[3] J. H. Carruth, *A note on partially ordered compacta*, Pacific J. Math. 24 (1968), p. 229–231.
[4] J. J. Charatonik, *On ramification points in the classical sense*, Fund. Math. 51 (1962), pp. 229–252.
[5] — *Two invariants under continuity and the incomparability of fans*, Fund. Math. 53 (1964), pp. 187–204.
[6] — *Confluent mappings and unicoherence of continua*, Fund. Math. 56 (1964), pp. 213–220.
[7] — *On fans*, Dissertationes Mathematicae (Rozprawy matematyczne) 54, Warszawa 1964, pp. 1–40.
[8] H. S. Davis, D. P. Stadtlander and P. M. Swingle, *Properties of the set function T^n*, Portugal. Math. 21 (1962), pp. 113–133.
[9] Carl Eberhart, *A note on smooth fans*, Colloq. Math. 20 (1969), pp. 89–90.
[10] F. B. Jones, *Concerning non aposyndetic continua*, Amer. J. Math. 70 (1948), pp. 403–413.
[11] R. J. Koch and I. S. Krule, *Weak cutpoint ordering on hereditarily unicoherent continua*, Proc. Amer. Math. Soc. 11 (1960), pp. 679–681.
[12] R. J. Koch and L. F. McAuley, *Semigroups on continua ruled by arcs*, Fund Math. 56 (1964), pp. 1–8.
[13] C. Kuratowski, *Sur le problème des courbes gauches en Topologie*, Fund. Math. 15 (1930), pp. 271–283.
[14] — *Topologie II*, Warszawa 1961.
[15] H. C. Miller, *On unicoherent continua*, Trans. Amer. Math. Soc. 69 (1950), pp. 179–194.
[16] L. E. Ward, Jr., *Mobs, trees and fixed points*, Proc. Amer. Math. Soc. 8 (1957), pp. 798–804.

INSTITUTE OF MATHEMATICS OF THE WROCŁAW UNIVERSITY
UNIVERSITY OF KENTUCKY

Reçu par la Rédaction le 22. 5. 1968

Über die Mächtigkeiten und Unabhängigkeitsgrade der Basen freier Algebren, II*

von

Peter Burmeister (Bonn)

Einleitung. Im Zusammenhang mit den im ersten Teil behandelten Problemen tauchte auch die Frage auf, ob verschieden mächtige Basen einer Algebra verschiedene Unabhängigkeitsgrade besitzen können und was man über die Unabhängigkeitsklassen der $\mathfrak{A}$-Basen der $\mathfrak{A}$-frei erzeugten Algebren einer nichttrivialen primitiven Klasse $\mathfrak{A}$ aussagen kann. Dabei sei die Unabhängigkeitsklasse — die auch Unabhängigkeitsgrad genannt wird — einer Teilmenge M einer Algebra (A, f) (1) definiert als

$$\mathrm{ind}_{(A,f)} M := \{(B, g) \mid M \text{ ist } (B, g)\text{-freie Teilmenge (2) von } (A, f)\}.$$

Es ist nun leicht einzusehen, daß tatsächlich die Unabhängigkeitsklassen verschieden mächtiger Basen einer Algebra verschieden sein können. Dazu betrachte man etwa das in der Einleitung von Teil I erwähnte Beispiel von C. J. Everett: Sei nämlich (E, f) — kurz: E — ein Links—C—Modul über einem Ring C, wie ihn Everett in [5] angegeben

* Dissertation Bonn (D 5) 1966, Teil II. Gegenüber dem entsprechenden Teil (§ 6) der Dissertation ist die vorliegende Arbeit jedoch etwas erweitert worden, was an einigen Stellen auch Änderungen der Beweise zur Folge hatte. Bezüglich der verwendeten Begriffe aus der Allgemeinen Algebra wird auf Teil I verwiesen bzw. auf die im Literaturverzeichnis angegebenen Arbeiten von J. Schmidt und J. Słomiński, insbesondere [8], [9] und [11]. Wegen der Begriffe aus der Theorie der Kardinalzahlen vergleiche man H. Bachmann [1].

(1) Man beachte, daß unter einer Algebra (A, f) stets eine nicht notwendig vollständige universelle Algebra mit der Trägermenge A und der Struktur $f = (f_i)_{i \in I}$ verstanden werden soll. Wenn eine Algebra vollständig sein soll, so wird extra darauf hingewiesen. Werden mehrere Algebren gleichzeitig betrachtet, so sollen sie — sofern nichts anderes vermerkt ist — vom gleichen Typus (d. h. ähnlich) sein. Häufig wird, wenn keine Verwechselungen möglich sind, anstelle von (A, f) auch kurz A geschrieben:

(2) Zur Erinnerung: M heißt (B, g)-freie (auch: (B, g)-unabhängige) Teilmenge der Algebra (A, f), wenn jede Abbildung $\beta: M \to B$ zu einem Homomorphismus $\bar{\beta}$ von der von M in (A, f) erzeugten Unteralgebra $(C_f M, f|_{C_f M})$ in (B, g) fortgesetzt werden kann. M heißt (B, g)-Basis von (A, f), wenn M darüber hinaus (A, f) erzeugt: $C_f M = A$; ist dabei $(B, g) = (A, f)$, so heißt M Basis von (A, f).

hat, so daß E eine einelementige Basis $\{e\}$ und eine zweielementige Basis $\{u_1, u_2\}$ besitzt. Wir betrachten dabei E als universelle Algebra vom Typus $(2, 1, 0, (1)_{c\in C})$ mit der algebraischen Struktur $f = (+, -, 0, (c\,*)_{c\in C})$, wobei mit "$c\,*$" die Linksmultiplikation mit c bedeutet. In der direkten Summe von Moduln $E\oplus E$ bilden wir die (nicht mehr vollständige) Relativalgebra (A, f') mit $A := \boldsymbol{C}\{(e, 0)\} \cup \boldsymbol{C}\{(0, e)\}$ und $f' := f|_A$ (der totalen Einschränkung von f auf A). Dann ist $(A, f') \in \operatorname{ind}_E\{e\}$, da sich jede Abbildung von $\{e\}$ in A homomorph fortsetzen läßt; andererseits ist $(A, f') \notin \operatorname{ind}_E\{u_1, u_2\}$, da die durch $u_1 \to (e, 0)$ und $u_2 \to (0, e)$ gegebene Abbildung $\beta\colon \{u_1, u_2\} \to A$ nicht homomorph auf E fortsetzbar ist — man kann offensichtlich dabei die Struktur f' von A so vervollständigen (indem man etwa allen Paaren, für die die Addition in (A, f') nicht erklärt ist, das Element $(0, 0) \in A$ zuordnet, die restlichen Operationen sind ja schon vollständig), daß auch diese vollständige Algebra in $\operatorname{ind}_E\{e\}$, nicht aber in $\operatorname{ind}_E\{u_1, u_2\}$ liegt. Betrachtet man nun die primitive Klasse $\mathfrak{A} := \operatorname{ind}_E\{e\}$, so besitzt E eine Basis — nämlich $\{u_1, u_2\}$ —, die keine $\mathfrak{A}$-Basis ist.

Im folgenden sollen nun für die in Teil I, § 2 definierten primitiven Klassen $\mathfrak{K}_Y$ die Unabhängigkeitsklassen der $\mathfrak{K}_Y$-Basen der $\mathfrak{K}_Y$-frei erzeugten $\mathfrak{K}_Y$-Algebren verglichen werden, da für diese Klassen eine vollständige Beschreibung der auftretenden Fälle gegeben werden kann (§ 3). In den Fällen, in denen es ohne allzu großen Aufwand möglich ist, sollen auch allgemeinere Sätze bewiesen werden (§ 1 und § 2). Insgesamt erhält man damit einen groben Überblick über die sich ergebenden Möglichkeiten. So können die Unabhängigkeitsklassen nur verschieden sein für Basen mit Mächtigkeiten, die nicht oberhalb der kardinalen Dimension $\mathfrak{d}$ des betrachteten Typs liegen (Satz 1.4); und ist $\mathfrak{d} > \aleph_0$, so gibt es unter gewissen Voraussetzungen immer einen Bereich von Kardinalzahlen, so daß die Unabhängigkeitsgrade für Basen mit verschiedenen Mächtigkeiten daraus stets verschieden sind (Satz 2.1 mit seinen Korollaren).

§ 1. Einige allgemeine Sätze. Es bezeichne im folgenden $\mathfrak{S}_\Delta$ die Klasse aller Algebren eines beliebigen Typus $\Delta = (K_i)_{i\in I}$ der kardinalen Dimension $\mathfrak{d} = \mathfrak{d}(\Delta)$ (d. h. der kleinsten additiv unerreichbaren Kardinalzahl $\mathfrak{d}'$ mit $\mathfrak{d}' > |K_i|$ für alle $i \in I$) und dem Rang $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(\Delta) := \sup\{\mathfrak{n} \mid \mathfrak{n} < \mathfrak{d}\}$. Ferner sei $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{S}_\Delta$ eine nichttriviale primitive Klasse, d. h. $\mathfrak{A}$ enthalte eine mindestens zweielementige Algebra und sei abgeschlossen gegenüber Produkten $(\boldsymbol{P}(\mathfrak{A}) \subseteq \mathfrak{A})$, Unteralgebren $(\boldsymbol{U}(\mathfrak{A}) \subseteq \mathfrak{A})$ und homomorphen Bildern $(\boldsymbol{H}(\mathfrak{A}) \subseteq \mathfrak{A})$ (3). Bekanntlich existiert in $\mathfrak{A}$ dann zu jeder Menge M eine — bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte —

(3) Eine Algebra (B, g) ist hierbei homomorphes Bild der Algebra (A, f), wenn es einen Homomorphismus von (A, f) auf (B, g) gibt, wobei die Struktur g nicht notwendig von f induziert werden muß.

von M $\mathfrak{A}$-frei erzeugte $\mathfrak{A}$-Algebra, die wir mit $F(M, \mathfrak{A})$ oder genauer mit $(\boldsymbol{F}(M, \mathfrak{A}), h)$ bezeichnen wollen (4). Mit $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \mathfrak{z}, \mathfrak{q}\ldots$ sollen stets Kardinalzahlen bezeichnet werden, die wir als Mengen (Anfangszahlen unter den Ordinalzahlen) betrachten.

Satz 1.1. *Für $(A, f) \in \mathfrak{S}_\Delta$ gilt*

$$\operatorname{ind}_{(A,f)} \emptyset = \{(B, g) \mid (B, g) \in \mathfrak{S}_\Delta \text{ und es existiert ein Homomorphismus } \varphi\colon (\boldsymbol{C}_A\emptyset, f) \to (\boldsymbol{C}_B\emptyset, g)\}.$$

Korollar. *Enthält (A, f) keine Konstanten, d. h. ist $\boldsymbol{C}_A\emptyset = \emptyset$ — was insbesondere bei konstantenfreiem Typus Δ der Fall ist —, so ist*

$$\operatorname{ind}_{(A,f)} \emptyset = \mathfrak{S}_\Delta.$$

Satz 1.2. *Ist $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$, so gilt*

$$\operatorname{ind}_{F(\mathfrak{m},\mathfrak{A})} \mathfrak{m} \supseteq (\operatorname{ind}_{F(\mathfrak{n},\mathfrak{A})} \mathfrak{n}) - \{\emptyset\}.$$

Bemerkung. Ist $\mathfrak{m} \neq 0$, so gilt stets $\emptyset \in \operatorname{ind}_{F(\mathfrak{m},\mathfrak{A})} \mathfrak{m}$.

Denn man hat die folgende "Transitivität" der Unabhängigkeit: Ist $M \subseteq A$ eine (B, g)-freie Teilmenge von (A, f), $N \subseteq B$ eine (C, h)-freie Teilmenge von (B, g), und ist $|N| \geqslant \min\{|M|, \mathfrak{r}+1\}$, so ist M (C, h)-frei in (A, f) (5).

Satz 1.3. *Ist $(A, f) \in \mathfrak{S}_\Delta$, $M \subseteq A$, $M \neq \emptyset$ und existiert ein $i \in I$ sowie eine Folge $\mathfrak{a} \in M^{K_i}$, so daß $f_i(\mathfrak{a})$ erklärt ist, so ist $\operatorname{ind}_{(A,f)} M \neq \mathfrak{S}_\Delta$. Ist dabei $K_i \neq \emptyset$, so ist $\operatorname{ind}_{(A,f)} M \neq \operatorname{ind}_{(A,f)} \emptyset$.*

Denn wenn l die leere Struktur auf der Menge A bezeichnet, so ist die identische Abbildung id_M der Menge M auf sich, als Abbildung von M in die Algebra (A, l) betrachtet, nicht auf die von M in (A, f) erzeugte Unteralgebra $(\boldsymbol{C}_f M, f)$ homomorph fortsetzbar.

Satz 1.4. *Für $\mathfrak{m} \geqslant \mathfrak{r}+1$ gilt stets*

$$\operatorname{ind}_{(F(\mathfrak{m},\mathfrak{A}),h)} \mathfrak{m} = \mathfrak{A} \cup \{\emptyset\}.$$

Beweis. Im Falle $\mathfrak{d} = 0$ ist $\mathfrak{A}$ die Klasse aller Mengen und die Behauptung gilt sogar für $\mathfrak{m} = 0$. Sei daher $\mathfrak{d} \geqslant 1$, $\mathfrak{m} \geqslant \mathfrak{r}+1$ und $(A, f) \in (\operatorname{ind}_{F(\mathfrak{m},\mathfrak{A})} \mathfrak{m}) - \{\emptyset\}$, also insbesondere $A \neq \emptyset$. Dann betrachten wir $\mathrm{id}_A\colon A \to A$ als Abbildung aus $\boldsymbol{F}(A, \mathfrak{A})$ in A. Ist $B \subseteq A$ mit $|B| < \mathfrak{d}+1$, so ist $|B| \leqslant \mathfrak{r}+1$, also wegen der "Transitivität" der Unabhängigkeit ist $\mathrm{id}_A|_B$ homomorph fortsetzbar zu $\varphi_B\colon (\boldsymbol{C}_h B, h) \to (A, f)$. Die Vereinigung aller

(4) Für die algebraischen Strukturen der freien Algebren einer festen primitiven Klasse $\mathfrak{A}$ wird im allgemeinen stets die gleiche Bezeichnung gewählt — meist h $(= (h_i)_{i\in I})$ —, sofern keine Verwechselungen möglich sind. Ebenso sollen Relativ- und Unterstrukturen einer Algebra (A, f) auf einer Teilmenge $B \subseteq A$ im allgemeinen auch mit f bezeichnet werden: (B, f).

(5) Vgl. Burmeister–Schmidt [4], Satz 1.

solcher φ_B ist dann aber ein Homomorphismus $\varphi\colon (\boldsymbol{F}(A, \mathfrak{A}), h) \to (A, f)$ [6]. Da φ offensichtlich surjektiv ist, gilt also $(A, f) \in \boldsymbol{H}\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}$. Wegen der Bemerkung zu Satz 1.2 und $\mathfrak{A} \subseteq \mathrm{ind}_{F(\mathfrak{m},\mathfrak{A})}\mathfrak{m}$ ist Satz 1.4 damit bewiesen.

Bemerkung. Aus den in § 3 und in [4] betrachteten Beispielen folgt, daß die im obigen Satz 1.4 für einen Typus Δ angegebene Schranke — außer für $\mathfrak{d} = O$ — sich nicht verkleinern läßt.

Korollar 1. *Für* $\mathfrak{m}, \mathfrak{n} \geqslant \mathfrak{r}+1$ *gilt stets* $\mathrm{ind}_{F(\mathfrak{m},\mathfrak{A})}\mathfrak{m} = \mathrm{ind}_{F(\mathfrak{n},\mathfrak{A})}\mathfrak{n}$.

Korollar 2. *Es gilt stets* $\mathrm{ind}_{F(\mathfrak{d}+1,\mathfrak{A})}(\mathfrak{d}+1) = \bigcap_{O<\mathfrak{n}<\mathfrak{d}+1} \mathrm{ind}_{F(\mathfrak{n},\mathfrak{A})}\mathfrak{n} = \mathfrak{A} \cup \{\emptyset\}$.

Damit erweist es sich, daß die Unabhängigkeitsgrade $\mathrm{ind}_{F(\mathfrak{m},\mathfrak{A})}\mathfrak{m}$ und $\mathrm{ind}_{F(\mathfrak{n},\mathfrak{A})}\mathfrak{n}$ nur für $\mathfrak{m}, \mathfrak{n} < \mathfrak{r}+1$ und natürlich $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{n}$ voneinander verschieden sein können. Dies ist nun auch häufig, aber durchaus nicht immer der Fall, wie der folgende Satz zeigt. Dazu bezeichne wie in Teil I $R_\mathfrak{A}$ die durch $\mathfrak{A}$ auf der Klasse $\boldsymbol{K}$ aller Kardinalzahlen induzierte Äquivalenzrelation:

$$(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) \in R_\mathfrak{A} \colon \Longleftrightarrow (\boldsymbol{F}(\mathfrak{m}, \mathfrak{A}), h) \cong (\boldsymbol{F}(\mathfrak{n}, \mathfrak{A}), h) \qquad (\mathfrak{m}, \mathfrak{n} \in \boldsymbol{K}) .$$

Ferner existiere eine Kardinalzahl $\mathfrak{k}'$ mit $R_\mathfrak{A}(\mathfrak{k}') \neq \{\mathfrak{k}'\}$, wobei $R_\mathfrak{A}(\mathfrak{k}')$ die von $\mathfrak{k}'$ erzeugte Äquivalenzklasse bezeichne, und es sei $\mathfrak{k} := \min\{\mathfrak{k}' \mid R_\mathfrak{A}(\mathfrak{k}') \neq \{\mathfrak{k}'\}\}$ — man beachte $\mathfrak{k} > O$.

Satz 1.5. *Ist* $\mathfrak{k} < \aleph_0$, *so gilt für je zwei Kardinalzahlen* $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ *mit* $\mathfrak{k} < \mathfrak{m} < \mathfrak{n} < \aleph_0$: $\mathrm{ind}_{F(\mathfrak{m},\mathfrak{A})}\mathfrak{m} = \mathrm{ind}_{F(\mathfrak{n},\mathfrak{A})}\mathfrak{n}$.

Beweis. Wegen $R_\mathfrak{A}(\mathfrak{k}) \neq \{\mathfrak{k}\}$ existiert eine Kardinalzahl $\mathfrak{l}$: $\mathfrak{k} < \mathfrak{l} < \aleph_0$, so daß $(\boldsymbol{F}(\mathfrak{k}, \mathfrak{A}), h) \cong (\boldsymbol{F}(\mathfrak{l}, \mathfrak{A}), h)$. Nach Teil I, Satz 1.3 gibt es daher vollständige algebraische Operationen $f_\varkappa \in \boldsymbol{F}^{\mathfrak{l}}(\boldsymbol{F}(\mathfrak{l}, \mathfrak{A}))$ $(\varkappa \in \mathfrak{k})$ und $g_\lambda \in \boldsymbol{F}^{\mathfrak{k}}(\boldsymbol{F}(\mathfrak{k}, \mathfrak{A}))$ $(\lambda \in \mathfrak{l})$, so daß in allen Algebren $(B, h^B) \in \mathfrak{A}$ für die den $f_\varkappa$ und g_λ in (B, h^B) entsprechenden algebraischen Operationen $f_\varkappa^B$ und g_λ^B $(\varkappa \in \mathfrak{k}, \lambda \in \mathfrak{l})$ die folgenden Gleichungen gelten:

$$\text{(1)} \qquad \begin{aligned} f_\varkappa^B\big(g_\lambda^B(b_\sigma \mid \sigma \in \mathfrak{k}) \mid \lambda \in \mathfrak{l}\big) &= b_\varkappa \qquad \big((b_\sigma \mid \sigma \in \mathfrak{k}) \in B^{\mathfrak{k}},\ \varkappa \in \mathfrak{k}\big) , \\ g_\lambda^B\big(f_\varkappa^B(b_\tau \mid \tau \in \mathfrak{l}) \mid \varkappa \in \mathfrak{k}\big) &= b_\lambda \qquad \big((b_\tau \mid \tau \in \mathfrak{l}) \in B^{\mathfrak{l}},\ \lambda \in \mathfrak{l}\big) . \end{aligned}$$

Ist nun $\mathfrak{k} < \mathfrak{m} < \aleph_0$, so soll gezeigt werden, daß $\mathrm{ind}_{F(\mathfrak{m},\mathfrak{A})}\mathfrak{m} \subseteq \mathrm{ind}_{F(\mathfrak{m}+1,\mathfrak{A})}(\mathfrak{m}+1)$, woraus dann mit Satz 1.2 induktiv unsere Behauptung folgt: Dazu seien M, N zwei Mengen, $M \subset N$, $|M| = \mathfrak{m}$, $|N| = \mathfrak{m}+1$; ferner $(B, h^B) \in \mathrm{ind}_{F(M,\mathfrak{A})}M$, $B \neq \emptyset$, $\beta\colon N \to B$ eine beliebige Abbildung. Dann kann sofort angenommen werden, daß β injektiv ist, denn anderenfalls ist $|\beta(N)| \leqslant \mathfrak{m}$, es existieren also Abbildungen $\beta_1\colon N \to M$ und $\beta_2\colon M \to B$, so daß $\beta = \beta_2 \circ \beta_1$. Da sowohl β_1 als auch β_2 nach Voraussetzung homomorph fortgesetzt werden können auf $\boldsymbol{F}(N, \mathfrak{A})$ bzw. $\boldsymbol{F}(M, \mathfrak{A})$, ist dann nämlich auch β zu einem Homomorphismus $\bar{\beta}\colon (\boldsymbol{F}(N, \mathfrak{A}), h) \to (B, h^B)$ fortsetzbar.

[6] Vgl. Fußnote 5.

Sei also β injektiv, d. h. $|\beta(N)| = \mathfrak{m}+1 = |N|$. Wir betrachten eine Teilmenge $R \subseteq M$ mit $|R| = \mathfrak{k}+1$, also $|R| \leqslant \mathfrak{l}, \mathfrak{m}$. Wie wir gerade gesehen haben, ist dann $\beta|_R\colon R \to B$ homomorph fortsetzbar zu $\beta'\colon (\boldsymbol{C}_h R, h) \to (B, h^B)$. Die auf der Menge $B' := \beta'(\boldsymbol{C}_h R) \subseteq B$ erklärte Relativalgebra $(B', h^B|_{B'})$ ist dann homomorphes Bild einer $\mathfrak{A}$-Algebra, somit selbst $\mathfrak{A}$-Algebra. Wegen $|R| \leqslant \mathfrak{l}$ existiert eine Folge $\mathfrak{b} \in R^{\mathfrak{l}}$ mit dem Wertebereich Bild $\mathfrak{b} = R$. Sei nun für eine solche Folge $\mathfrak{b}$ $\bar{\mathfrak{b}} := (f_\varkappa(\mathfrak{b}) \mid \varkappa \in \mathfrak{k})$, $\mathfrak{b}' := \beta \circ \mathfrak{b}$, $\bar{\mathfrak{b}}' := \beta' \circ \bar{\mathfrak{b}} = (f_\varkappa^{B'}(\mathfrak{b}') \mid \varkappa \in \mathfrak{k})$, da ein Homomorphismus mit entsprechenden (vollständigen) algebraischen Operationen vertauschbar ist. Dann gilt $|\mathrm{Bild}\,\bar{\mathfrak{b}}| \leqslant \mathfrak{k}$, also für $V := \mathrm{Bild}\,\bar{\mathfrak{b}}' \cup (\beta(N) - \beta(R))$: $|V| \leqslant \mathfrak{k}+\mathfrak{m}+1-\mathfrak{k}-1 = \mathfrak{m}$, somit existiert eine surjektive Abbildung $\delta_0\colon M \to V$, die nach Voraussetzung homomorph fortsetzbar ist zu $\delta\colon (\boldsymbol{F}(M, \mathfrak{A}), h) \to (B, h^B)$. Dabei ist aber auch $\beta(R) = \mathrm{Bild}\,\mathfrak{b}' \subseteq (\boldsymbol{F}(M, \mathfrak{A}))$, da wegen (1) $\mathfrak{b}' = (g_\lambda^{B'}(\bar{\mathfrak{b}}') \mid \lambda \in \mathfrak{l}) = (g_\lambda^{B'}(\delta \circ \bar{\mathfrak{b}}) \mid \lambda \in \mathfrak{l}) = \delta \circ (g_\lambda(\bar{\mathfrak{b}}) \mid \lambda \in \mathfrak{l}) = \delta \circ \mathfrak{b}$. Damit ist aber $\beta(N) \subseteq \delta(\boldsymbol{F}(M, \mathfrak{A}))$, liegt also im Bild einer $\mathfrak{A}$-Algebra und β ist daher homomorph fortsetzbar zu $\bar{\beta}\colon (\boldsymbol{F}(N, \mathfrak{A}), h) \to (B, h^B)$ (man beachte $\bar{\beta}(\boldsymbol{F}(N, \mathfrak{A})) \subseteq \delta(\boldsymbol{F}(M, \mathfrak{A}))$), somit $(B, h^B) \in \mathrm{ind}_{F(N,\mathfrak{A})}N$.

Satz 1.6. *Sei* $\mathfrak{r} > \aleph_0$ *und* $\mathfrak{m}$ *eine additiv erreichbare Kardinalzahl mit* $\aleph_0 < \mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{r}$ *und* $R_\mathfrak{A}(\mathfrak{m}) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{q}[$, *wobei* $\mathfrak{g} < \mathfrak{m}$; *dann gilt* $\mathrm{ind}_{F(\mathfrak{m},\mathfrak{A})}\mathfrak{m} = \bigcap_{O<\mathfrak{n}<\mathfrak{m}} \mathrm{ind}_{F(\mathfrak{n},\mathfrak{A})}\mathfrak{n}$.

Beweis. Wie im Beweis von Satz 1.5 geht man zu einer Basis N von $\boldsymbol{F}(\mathfrak{m}, \mathfrak{A})$ mit einer Mächtigkeit $|N| < \mathfrak{m}$ über, um $\mathrm{ind}_{F(\mathfrak{m},\mathfrak{A})}\mathfrak{m} \supseteq \bigcap_{O<\mathfrak{n}<\mathfrak{A}} \mathrm{ind}_{F(\mathfrak{n},\mathfrak{A})}\mathfrak{n}$ zu erhalten (die andere Inklusion folgt aus Satz 1.2): Da $\mathfrak{m}$ additiv erreichbar ist, gibt es eine Darstellung $\mathfrak{m} = \sum_{t \in T} \mathfrak{n}_t$ mit $|T| < \mathfrak{m}$ und $\mathfrak{g} \leqslant \mathfrak{n}_t < \mathfrak{m}$ $(t \in T)$. Daher existiert eine Zerlegung von $\mathfrak{m}$ in disjunkte Teilmengen M_t $(t \in T)$ mit $|M_t| = \mathfrak{n}_t$. Man kann dann mit Hilfe geeigneter vollständiger algebraischer Operationen [7] zu einer Basis N von $\boldsymbol{F}(\mathfrak{m}, \mathfrak{A})$ übergehen mit $|N| = \sum_{t \in T} \mathfrak{g} = |T| \cdot \mathfrak{g} < \mathfrak{m}$, indem man in $(\boldsymbol{C}M_t, h)$ $(\cong (\boldsymbol{F}(M_t, \mathfrak{A}), h))$ zu einer Basis N_t der Mächtigkeit $|N_t| = \mathfrak{g}$ übergeht und $N := \bigcup_{t \in T} N_t \subseteq \boldsymbol{F}(\mathfrak{m}, \mathfrak{A})$ setzt. Ist dann $(A, f) \in \bigcap_{O<\mathfrak{n}<\mathfrak{m}} \mathrm{ind}_{F(\mathfrak{n},\mathfrak{A})}\mathfrak{n}$, $A \neq \emptyset$ und $\beta\colon \mathfrak{m} \to A$ eine beliebige Abbildung, so kann $\beta|_{M_t}$ $(t \in T)$ jeweils homomorph fortgesetzt werden. Auf diese Weise erhält man eine Abbildung γ_0 von N in A [8], die wegen $|N| < \mathfrak{m}$ homomorph fortsetzbar

[7] Vgl. Teil I, Satz 1.3.

[8] Es ist auch stets $\beta|_{M_t \cup M_{t'}}$ homomorph fortsetzbar, woraus man leicht die Eindeutigkeit von γ_0 erhält.

ist zu γ: $(\boldsymbol{F}(\mathfrak{m}, \mathfrak{A}), h) \to (A, f)$. Wie im Beweis von Satz 1.5 schließt man nun auf $\beta(\mathfrak{m}) = \bigcup_{t\in T} \beta(M_t) \subseteq \gamma(\boldsymbol{F}(\mathfrak{m}, \mathfrak{A}))$ und $\gamma|_{\mathfrak{m}} = \beta$, so daß sich γ auch als homomorphe Fortsetzung von β erweist.

Schließlich sei noch erwähnt

Satz 1.7. *Sei $\mathfrak{A}$ eine nichttriviale primitive Klasse von vollständigen Algebren, $\mathfrak{d} = \aleph_0$. $\mathfrak{A}$ werde durch eine Menge G von Gleichungen beschrieben, und zu jeder Gleichung $g \in G$ bezeichne V_g die Menge der in den Termen von g auftretenden Variablen. Ist ferner $s := \sup\{|K_i|, |V_g|| \ i \in I$ und $g \in G\}$, so gilt für alle Kardinalzahlen $\mathfrak{m} \geq s$: $\mathrm{ind}_{\boldsymbol{F}(\mathfrak{m},\mathfrak{A})} \mathfrak{m} = \mathfrak{A} \cup \{\emptyset\}$, d. h. oberhalb von s stimmen alle Unabhängigkeitsgrade überein.*

Es ist nämlich leicht einzusehen, daß dann alle nichtleeren Algebren $(A, f) \in \mathrm{ind}_{\boldsymbol{F}(\mathfrak{m},\mathfrak{A})} \mathfrak{m}$ für $\mathfrak{m} \geq s$ vollständig sein und die Gleichungen aus G erfüllen müssen, d. h. zu $\mathfrak{A}$ gehören.

§ 2. Freie Algebren der Durchschnitte von Unabhängigkeitsklassen. Im folgenden wollen wir $\bigcap_{0<\mathfrak{n}<\mathfrak{m}} \mathrm{ind}_{\boldsymbol{F}(\mathfrak{n},\mathfrak{A})} \mathfrak{n}$ mit $\mathfrak{B}_{\mathfrak{m}}$ und $\mathrm{ind}_{\boldsymbol{F}(\mathfrak{m},\mathfrak{A})} \mathfrak{m}$ mit $\mathfrak{A}_{\mathfrak{m}}$ abkürzen. Im übrigen sollen weiterhin die Generalvoraussetzungen von § 1 gelten.

Da nun die Unabhängigkeitsklassen primitiv sind, ebenso die Durchschnitte primitiver Klassen, ist für jede Kardinalzahl $\mathfrak{m}$ $\mathfrak{B}_{\mathfrak{m}}$ eine primitive Klasse, und es existieren in $\mathfrak{B}_{\mathfrak{m}}$ zu jeder Menge M von M $\mathfrak{B}_{\mathfrak{m}}$-frei erzeugte Algebren. Wegen $\mathfrak{A}_{\mathfrak{m}} \subseteq \mathfrak{B}_{\mathfrak{m}}$ existiert zu jeder Menge M ein Homomorphismus $\varphi_{\mathfrak{m},M}$: $(\boldsymbol{F}(M, \mathfrak{B}_{\mathfrak{m}}), g) \to (\boldsymbol{F}(M, \mathfrak{A}), h)$, der id_M fortsetzt: $\varphi_{\mathfrak{m},M}|_M = \mathrm{id}_M$. Wir betrachten dann die schwache Relativalgebra $(B_{\mathfrak{m},M}, h_{\mathfrak{m},M}) \subseteq (\boldsymbol{F}(M, \mathfrak{A}), h)$ (9), wobei $B_{\mathfrak{m},M} := \varphi_{\mathfrak{m},M}(\boldsymbol{F}(M, \mathfrak{B}_{\mathfrak{m}}))$ und $h_{\mathfrak{m},M}$ die schwächste algebraische Struktur auf $B_{\mathfrak{m},M}$ sei, so daß $\varphi_{\mathfrak{m},M}$: $(\boldsymbol{F}(M, \mathfrak{B}_{\mathfrak{m}}), g) \to (B_{\mathfrak{m},M}, h_{\mathfrak{m},M})$ Homomorphismus ist (= finale Struktur bezüglich $\varphi_{\mathfrak{m},M}$).

Lemma 2.1. a) *$\mathfrak{A}_{\mathfrak{m}} = \mathfrak{B}_{\mathfrak{m}}$ genau dann, wenn*

$$(\boldsymbol{F}(\mathfrak{m}, \mathfrak{A}), h) \cong (\boldsymbol{F}(\mathfrak{m}, \mathfrak{B}_{\mathfrak{m}}), g)\ ;$$

b) *ist $(B_{\mathfrak{m},\mathfrak{m}}, h_{\mathfrak{m},\mathfrak{m}}) \neq (\boldsymbol{F}(\mathfrak{m}, \mathfrak{A}), h)$, so ist $\mathfrak{A}_{\mathfrak{m}} \neq \mathfrak{B}_{\mathfrak{m}}$.*

Beweis. a) ist unmittelbar einsichtig. Zu b) beachte man, daß $\mathrm{id}_{\mathfrak{m}}$ nicht zu einem Homomorphismus von $(\boldsymbol{F}(\mathfrak{m}, \mathfrak{A}), h)$ in $(B_{\mathfrak{m},\mathfrak{m}}, h_{\mathfrak{m},\mathfrak{m}})$ fortsetzbar ist, wenn die beiden Algebren verschieden sind, es ist dann also $(B_{\mathfrak{m},\mathfrak{m}}, h_{\mathfrak{m},\mathfrak{m}}) \in \mathfrak{B}_{\mathfrak{m}} - \mathfrak{A}_{\mathfrak{m}}$, somit $\mathfrak{A}_{\mathfrak{m}} \neq \mathfrak{B}_{\mathfrak{m}}$.

Dieses Lemma und vor allem auch eine genauere Kenntnis der Algebren $(B_{\mathfrak{m},M}, h_{\mathfrak{m},M})$ bilden nun die Grundlage für unsere weiteren Vergleiche von Unabhängigkeitsklassen.

(9) Diese Inklusion ist so zu verstehen, daß $B_{\mathfrak{m},M} \subseteq F(M, \mathfrak{A})$ und $h_{\mathfrak{m},M,i} \subseteq h_i$ für jedes $i \in I$. Eine entsprechende Vereinbarung soll auch für andere mengentheoretische Relationen oder Operationen gelten, wenn sie auf Algebren angewendet werden.

Sei nun $\mathfrak{m}$ eine feste Kardinalzahl, M eine Menge mit $|M| \geq \mathfrak{m}$ — für $|M| < \mathfrak{m}$ ist nämlich $(B_{\mathfrak{m},M}, h_{\mathfrak{m},M}) = (\boldsymbol{F}(M, \mathfrak{A}), h) = (\boldsymbol{F}(M, \mathfrak{B}_{\mathfrak{m}}), g)$ —, ferner $T := \bigcup_{\mathfrak{n}<\mathfrak{m}} (B_{\mathfrak{m},M})^{\mathfrak{n}}$, d. h. jedes Element $t \in T$ ist eine Abbildung t: $\mathfrak{n} \to B_{\mathfrak{m},M}$ für ein $\mathfrak{n} < \mathfrak{m}$. Wegen $(B_{\mathfrak{m},M}, h_{\mathfrak{m},M}) \in \mathfrak{B}_{\mathfrak{m}}$ nach Konstruktion existiert zu jedem $t \in T$ eine homomorphe Fortsetzung φ_t: $(\boldsymbol{F}(\mathfrak{n}, \mathfrak{A}), h) \to (B_{\mathfrak{m},M}, h_{\mathfrak{m},M})$, falls $t \in (B_{\mathfrak{m},M})^{\mathfrak{n}}$.

Lemma 2.2. *$h_{\mathfrak{m},M}$ ist die finale Struktur bezüglich der Familie $(\varphi_t)_{t\in T}$ von Homomorphismen.*

Beweis. Sei f die finale Struktur bezüglich der φ_t ($t \in T$); sie existiert, weil es überhaupt eine Struktur auf $B_{\mathfrak{m},M}$ gibt, bei der alle φ_t Homomorphismen sind, und es ist $f \subseteq h$. Wegen $(B_{\mathfrak{m},M}, h_{\mathfrak{m},M}) \in \mathfrak{B}_{\mathfrak{m}}$ gilt $f \subseteq h_{\mathfrak{m},M}$ (10). Andererseits ist auch $(B_{\mathfrak{m},M}, f) \in \mathfrak{B}_{\mathfrak{m}}$, daher und wegen $f \subseteq h$ ist $\varphi_{\mathfrak{m},M}$ auch ein Homomorphismus von $(\boldsymbol{F}(M, \mathfrak{B}_{\mathfrak{m}}), g)$ in $(B_{\mathfrak{m},M}, f)$, woraus andererseits $h_{\mathfrak{m},M} \subseteq f$ folgt, da ja $h_{\mathfrak{m},M}$ final bezüglich $\varphi_{\mathfrak{m},M}$ ist. Daraus ergibt sich $f = h_{\mathfrak{m},M}$.

Berücksichtigt man nun noch einige bekannte Tatsachen über vollständige algebraische Operationen (11), so hat man das

Korollar. *Sei $\mathfrak{a} \in (B_{\mathfrak{m},M})^{K_i}$ für ein $i \in I$. Dann existiert $h_{\mathfrak{m},M,i}(\mathfrak{a})$ genau dann, wenn es eine Folge $\mathfrak{b} \in (B_{\mathfrak{m},M})^N$ für eine Menge N mit $|N| < \mathfrak{m}$ gibt und vollständige algebraische Operationen $g_\nu \in (\boldsymbol{F}^N(\boldsymbol{F}(M, \mathfrak{A})))$ $(\cong \boldsymbol{F}(N, \mathfrak{A}))$ gibt, so daß $\mathfrak{a}(\nu) = g_\nu(\mathfrak{b})$ und $\bar{h}_i\ (g_\nu|\ \nu \in N)$ existiert in $(\boldsymbol{F}^N(\boldsymbol{F}(M, \mathfrak{A})), \bar{h})$ — man beachte, daß dann auch stets $h_i(\mathfrak{a})$ existiert.*

Für additiv unerreichbare Kardinalzahlen $\mathfrak{m}$ können wir $(B_{\mathfrak{m},M}, h_{\mathfrak{m},M})$ noch anders beschreiben, dazu schicken wir folgende Definition voraus:

Definition. Sei (A, f) eine Algebra, $\mathfrak{s}$ eine Kardinalzahl und $D \subseteq A$ eine Teilmenge von A. Dann bezeichnen wir mit $U(\mathfrak{s}, D, (A, f))$ die Menge aller Unteralgebren (B, g) von (A, f), für die eine Menge $E \subseteq D$ mit $|E| < \mathfrak{s}$ und $C_f E = B$ existiert — eine solche Unteralgebra wollen wir auch als $(\mathfrak{s}, D)$-Unteralgebra von (A, f) bezeichnen.

Lemma 2.3. *Sei $\mathfrak{m}$ eine additiv unerreichbare Kardinalzahl, ferner $U := U(\mathfrak{m}, M, (\boldsymbol{F}(M, \mathfrak{A}), h))$; dann gilt*

$$(B_{\mathfrak{m},M}, h_{\mathfrak{m},M}) = \bigcup_{(B,g)\in U} (B, g)\ (12)\,.$$

Beweis. Sei $(A, f) := \bigcup_{(B,g)\in U} (B, g)$. Aus Lemma 2.2 kann man dann sofort $(A, f) \subseteq (B_{\mathfrak{m},M}, h_{\mathfrak{m},M})$ folgern. Es genügt daher offenbar, zu zeigen, daß $(A, f) \in \mathfrak{B}_{\mathfrak{m}}$. Nun ist $(B, g) \in \mathfrak{B}_{\mathfrak{m}}$ für jedes $(B, g) \in U$, da (B, g)

(10) Vgl. Fußnote 9.
(11) Vgl. Teil I, § 1.
(12) Vgl. Fußnote 9.

$\cong \big(\boldsymbol{F}(E,\mathfrak{A}),h\big)$. Ist nun $\mathfrak{n}<\mathfrak{m}$, $\beta\colon \mathfrak{n}\to A$, so existiert zu jedem $\nu\in\mathfrak{n}$ ein $N_\nu\subseteq M$, $|N_\nu|<\mathfrak{m}$, so daß $\beta(\nu)\in C_h N_\nu$, also $\beta(\mathfrak{n})\subseteq C_h\bigcup\limits_{\nu\in\mathfrak{n}} N_\nu\subseteq A$, denn es ist dann auch $|\bigcup\limits_{\nu\in\mathfrak{n}} N_\nu|<\mathfrak{m}$ (da $\mathfrak{m}$ additiv unerreichbar ist); es ist also $(C_h\bigcup\limits_{\nu\in\mathfrak{n}} N_\nu, h)\in U$ und β homomorph fortsetzbar zu $\bar\beta\colon \big(\boldsymbol{F}(\mathfrak{n},\mathfrak{A}),h\big)\to(A,f)$.

LEMMA 2.4. *Ist $\mathfrak{m}\geqslant\aleph_0$ additiv unerreichbar, so ist* $(B_{\mathfrak{m},M},h_{\mathfrak{m},M})\cong\big(\boldsymbol{F}(M,\mathfrak{B}_{\mathfrak{m}}),g\big)$, *wobei der Isomorphismus durch* id_M *induziert wird.*

Beweis. Wegen $(B_{\mathfrak{m},M},h_{\mathfrak{m},M})\in\mathfrak{B}_{\mathfrak{m}}$ genügt es, zu zeigen, daß $\mathfrak{B}_{\mathfrak{m}}\subseteq\mathrm{ind}_{(B_{\mathfrak{m},M},h_{\mathfrak{m},M})}M$. Sei also $\beta_0\colon M\to A$, wobei $(A,f)\in\mathfrak{B}_{\mathfrak{m}}$. Ist $N\subseteq M$, $|N|=\mathfrak{n}<\mathfrak{m}$, so ist $(C_{h_{\mathfrak{m},M}}N,h_{\mathfrak{m},M})\cong\big(\boldsymbol{F}(N,\mathfrak{A}),h\big)$ und $\beta_0|_N$ ist homomorph fortsetzbar zu $\beta_N\colon(C_{h_{\mathfrak{m},M}}N,h_{\mathfrak{m},M})\to(A,f)$. Mit Lemma 2.3 ist dann $\beta:=\bigcup\limits_{\substack{N\subseteq M\\|N|<\mathfrak{m}}}\beta_N$ auf ganz $B_{\mathfrak{m},M}$ definiert. β ist aber auch Abbildung, denn aus $N,N'\subseteq M$, $|N|,|N'|<\mathfrak{m}$ folgt $|N\cup N'|<\mathfrak{m}$, d. h. β_N und $\beta_{N'}$ ergeben sich als Einschränkungen von $\beta_{(N\cup N')}$. β ist aber auch Homomorphismus, denn wenn $h_{\mathfrak{m},M,i}(\mathfrak{a})$ erklärt ist, so liegt $\mathfrak{a}$ in einer $(\mathfrak{m},M)$-Unteralgebra (B,g) von $B_{\mathfrak{m},M}$ mit dem Erzeugendensystem $N\subseteq M$ mit $|N|<\mathfrak{m}$; daher ist $\beta\big(h_{\mathfrak{m},M,i}(\mathfrak{a})\big)=\beta_N\big(h_{\mathfrak{m},M,i}(\mathfrak{a})\big)=f_i(\beta_N\circ\mathfrak{a})=f_i(\beta\circ\mathfrak{a})$.

Bemerkung 2.1. Die Voraussetzung in Lemma 2.4, daß $\mathfrak{m}$ additiv unerreichbar sein soll, ist notwendig.

Denn sei $\mathfrak{m}$ additiv erreichbar, $\mathfrak{m}=\bigcup\limits_{t\in T}N_t$, $|T|<\mathfrak{m}$, $|N_t|<\mathfrak{m}$ $(t\in T)$ und $N_t\cap N_{t'}=\emptyset$ für $t,t'\in T$ mit $t\neq t'$. Ferner sei $I:=T\cup\{j\}$ mit $j\notin T$; $\Delta=(K_i)_{i\in I}$ mit $K_j=T$ und $K_i=N_i$ für $i\in T$. $\mathfrak{A}$ sei dann die primitive Klasse aller vollständiger Algebren (A,f), die durch die Gleichungen (2) definiert sind:

$$f_j\big(f_t(\mathfrak{a}_t)|\ t\in T\big)=f_j\big(f_{\sigma(t)}(\mathfrak{a}_{\sigma(t)})|\ t\in T\big) \tag{2}$$

für jede Permutation σ von T und alle Folgen $\mathfrak{a}_t\in A^{N_t}(t\in T)$.

Betrachten wir $\boldsymbol{F}(\mathfrak{m},\mathfrak{a})$ und $\boldsymbol{F}(\mathfrak{m},\mathfrak{B}_{\mathfrak{m}})$, so gilt

$$f_j\big(f_t(\mathrm{id}_{N_t})|\ t\in T\big)=f_j\big(f_{\sigma(t)}(\mathrm{id}_{N_{\sigma(t)}})|\ t\in T\big) \tag{3}$$

für jede Permutation σ von T zwar in $\boldsymbol{F}(\mathfrak{m},\mathfrak{A})$, nicht aber in $\boldsymbol{F}(\mathfrak{m},\mathfrak{B}_{\mathfrak{m}})$, da in $\boldsymbol{F}(\mathfrak{m},\mathfrak{B}_{\mathfrak{m}})$ die Gleichungen (3) für Folgen, die aus Basiselementen bestehen, nur dann gelten, wenn $|\bigcup\limits_{t\in T}\mathrm{Bild}\,\mathfrak{a}_t|<\mathfrak{m}$, während $|\bigcup\limits_{t\in T}N_t|=\mathfrak{m}$. Man sieht auch leicht, daß es für das Beispiel nicht wesentlich ist, daß $\mathfrak{m}=\sup\{|K_i|\mid i\in I\}$ ist.

Bemerkung 2.2. Auch die Voraussetzung, daß $\mathfrak{m}\geqslant\aleph_0$ sein soll, ist in Lemma 2.4 notwendig, zumindest muß $\mathfrak{m}\neq 2$ vorausgesetzt werden.

Denn sei $\mathfrak{A}$ eine primitive Klasse vollständiger Algebren (A,f) vom Typus (2), und für die eine zweistellige Operation f gelte

$$f(a,b)=f(b,a)=f(a,a)=f(b,b)\quad\text{für alle } a,b\in A\,.$$

Dann ist $\boldsymbol{F}(2,\mathfrak{A})=\{O,1,a\}$, und damit dreielementig, während $\boldsymbol{F}(2,\mathfrak{B}_2)=\{O,1,a,b\}$ vierelementig ist.

Aus Lemma 2.1 und Lemma 2.4 folgt nun unmittelbar

SATZ 2.1. *Ist $\mathfrak{m}\geqslant\aleph_0$ additiv unerreichbar, so gilt* $\mathrm{ind}_{\boldsymbol{F}(\mathfrak{m},\mathfrak{A})}\mathfrak{m}=\bigcap\limits_{O<\mathfrak{n}<\mathfrak{m}}\mathrm{ind}_{\boldsymbol{F}(\mathfrak{n},\mathfrak{A})}\mathfrak{n}$ *genau dann, wenn* $(B_{\mathfrak{m},\mathfrak{m}},h_{\mathfrak{m},\mathfrak{m}})=\big(\boldsymbol{F}(\mathfrak{m},\mathfrak{A}),h\big)$.

Mit Lemma 2.4 erhält man daraus

SATZ 2.2. *Ist $\mathfrak{m}\geqslant\aleph_0$ eine additiv unerreichbare Kardinalzahl und existiert in $\big(\boldsymbol{F}(\mathfrak{m},\mathfrak{A}),h\big)$ für ein $i\in I$ eine Folge $\mathfrak{a}\in\boldsymbol{F}(\mathfrak{m},\mathfrak{A})^{K_i}$ mit* $\mathrm{Bild}\,\mathfrak{a}\supseteq\mathfrak{m}$, *so daß $h_i(\mathfrak{a})$ erklärt ist, so gilt für alle additiv unerreichbaren Kardinalzahlen $\mathfrak{z}$ mit $\aleph_0\leqslant\mathfrak{z}\leqslant\mathfrak{m}$*

$$\mathrm{ind}_{\boldsymbol{F}(\mathfrak{z},\mathfrak{A})}\mathfrak{z}\neq\bigcap_{O<\mathfrak{n}<\mathfrak{z}}\mathrm{ind}_{\boldsymbol{F}(\mathfrak{n},\mathfrak{A})}\mathfrak{n}\,.$$

KOROLLAR 1. *Ist $\mathfrak{A}$ eine primitive Klasse vollständiger Algebren, $\mathfrak{d}>\aleph_0$, so gilt für alle additiv unerreichbaren Kardinalzahlen $\mathfrak{m}$ mit $\aleph_0\leqslant\mathfrak{m}<\mathfrak{d}$*

$$\mathrm{ind}_{\boldsymbol{F}(\mathfrak{m},\mathfrak{A})}\mathfrak{m}\neq\bigcap_{O<\mathfrak{n}<\mathfrak{m}}\mathrm{ind}_{\boldsymbol{F}(\mathfrak{n},\mathfrak{A})}\mathfrak{n}\,.$$

KOROLLAR 2. *Ist $\mathfrak{A}$ eine primitive Klasse vollständiger Algebren, so gilt für $\aleph_0\leqslant\mathfrak{m}<\mathfrak{n}\leqslant\mathfrak{r}$*

$$\mathrm{ind}_{\boldsymbol{F}(\mathfrak{m},\mathfrak{A})}\mathfrak{m}\neq\mathrm{ind}_{\boldsymbol{F}(\mathfrak{n},\mathfrak{A})}\mathfrak{n}\,.$$

Denn es existiert dann stets eine additiv unerreichbare Kardinalzahl $\mathfrak{s}$ mit $\mathfrak{m}<\mathfrak{s}\leqslant\mathfrak{n}$, so daß Korollar 1 anwendbar ist:

$$\mathrm{ind}_{\boldsymbol{F}(\mathfrak{m},\mathfrak{A})}\mathfrak{m}\supsetneqq\mathrm{ind}_{\boldsymbol{F}(\mathfrak{s},\mathfrak{A})}\mathfrak{s}\supseteq\mathrm{ind}_{\boldsymbol{F}(\mathfrak{n},\mathfrak{A})}\mathfrak{n}\,.$$

§ 3. Die Unabhängigkeitsklassen der $\mathfrak{K}_Y$-Basen. $\mathfrak{K}_Y$ sei die wie in Teil I, § 2 zu einer nichtleeren Menge Y mindestens zweielementiger abgeschlossener und nicht die Null enthaltender Intervalle der Klasse $\boldsymbol{K}$ aller Kardinalzahlen definierte primitive Klasse. Ferner sei wie in Teil I für jedes $y\in Y$ definiert:

$$\mathfrak{k}_y:=\min\{\mathfrak{m}\mid\mathfrak{m}\in y\}\,,\qquad \mathfrak{l}_y:=\max\{\mathfrak{m}\mid\mathfrak{m}\in y\};$$
$$K_y:=\{(O,y)\}\times\mathfrak{k}_y\,,\qquad L_y:=\{(1,y)\}\times\mathfrak{l}_y\,.$$

Ferner $I:=I_Y:=\bigcup\limits_{y\in Y}(K_y\cup L_y)$, $\Delta_Y:=(S_i)_{i\in I}$, wobei

$$S_i:=\begin{cases}L_y, & \text{falls } i\in K_y;\\ K_y, & \text{falls } i\in L_y\,.\end{cases}$$

Ist $(A, h) \in \mathfrak{K}_Y$, so schreiben wir auch

$$h_i = \begin{cases} f_i^y, & \text{falls } i \in L_y; \\ g_i^y, & \text{falls } i \in K_y; \end{cases}$$

und in (A, h) gilt dann für alle $\mathfrak{a} \in A^{K_y}$ und $\mathfrak{b} \in A^{L_y}$ und alle $y \in Y$:

$$\begin{aligned} &\big(g_\varkappa^y(f_\lambda^y(\mathfrak{a}) \mid \lambda \in L_y) \mid \varkappa \in K_y\big) = \mathfrak{a}; \\ &\big(f_\lambda^y(g_\varkappa^y(\mathfrak{b}) \mid \varkappa \in K_y) \mid \lambda \in L_y\big) = \mathfrak{b}. \end{aligned} \tag{4}$$

Für $\big(f_\lambda^y(\mathfrak{a}) \mid \lambda \in L_y\big)$ schreiben wir auch manchmal $f^y(\mathfrak{a})$, entsprechend $g^y(\mathfrak{b})$ anstelle von $\big(g_\varkappa^y(\mathfrak{b}) \mid \varkappa \in K_y\big)$.

Schließlich sei noch $\mathfrak{k} := \min\{\mathfrak{k}_y, \mathfrak{l}_y \mid y \in Y\}$. Dann gilt

Satz 3.1. *Für $0 \leqslant \mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{k}$ gilt*

$$\operatorname{ind}_{F(\mathfrak{m}, \mathfrak{K}_Y)} \mathfrak{m} \neq \operatorname{ind}_{F(\mathfrak{m}^+, \mathfrak{K}_Y)} \mathfrak{m}^+ \ [13].$$

Beweis. Wir brauchen den Satz nur noch für $\mathfrak{m} < \aleph_0$ zu beweisen, denn für $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$ folgt die Behauptung aus Korollar 2 zu Satz 2.2. Aus Satz 1.3 erhält man die Behauptung für $\mathfrak{m} = 0$. Sei also $0 < \mathfrak{m} < \aleph_0$ und $(B', h') := (B_{\mathfrak{m}+1, \mathfrak{m}+1}, h_{\mathfrak{m}+1, \mathfrak{m}+1})$ [14]. Da die $\mathfrak{K}_Y$-Algebren vollständig sind, können wir aus Lemma 2.2 folgern, daß

$$(B', h') = \bigcup_{(B,g) \in U} (B, g), \qquad \text{wobei} \qquad U := U\big(\mathfrak{m}+1, B', (B', h')\big).$$

Wir wollen nun zeigen, daß

$$N := \mathfrak{m}+1 \nsubseteq B \quad \text{für alle Algebren } (B, g) \in U. \tag{5}$$

Denn nach Voraussetzung existiert ein $i \in I$ mit $|S_i| \geqslant \mathfrak{m}+1$ sowie eine Folge $\mathfrak{a} \in \boldsymbol{F}(N, \mathfrak{K}_Y)^{S_i}$ mit Bild $\mathfrak{a} \supseteq N$. Für eine solche Folge ist dann $h_i(\mathfrak{a})$ erklärt, nicht aber $h_i'(\mathfrak{a})$, wenn (5) bewiesen ist. Mit Lemma 2.1.b ergibt sich daraus Satz 3.1.

Um (5) zu beweisen, definieren wir Mengen $D_r \subseteq B'$ für $0 \leqslant r < \aleph_0$: $D_0 := N$ und $D_{r+1} := \bigcup_{(B,g) \in U_r} B$, wobei $U_r := U\big(\mathfrak{m}+1, D_r, (B', h')\big)$. Erinnert man sich an die Definition von (B', h'), so erhält man mit Lemma 2.2 sofort, daß $\bigcup_{r<\aleph_0} D_r = B'$. Induktiv beweisen wir nun:

a) Für alle Algebren $(B, g) \in U_r$ $(0 \leqslant r < \aleph_0)$ gilt $N \nsubseteq B$.

b) Ist $\mathfrak{a}$ eine N-singuläre Folge [15], Bild $\mathfrak{a} \subseteq D_{r+1}$ für ein r mit $0 \leqslant r < \aleph_0$, so existiert eine Algebra $(B, g) \in U_r$ mit Bild $\mathfrak{a} \subseteq B$.

[13] $\mathfrak{m}^+$ bezeichne die unmittelbar auf $\mathfrak{m}$ folgende Kardinalzahl.

[14] Vgl § 2.

[15] Vgl. Teil I, § 2 und § 3.

c) D_{r+1} ist disjunkte Vereinigung von N mit den Bildern N-singulärer Folgen $(0 \leqslant r < \aleph_0)$.

Denn für $r = 0$ ist a) klar, und b) und c) folgen aus Teil I, Korollar 3 zu Satz 2.2 und Satz 3.1. Seien nun a), b) und c) richtig für alle Zahlen $k \leqslant r$, sei $R \subseteq D_{r+1}$ und $|R| \leqslant \mathfrak{m}$. Ist dann $R =$ Bild $\mathfrak{a}$ für eine N-singuläre Folge $\mathfrak{a}$, so existiert nach Voraussetzung eine Algebra $(B, g) \in U_r$ mit $R \subseteq B$; dann ist aber auch $C_{h'}R = C_h R \subseteq B$ und $N \nsubseteq C_{h'}R$ nach Induktionsannahme. Ist aber R kein Bild einer N-singulären Folge, so kann R — da $|R| \leqslant \mathfrak{k}$ endlich ist — auch kein solches Bild umfassen [16]. Dann ist aber nach Teil I, Korollar 1 zu Satz 3.2: $C_{h'}R \cap N = R \cap N$, d. h. $|C_{h'}R \cap N| \leqslant \mathfrak{m} < |N|$, somit auch in diesem Falle $N \nsubseteq C_{h'}R$. Damit ist a) auch für $r+1$ bewiesen. Zu b) und c): Sei $(B, g) \in U_{r+1}$ beliebig, $B = C_{h'}R$ mit $R \subseteq D_{r+1}$, $|R| \leqslant \mathfrak{m}$. Ist dann R das Bild einer N-singulären Folge, so haben wir gerade gezeigt, daß schon $(B, g) \in U_r$. Anderenfalls kann R aber nicht einmal das Bild einer N-singulären Folge enthalten, so daß $C_{h'}R = C_h R$ nach Teil I, Korollare 3 und 4 zu Satz 3.1 die Vereinigung von R mit den (paarweise disjunkten) Wertebereichen N-singulärer Folgen ist. Daraus schließt man (mit c) für D_{r+1}), daß auch D_{r+2} (disjunkte) Vereinigung ist von D_{r+1} mit den Bildern N-singulärer Folgen, die durch Algebren $(B, g) \in U_{r+1} - U_r$ hinzukommen. Daher gelten auch b) und c) für $r+1$ anstelle von r. Somit sind a), b) und c) bewiesen. Aus a) und $U = \bigcup_{r<\aleph_0} U_r$ folgt schließlich (5), was den Beweis von Satz 3.1 beendet.

Aus Satz 1.5 folgt

Satz 3.2. *Für Mengen M, N mit $\mathfrak{k} < |M| < |N| < \aleph_0$ gilt, falls $\mathfrak{k} < \aleph_0$,*

$$\operatorname{ind}_{F(M, \mathfrak{K}_Y)} M = \operatorname{ind}_{F(N, \mathfrak{K}_Y)} N.$$

Korollar. *Ist $\mathfrak{k} < \aleph_0$, so ist $\boldsymbol{F}(\mathfrak{k}, \mathfrak{K}_Y)$ die einzige endlich $\mathfrak{K}_Y$-frei erzeugte $\mathfrak{K}_Y$-Algebra mit Basen verschiedener Mächtigkeiten, die endliche Basen mit verschiedenen Unabhängigkeitsgraden besitzt. Und zwar haben ausschließlich die $\mathfrak{k}$-elementigen Basen eine größere Unabhängigkeitsklasse als die anderen endlichen Basen.*

Man beachte, daß in $\boldsymbol{F}(\mathfrak{m}, \mathfrak{K}_Y)$ alle Basen auch $\mathfrak{K}_Y$-Basen sind.

Satz 3.3. *Sei der Rang $\mathfrak{r} > \aleph_0$, ferner $\mathfrak{m}$ eine additiv erreichbare Kardinalzahl mit ($\aleph_0 < \mathfrak{m} < \mathfrak{r}$ oder $\mathfrak{m} = \mathfrak{r} = \max\{|S_i| \mid i \in I\}$) und $R_{\mathfrak{K}_Y}(\mathfrak{m}) = [\mathfrak{m}, \mathfrak{l}[$. Dann gilt*

$$\operatorname{ind}_{F(\mathfrak{m}, \mathfrak{K}_Y)} \mathfrak{m} \neq \bigcap_{0<\mathfrak{n}<\mathfrak{m}} \operatorname{ind}_{F(\mathfrak{n}, \mathfrak{K}_Y)} \mathfrak{n}.$$

Beweis. Wir betrachten $(B_{\mathfrak{m},\mathfrak{m}}, h_{\mathfrak{m},\mathfrak{m}})$ $\big(\in \bigcap_{0<\mathfrak{n}<\mathfrak{m}} \operatorname{ind}_{F(\mathfrak{n}, \mathfrak{K}_Y)} \mathfrak{n}\big)$. Mit Satz 4.1 aus Teil I erhalten wir für jede $(\mathfrak{m}, B_{\mathfrak{m},\mathfrak{m}})$-Unteralgebra (B, g) von

[16] Vgl. Teil I, § 2.

$F(\mathfrak{m}, \mathfrak{K}_Y)$ und somit auch von $B_{\mathfrak{m},\mathfrak{m}}$: $|B \cap \mathfrak{m}| < \mathfrak{m}$; denn es läßt sich unter den Voraussetzungen von Satz 3.3 stets eine Kardinalzahl $\mathfrak{z}$ mit $\mathfrak{n} < \mathfrak{z} < \mathfrak{m}$ finden, die die Voraussetzungen von Satz 4.1 (Teil I) hinsichtlich eines Erzeugendensystems N von (B, g) mit $|N| < \mathfrak{m}$ erfüllt, so daß sogar $|B \cap \mathfrak{m}| < \mathfrak{z}$ gilt. Da es ein $i \in I$ mit $|S_i| \geqslant \mathfrak{m}$ geben soll, schließt man, daß $(B_{\mathfrak{m},\mathfrak{m}}, h_{\mathfrak{m},\mathfrak{m}})$ nicht vollständig und daher nicht in $\operatorname{ind}_{F(\mathfrak{m},\mathfrak{K}_Y)} \mathfrak{m}$ enthalten ist (Lemma 2.1!).

SATZ 3.4. *Ist $\mathfrak{r} > \aleph_0$, additiv erreichbar und $\mathfrak{r} > |S_i|$ für alle $i \in I$, so gilt*

$$\operatorname{ind}_{F(\mathfrak{r},\mathfrak{K}_Y)} \mathfrak{r} = \bigcap_{O<\mathfrak{n}<\mathfrak{r}} \operatorname{ind}_{F(\mathfrak{n},\mathfrak{K}_Y)} \mathfrak{n} = \mathfrak{K}_Y \cup \{\emptyset\}.$$

Beweis. Ist $(A, h) \in \bigcap_{O<\mathfrak{n}<\mathfrak{r}} \operatorname{ind}_{F(\mathfrak{n},\mathfrak{K}_Y)} \mathfrak{n} - \{\emptyset\}$, so ist (A, h) offensichtlich vollständig, und ferner gelten dort die Gleichungen (4) wegen $\mathfrak{r} > |S_i|$, also $(A, h) \in \mathfrak{K}_Y$. Mit Satz 1.2 folgt dann die Behauptung.

Zusammen mit Satz 1.4, den Korollaren 1 und 2 zu Satz 2.2, Satz 1.6, Korollar 2 zu Satz 1.4 und der Tatsache, daß $\mathfrak{K}_Y$ konstantenfrei ist sowie dem Korollar zu Satz 1.1 liefern die Sätze von § 3 eine vollständige Übersicht über die möglichen Beziehungen zwischen den Unabhängigkeitsklassen der $\mathfrak{K}_Y$-Basen von $\mathfrak{K}_Y$-frei erzeugten $\mathfrak{K}_Y$-Algebren. Dabei sei im folgenden wieder $\mathfrak{A}_\mathfrak{m} := \operatorname{ind}_{F(\mathfrak{m},\mathfrak{K}_Y)} \mathfrak{m}$, $\mathfrak{B}_\mathfrak{m} := \bigcap_{O<\mathfrak{n}<\mathfrak{m}} \operatorname{ind}_{F(\mathfrak{n},\mathfrak{K}_Y)} \mathfrak{n}$, $\mathfrak{k} := \min\{\mathfrak{k}_y, \mathfrak{l}_y \mid y \in Y\}$, ferner $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{d}$ Rang bzw. Dimension von $\mathfrak{K}_Y$:

$$\mathfrak{A}_O = \mathfrak{S}_{\Delta_Y}.$$

$$O < \mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{k}^+ \Rightarrow \mathfrak{A}_\mathfrak{m} \neq \mathfrak{B}_\mathfrak{m}.$$

$\mathfrak{k} < \mathfrak{m} < \mathfrak{n} < \aleph_0 \Rightarrow \mathfrak{A}_\mathfrak{m} = \mathfrak{A}_\mathfrak{n}$; ist dabei $\mathfrak{d} = \aleph_0$, so $\mathfrak{A}_\mathfrak{m} = \mathfrak{A}_\mathfrak{d} = \mathfrak{K}_Y$.

$\mathfrak{m}$ additiv unerreichbar und $\aleph_0 \leqslant \mathfrak{m} < \mathfrak{d} \Rightarrow \mathfrak{B}_\mathfrak{m} \neq \mathfrak{A}_\mathfrak{m} \neq \mathfrak{A}_{\mathfrak{m}^+}$.

Sei $\mathfrak{s}$ eine additiv erreichbare Kardinalzahl, dann gilt:

$\aleph_0 \leqslant \mathfrak{s} \leqslant \mathfrak{r}$ und $\min\{\mathfrak{z} \mid \mathfrak{z} \in R_{\mathfrak{K}_Y}(\mathfrak{s})\} < \mathfrak{s} \Rightarrow \mathfrak{A}_\mathfrak{s} = \mathfrak{B}_\mathfrak{s}$;

$\aleph_0 \leqslant \mathfrak{s} < \mathfrak{r}$ und $\min\{\mathfrak{z} \mid \mathfrak{z} \in R_{\mathfrak{K}_Y}(\mathfrak{s})\} = \mathfrak{s} \Rightarrow \mathfrak{A}_\mathfrak{s} \neq \mathfrak{B}_\mathfrak{s}$;

$\mathfrak{s} = \mathfrak{r} = \max\{|S_i| \mid i \in I\}$ und $\min\{\mathfrak{z} \mid \mathfrak{z} \in R_{\mathfrak{K}_Y}(\mathfrak{s})\} = \mathfrak{s} \Rightarrow \mathfrak{A}_\mathfrak{s} \neq \mathfrak{B}_\mathfrak{s}$;

$\mathfrak{s} = \mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r} > |S_i|$ für alle $i \in I \Rightarrow \mathfrak{A}_\mathfrak{s} = \mathfrak{B}_\mathfrak{s}$.

$$\mathfrak{A}_{\mathfrak{d}+1} = \mathfrak{B}_{\mathfrak{d}+1} = \mathfrak{K}_Y = \mathfrak{A}_\mathfrak{m} \quad \text{für} \quad \mathfrak{m} \geqslant \mathfrak{r}+1.$$

Bemerkung. Diese Ergebnisse bleiben auch dann noch richtig, wenn man die Klassen $\mathfrak{A}_\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{B}_\mathfrak{m}$ überall durch ihre Durchschnitte mit der Klasse $\mathfrak{V}_Y$ aller vollständigen Algebren vom Typus Δ_Y ersetzt.

Denn sei z. B. für eine Kardinalzahl $\mathfrak{t}$ $\mathfrak{A}_\mathfrak{t} \neq \mathfrak{B}_\mathfrak{t}$. Seien M, N Mengen, $M \subsetneq N$, $|M| = \mathfrak{t}$. Dann führe man in $(F(N, \mathfrak{K}_Y), h)$ eine neue Struktur h'

ein vermöge: $h'_i(\mathfrak{a}) := h_i(\mathfrak{a})$ $(i \in I)$, falls Bild $\mathfrak{a} \neq M$, dagegen $h'(\mathfrak{a}) \in N - M$ beliebig, falls Bild $\mathfrak{a} = M$. Wegen $\mathfrak{A}_\mathfrak{t} \neq \mathfrak{B}_\mathfrak{t}$ sieht man dann leicht ein, daß dann $(C_N M, h') \in (\mathfrak{B}_\mathfrak{t} \cap \mathfrak{V}_Y) - (\mathfrak{A}_\mathfrak{t} \cap \mathfrak{V}_Y)$, indem man ähnlich schließt wie im Beweis von Lemma 2.1.

Es soll nun noch einmal auf Algebren mit Basen verschiedener Mächtigkeiten eingegangen werden: Sei $\aleph_0 \leqslant \mathfrak{z} < \mathfrak{z}^+ < \mathfrak{q} \leqslant \mathfrak{r}$, und $R_{\mathfrak{K}_Y}(\mathfrak{z}) \supset [\mathfrak{z}, \mathfrak{q}[$, somit $\mathfrak{A}_\mathfrak{z} = \mathfrak{A}_{\mathfrak{z}^+}$. Dann besitzt $F(\mathfrak{z}, \mathfrak{A}_\mathfrak{z}) = F(\mathfrak{z}, \mathfrak{K}_Y)$ eine Basis Q mit $|Q| = \mathfrak{z}^+$, und Q ist keine $\mathfrak{A}_\mathfrak{z}$-Basis.

Zusammen mit dem Korollar zu Satz 3.2 ergibt sich daraus, daß man zu einer vorgegebenen Kardinalzahl $\mathfrak{m} \neq O$ stets eine primitive Klasse $\mathfrak{A}$ finden kann — die wegen obiger Bemerkung sogar als Klasse vollständiger Algebren gewählt werden kann —, so daß $F(\mathfrak{m}, \mathfrak{A})$ mindestens eine Basis besitzt, die keine $\mathfrak{A}$-Basis ist. Dabei bleibt jedoch noch die Frage offen, ob diese Situation in einer primitiven Klasse $\mathfrak{A}$ jeweils höchstens für eine $\mathfrak{A}$-frei erzeugte $\mathfrak{A}$-Algebra eintreten kann (bis auf Isomorphie).

Abschließend wollen wir noch auf einige Probleme hinweisen, die sich bei der Betrachtung der Ergebnisse dieser Arbeit stellen:

PROBLEM 1. *Folgt aus $\operatorname{ind}_{F(\mathfrak{m},\mathfrak{A})} \mathfrak{m} = \operatorname{ind}_{F(\mathfrak{z},\mathfrak{A})} \mathfrak{z}$ für eine primitive Klasse $\mathfrak{A}$ und zwei Kardinalzahlen $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{z}$ mit $O \leqslant \mathfrak{m} < \mathfrak{z} < \aleph_0$ stets $\operatorname{ind}_{F(\mathfrak{m},\mathfrak{A})} \mathfrak{m} = \operatorname{ind}_{F(\mathfrak{n},\mathfrak{A})} \mathfrak{n}$ für alle Kardinalzahlen $\mathfrak{n}$ mit $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n} < \aleph_0$?*

PROBLEM 2. *Folgt aus $\operatorname{ind}_{F(\mathfrak{m},\mathfrak{A})} \mathfrak{m} = \operatorname{ind}_{F(\mathfrak{z},\mathfrak{A})} \mathfrak{z}$ für zwei Kardinalzahlen $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{z}$ mit $\mathfrak{z} \geqslant \aleph_0$ und eine primitive Klasse $\mathfrak{A}$ stets $\operatorname{ind}_{F(\mathfrak{n},\mathfrak{A})} \mathfrak{n} = \operatorname{ind}_{F(\mathfrak{m},\mathfrak{A})} \mathfrak{m}$ für alle Kardinalzahlen $\mathfrak{n} \geqslant \mathfrak{m}$?*

Etwas allgemeiner kann man diese beiden Probleme für den Fall stellen, daß man die Unabhängigkeitsklassen relativ zu einer primitiven Klasse $\mathfrak{B}$ betrachtet, wobei man natürlich jeweils $\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{A}$ voraussetzen sollte.

Für den Spezialfall, daß $\mathfrak{A} = \mathfrak{K}_Y$ und $\mathfrak{B} = \mathfrak{S}_{\Delta_Y}$ bzw. $\mathfrak{V}_Y$, haben wir oben beide Fragen positiv beantwortet.

Literatur

[1] H. Bachmann, *Transfinite Zahlen; Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, Berlin 1955.

[2] P. Burmeister, *Zu den totaladditiven Äquivalenzrelationen der Kardinalzahlreihe*, Zeitschr. f. math. Logik und Grundlagen d. Math. (im Druck).

[3] — *Über die Mächtigkeiten und Unabhängigkeitsgrade der Basen freier Algebren, I*, Fund. Math. 62 (1968), S. 165–189.

[4] — und J. Schmidt, *Über die Dimension einer partiellen Algebra mit endlichen oder unendlichen Operationen, II*, Zeitschr. f. math. Logik u. Grundlagen d. Math. 12 (1966), S. 311–315.

[5] C. J. Everett, *Vector spaces over rings*, Bull. Amer. Math. Soc. 48 (1942), S. 312–316.

[6] E. Marczewski, *Independence and homomorphisms in abstract algebras*, Fund. Math. 50 (1961), S. 45–61.
[7] J. Schmidt, *Mengenlehre* I, B. I. Hochschultaschenbücher Bd. 56, Mannheim 1966.
[8] — *Algebraic operations and algebraic independence in algebras with infinitary operations*, Math. Japon. 6 (1962), S. 77–112.
[9] — *Über die Dimension einer partiellen Algebra mit endlichen oder unendlichen Operationen* (I), Zeitschr. f. math. Logik u. Grundlagen d. Math. 11 (1965), S. 227–239.
[10] — *A general existence theorem on partial algebras and its special cases*, Coll. Math. 14 (1966), S. 73–87.
[11] — *Allgemeine Algebra*, Ausarbeitung einer im Wintersemester 1965/66 an der Universität Bonn gehaltenen Vorlesung.
[12] J. Słomiński, *The theory of abstract algebras with infinitary operations*, Rozprawy Matematyczne 18, Warszawa 1959.
[13] — *A theory of extensions of quasi-algebras to algebras*, Rozprawy Matematyczne 40, Warszawa 1964.
[14] S. Świerczkowski, *On isomorphic free algebras*, Fund. Math. 50 (1961), S. 35–44.

Reçu par la Rédaction le 19. 6. 1968

Remarks on some class of continuous mappings of λ-dendroids

by

J. J. Charatonik

A metric compact continuum is said to be a dendroid if it is hereditarily unicoherent and arcwise connected. It follows that it is hereditarily decomposable (see [2], (47), p. 239). A hereditarily unicoherent and hereditarily decomposable continuum is called a *λ-dendroid*. Note that every subcontinuum of a λ-dendroid is also a λ-dendroid.

It is proved in [4], Corollary 2, p. 29 that for every λ-dendroid X there exists a unique decomposition $\mathfrak{D}$ of X (called the canonical decomposition):

(1) $$X = \bigcup \{S_d \mid d \in \Delta(X)\}$$

such that

(i) $\mathfrak{D}$ is upper semicontinuous,

(ii) the elements S_d of $\mathfrak{D}$ are continua,

(iii) the hyperspace $\Delta(X)$ of $\mathfrak{D}$ is a dendroid,

(iv) $\mathfrak{D}$ is the finest possible decomposition among all decompositions satisfying (i), (ii) and (iii).

The elements S_d of $\mathfrak{D}$ are called strata of X. The monotone mapping φ of X onto $\Delta(X)$ defined by

(2) $$\varphi^{-1}(d) = S_d \quad \text{for } d \in \Delta(X)$$

is called canonical.

Let X and Y be λ-dendroids, φ and ψ their canonical mappings onto dendroids $\Delta(X)$ and $\Delta(Y)$ respectively. Continuous mappings of X into Y will be considered in this paper such that they take every stratum of X into a stratum of Y. Denote the class of all such mappings by $\mathfrak{C}$. Thus, by definition, a mapping

$$f\colon X \to Y$$

of X into Y belongs to $\mathfrak{C}$ if and only if for every point $d \in \Delta(X)$ there exists a point $d' \in \Delta(Y)$ such that

(3) $$f\big(\varphi^{-1}(d)\big) \subset \psi^{-1}(d').$$