадает с функцией $u^{\sqrt{\ln u}}$. Функция $M(u)$ не удовлетворяет Δ_3-условию. Однако $M^{-1}(1/t) \in L_M^*$. Действительно,
$$\int_0^{1/e} M\left[\frac{1}{e}M^{-1}\left(\frac{1}{t}\right)\right]dt < \int_0^{1/e} \frac{dt}{te^{\ln^{1/3}(1/t)}} = \int_e^\infty \frac{dz}{e^{z^{1/3}}} < \infty.$$

2. В теории полуупорядоченных пространств важную роль играет свойство телесности конуса [1].

В пространстве Орлича L_M^* рассмотрим семейство K функций $x(t)$ таких, что

$$\int_0^\tau x(t)\,dt \geqslant 0$$

при всех $\tau \in (0,1)$.

Если $x, y \in K$ и $\alpha, \beta > 0$, то $\alpha x + \beta y \in K$. При фиксированном τ

$$g_\tau(x_n) = \int_0^\tau x(t)\,dt$$

есть непрерывный функционал в L_M^*, поэтому, если $x_n \to x$ в L_M^*, то $g_\tau(x_n) \to g_\tau(x)$. Отсюда следует замкнутость множества K. Таким образом множество K есть конус.

Теорема 4. *Для того чтобы конус K был телесен в L_M^* необходимо и достаточно, чтобы функция*

$$\psi(t) = M^{-1}\left(\frac{1}{t}\right) - \frac{1}{tp[M^{-1}(1/t)]}$$

принадлежала пространству L_M^*.

Доказательство. Необходимость. Предположим, что функция $\psi(t)$ не принадлежит L_M^*. Тогда в силу теоремы 2 для любой функции $x_0 \in K$ найдется последовательность чисел τ_n, для которой

$$\varepsilon_n = \frac{\int_0^{\tau_n} x_0(t)\,dt}{\|\varkappa_{(0,\tau_n)}\|_N} \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Покажем, что существует последовательность $y_n \notin K$, которая сходится к $x_0(t)$.

Положим

$$y_n(t) = x_0(t) - 2\varepsilon_n M^{-1}\left(\frac{1}{\tau_n}\right)\varkappa_{(0,\tau_n)}(t).$$

Тогда

$$\|x_0 - y_n\|_M = 2\varepsilon_n M^{-1}\left(\frac{1}{\tau_n}\right)\tau_n N^{-1}\left(\frac{1}{\tau_n}\right) = 2\varepsilon_n \gamma(\tau_n) \leqslant 4\varepsilon_n.$$

При любом n функция $y_n(t)$ не принадлежит конусу K. Действительно,

$$\int_0^{\tau_n} y_n(t)\,dt = \int_0^{\tau_n} x_0(t)\,dt - 2\varepsilon_n M^{-1}\left(\frac{1}{\tau_n}\right)\tau_n = \varepsilon_n\tau_n M^{-1}\left(\frac{1}{\tau_n}\right) - 2\varepsilon_n M^{-1}\left(\frac{1}{\tau_n}\right)\tau_n < 0.$$

Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть функция $\psi(t) \in L_M^*$. На основании теоремы 2 в L_M^* существует функция $\bar{x}(t)$, для которой

$$N^{-1}\left(\frac{1}{\tau}\right)\int_0^\tau \bar{x}(t)\,dt > a > 0$$

для всех $\tau \in (0,1)$. Если $\|y\|_M < a$, то

$$N^{-1}\left(\frac{1}{\tau}\right)\int_0^\tau y(t)\,dt \leqslant \|y\|_M < a.$$

Отсюда

$$N^{-1}\left(\frac{1}{\tau}\right)\int_0^\tau [\bar{x}(t) - y(t)]\,dt > a - \|y\|_M > 0,$$

т.е. элемент $\bar{x}(t) - y(t)$ принадлежит конусу K.

Теорема доказана.

Из теорем 1 и 2 вытекает, что если функция

$$\psi(t) = M^{-1}\left(\frac{1}{t}\right) - \frac{1}{tp[M^{-1}(1/t)]}$$

принадлежит пространству L_M^*, то $M(u)$ не удовлетворяет Δ_2-условию. Обратное, вообще говоря, не верно, как показывает следующий пример.

Пример 2. N-функцию $M(u)$ определим заданием ее производной:

$$p(u) = \begin{cases} k!, & u \in [(k-1)!, k!), \\ u, & 0 \leqslant u \leqslant 1. \end{cases}$$

Так как

$$M(2k!) \geqslant \int_{k!}^{2k!} p(u)\,du = k!(k+1)!,$$

а

$$M(k!) \leqslant (k!)^2,$$

то

$$M(2k!) > (k+1)M(k!),$$

следовательно $M(u)$ не удовлетворяет Δ_2-условию.

Функция $\psi(t)$ не принадлежит пространству L_M^*. Для этого достаточно показать, что при любом $l > 0$

$$\varrho(l\psi, M) = \int_0^1 M\left\{l\left[M^{-1}\left(\frac{1}{t}\right) - \frac{1}{tp[M^{-1}(1/t)]}\right]\right\}dt = \infty.$$

Сделаем замену $M^{-1}(1/t) = v$. Тогда

$$\varrho(l\psi, M) = \int_{M^{-1}(1)}^{\infty} M\left[l\left(v - \frac{M(v)}{p(v)}\right)\right] \frac{p(v)\,dv}{M^2(v)} \tag{5}$$

$$\geqslant \sum_{k=2}^{\infty} \int_{(k-1)!}^{k!} M\left[l\left(v - \frac{M(v)}{p(v)}\right)\right] \frac{p(v)\,dv}{M^2(v)}.$$

Пусть $v \in ((k-1)!, k!)$. Тогда

$$M(v) = \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{k-1} [n! - (n-1)!]n! + k![v - (k-1)!]$$

и

$$v - \frac{M(v)}{p(v)} = (k-1)! - \frac{1}{k!}\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{k-1} (n-1)!n!(n-1)\right]$$

$$> (k-1)! - \frac{3[(k-1)!]^2}{k!} > \frac{1}{2}(k-1)!$$

при $k > 6$.

В промежутке $((k-1)!, k!)$ функция

$$M\left[l\left(v - \frac{M(v)}{p(v)}\right)\right]$$

не зависит от v. Поэтому

$$\int_{(k-1)!}^{k!} M\left[l\left(v - \frac{M(v)}{p(v)}\right)\right] \frac{p(v)\,dv}{M^2(v)} \tag{6}$$

$$> M\left[\frac{l}{2}(k-1)!\right]\left[\frac{1}{M[(k-1)!]} - \frac{1}{M(k!)}\right]$$

$$> \frac{1}{2}\,\frac{M\left[\frac{l}{2}(k-1)!\right]}{M[(k-1)!]} > \frac{1}{2}\,\frac{\left[\frac{l}{2}(k-1)! - (k-2)!\right](k-1)!}{3[(k-1)!]^2} > \frac{l}{24}$$

для всех $k > \max[(4+l)/l, 6]$.

Из неравенств (5) и (6) вытекает, что функция

$$M^{-1}\left(\frac{1}{t}\right) - \frac{1}{tp\left[M^{-1}\left(\frac{1}{t}\right)\right]}$$

не принадлежит пространству L_M^*.

Из доказанных теорем вытекает, что если функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_2-условию, то конус K не телесен. Однако конус K может быть не телесным и в случае, когда $M(u)$ не удовлетворяет Δ_2-условию (пример 2).

Заметим, что теоремы 2 и 4 и вторую часть Теоремы 1 можно обобщить на произвольные симметричные пространства E, определение см. [4].

Цитированная литература

[1] М. А. Красносельский, *Положительные решения операторных уравнений*, Москва 1962.

[2] — и Я. Б. Рутицкий, *Выпуклые функции и пространства Орлича*, Москва 1958.

[3] Я. Б. Рутицкий, УМН 20, № 5 (1965).

[4] Е. М. Семенов, ДАН СССР 156, № 4 (1965).

[5] Г. Г. Харди, Д. Е. Литтльвуд и Г. Полиа, *Неравенства*, Москва 1948.

Reçu par la Rédaction le 22. 3. 1968