Гомоморфизмы тихоновских полуполей и обобщенные полуметрики (1)

М. Я. Антоновский (Москва)

1. Гомоморфизмы тихоновских полуполей. Пусть Δ-произвольное множество. Через R^Δ обозначим кольцо всех действительных функций на Δ (с обычными сложением и умножением), рассматриваемое в тихоновской топологии. Значение функции $x \in R^\Delta$ на элементе $q \in \Delta$ мы будем обозначать через xq. Таким образом, сложение и умножение в R^Δ определяются формулами

$$(x+y)q = xq+yq\,, \qquad (xy)q = (xq)(yq)\,.$$

Определим модуль $|x|$ элемента $x \in R^\Delta$, положив

$$|x|q = |xq|\,, \qquad q \in \Delta\,.$$

Наконец, условимся писать $x \geqslant 0$, если $|x| = x$, и писать $x \geqslant y$ (или $y \leqslant x$), если $x - y \geqslant 0$. Множество R^Δ с введенными в нем алгебраическими операциями, топологией и порядком является примером *топологического полуполя* (см. [1], [2]). Мы иногда будем называть его *тихоновским полуполем*.

Элемент $x \in R^\Delta$ называется *идемпотентом*, если $x^2 = x$. Легко видеть, что элемент $x \in R^\Delta$ в том и только в том случае является идемпотентом, если xq равно 0 или 1 для любого $q \in \Delta$. Множество всех идемпотентов полуполя R^Δ мы будем обозначать через D^Δ. Функцию, принимающую значение 1 на одном элементе $q \in \Delta$ и значение 0 на остальных элементах из Δ, мы условимся обозначать через q. При таком соглашении множество Δ естественным образом вкладывается в D^Δ (и, значит, в R^Δ). Далее, для любого действительного λ мы будем обозначать функцию, принимающую на Δ постоянное значение λ, просто через λ. При таком соглашении полуполе R^Δ содержит поле действительных чисел.

Пусть R^Δ и $R^{\Delta'}$ — два тихоновских полуполя. Непрерывное отображение $\varphi\colon R^{\Delta'} \to R^\Delta$ назовем *гомоморфизмом*, если

$$\varphi(xy+z) = \varphi(x)\varphi(y)+\varphi(z)$$

(1) В статье дается подробное изложение части результатов, вошедших в доклад автора на топологическом симпозиуме в Херцег Нови (август 1968).

для любых $x, y, z \in R^{\Delta'}$ (т. е. если отображение φ сохраняет операции сложения и умножения) и, кроме того $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$ для любого $x \in R^{\Delta'}$ и любого действительного λ.

Гомоморфизм, ядро которого равно нулю, называется *мономорфизмом*. Гомоморфизм, образом которого служит все полуполе $R^{\Delta'}$, называется *эпиморфизмом*. Гомоморфизм, одновременно являющийся мономорфизмом и эпиморфизмом, называется *биморфизмом*.

Лемма 1. *При любом гомоморфизме $\varphi\colon R^{\Delta'} \to R^{\Delta}$ идемпотенты полуполя $R^{\Delta'}$ переходят в идемпотенты полуполя R^{Δ}.*

В самом деле, пусть $e \in D^{\Delta'}$. Тогда $e = e^2$, и потому $\varphi(e) = \varphi(e^2) = \varphi(e)\varphi(e) = \big(\varphi(e)\big)^2$. Следовательно, $\varphi(e) \in D^{\Delta}$.

Заметим, что неразложимые идемпотенты полуполя $R^{\Delta'}$ (т. е. элементы множества Δ') могут при гомоморфизме φ переходить в разложимые (т. е. не принадлежащие Δ и отличные от нуля) идемпотенты полуполя R^{Δ} или в нуль.

Лемма 2. *При любом гомоморфизме $\varphi\colon R^{\Delta'} \to R^{\Delta}$ дизъюнктные (т. е. имеющие нулевое произведение) идемпотенты переходят в дизъюнктные.*

Действительно, если $xy = 0$, то $\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(xy) = \varphi(0) = 0$, т. е. $\varphi(x)$ и $\varphi(y)$ дизъюнктны.

Лемма 3. *Гомоморфизм сохраняет неравенства между идемпотентами, т. е. если $x \geqslant y$ (где $x, y \in D^{\Delta'}$), то $\varphi(x) \geqslant \varphi(y)$.*

В самом деле, если $x \geqslant y$, то $xy = y$ и потому $\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(y)$. Но это и означает, что элементы $\varphi(x)$, $\varphi(y)$ (являющиеся идемпотентами в силу Леммы 1) связаны соотношением $\varphi(x) \geqslant \varphi(y)$.

Лемма 4. *Для любого гомоморфизма $\varphi\colon R^{\Delta'} \to R^{\Delta}$ и любого множества $M \subset D^{\Delta}$ справедливо соотношение $\varphi(\nabla M) = \nabla\varphi(M)$ (где ∇ означает точную верхнюю грань).*

Действительно, $\nabla M \geqslant m$ для любого $m \in M$, и потому в силу Леммы 3, $\varphi(\nabla M) \geqslant \varphi(m)$ для любого $m \in M$. Следовательно, $\varphi(\nabla M) \geqslant \underset{m \in M}{\nabla}\varphi(m) \equiv \nabla\varphi(M)$.

Допустим, что $\varphi(\nabla M) \neq \nabla\varphi(M)$, т. е. $\varphi(\nabla M) > \nabla\varphi(M)$. Тогда существует такой элемент $q \in \Delta$, что $\big(\varphi(\nabla M)\big)q > \big(\nabla\varphi(M)\big)q$, т. е.

$$\big(\varphi(\nabla M)\big)q = 1\,, \qquad \big(\nabla\varphi(M)\big)q = 0\,. \tag{1}$$

Обозначим через A множество всех тех элементов $q' \in \Delta'$, для которых $\nabla M \geqslant q'$, а через B — множество всевозможных (конечных) сумм элементов из A (т. е. $x \in B$, если $x = q_1' + \ldots + q_k'$, где $q_1', \ldots, q_k'$ — некоторые попарно различные элементы из A). Очевидно, элемент ∇M принадлежит замыканию $\overline{B}$ множества B. Так как $B \subset D^{\Delta'}$, то $\varphi(B) \subset D^{\Delta}$, и потому для любого $b \in B$ число $\varphi(b)q$ равно 0 или 1. Если бы для *всех* $b \in B$ мы имели $\varphi(b)q = 0$, то, в силу непрерывности отображения φ, отсюда следовало бы, что $\big(\varphi(\nabla M)\big)q = 0$, что противоречит первому равенству (1). Значит, найдется такой элемент $b \in B$, для которого $\varphi(b)q = 1$. Выберем такой элемент $b \in B$ и пусть он имеет вид

$$b = q_1' + \ldots + q_k' \qquad (q_i' \in A,\ i = 1, \ldots, k)\,.$$

Тогда

$$\varphi(b) = \varphi(q_1') + \ldots + \varphi(q_k')\,.$$

Из равенства $\varphi(b)q = 1$ следует теперь, что найдется элемент q_i' $(i = 1, \ldots, k)$, для которого $\varphi(q_i')q = 1$.

Итак, существует элемент $q' \in A$, для которого $\varphi(q')q = 1$. Так как $q' \in A$, то $\nabla M \geqslant q'$, и потому найдется такой элемент $m \in M$, что $m \geqslant q'$. Но тогда $\varphi(m) \geqslant \varphi(q')$ (Лемма 3), и потому

$$\varphi(m)q \geqslant \varphi(q')q' = 1\,, \quad \text{т. е.} \quad \varphi(m)q = 1\,.$$

Следовательно,

$$\big(\nabla\varphi(M)\big)q \geqslant \varphi(m)q = 1\,,$$

что, однако, противоречит второму из равенств (1). Полученное противоречие и доказывает лемму.

Замечание. В этом доказательстве впервые (и притом существенным образом) используется тот факт, что всякий гомоморфизм является, по определению, непрерывным отображением. Можно доказать (ср. доказательство Леммы 5, изложенное ниже), что и обратно, всякий алгебраический гомоморфизм $\varphi\colon R^{\Delta'} \to R^{\Delta}$ (т. е. не предполагаемый непрерывным), для которого справедливо заключение Леммы 4, является обязательно непрерывным.

Вопрос о том (см. L. Gillman and M. Jerison, *Rings of continuous functions*), существуют ли алгебраические гомоморфизмы $\varphi\colon R^{\Delta'} \to R^{\Delta}$ (не предполагаемые непрерывными), для которых заключение Леммы 4 не выполняется, связан с проблемой существования измеримых кардиналов.

Лемма 5. *Пусть $\varphi\colon \Delta' \to D^{\Delta}$ — некоторое отображение, обладающее тем свойством, что $\varphi(q_1)\cdot\varphi(q_2) = 0$ при $q_1 \neq q_2$. Тогда оно однозначно продолжимо до некоторого гомоморфизма $\varphi\colon R^{\Delta'} \to R^{\Delta}$.*

Прежде всего заметим, что для любого $q \in \Delta$ существует не более одного элемента $q' \in \Delta'$, для которого $\varphi(q')q = 1$ (это вытекает из Леммы 2). Определим теперь для любого $x \in R^{\Delta}$ элемент $y = \varphi(x)$, положив для любого $q \in \Delta$

$$yq = \begin{cases} 0, & \text{если не существует элемента } q' \in \Delta', \text{ для которого } \varphi(q')q = 1; \\ xq', & \text{если } q' \in \Delta' \text{ — такой элемент, что } \varphi(q')q = 1. \end{cases}$$

Это определение корректно, так как элемент q' (если он существует) определяется, в силу сказанного выше, однозначно. Непосредственно проверяется, что построенное таким образом отображение $\varphi\colon R^{\Delta'}\to R^{\Delta}$ является алгебраическим гомоморфизмом и совпадает на Δ' с заданным отображением φ.

Докажем непрерывность построенного отображения φ. Достаточно установит непрерывность в точке 0. Итак, пусть U — произвольная окрестность нуля в полуполе R^{Δ}. Тогда существует такой конечный набор элементов $q_1, q_2, \ldots, q_k \in \Delta$ и такое положительное число ε, что любой элемент $x \in R^{\Delta}$, удовлетворяющий условиям

(2) $$|xq_i| < \varepsilon, \quad i = 1, \ldots, k$$

принадлежит окрестности U. Множество W, содержащее все элементы $x \in R^{\Delta}$, удовлетворяющие условиям (2), также является окрестностью нуля в R^{Δ}, причем, согласно сказанному, $W \subset U$. Обозначим через W_i $(i = 1, \ldots, k)$ множество всех элементов $x \in R^{\Delta}$, удовлетворяющих только одному условию $|xq_i| < \varepsilon$. Тогда $W = W_1 \cap \ldots \cap W_k$. Остается установить существование такой окрестности нуля V_i в $R^{\Delta'}$, что $\varphi(V_i) \subset W_i$ (ибо тогда окрестность нуля $V = V_i \cap \ldots \cap V_k$ будет удовлетворять условию $\varphi(V) \subset W \subset \subset U$).

Предположим сначала, что не существует элемента $q' \in \Delta'$, для которого $\varphi(q')q_i = 1$. Из определения отображения φ следует тогда, что $\varphi(x)q_i = 0$ для любого $x \in R^{\Delta}$, т. е. $\varphi(x) \in W_i$ для любого $x \in R^{\Delta}$. Поэтому мы можем положить: $V_i = R^{\Delta}$.

Пусть теперь существует элемент $q'_i \in \Delta'$, удовлетворяющий условию $\varphi(q'_i)q_i = 1$; в силу Леммы 2, такой элемент q'_i существует только один. Обозначим через V_i множество всех элементов $x \in R^{\Delta'}$, для которых $|xq'_i| < \varepsilon$. Тогда V_i есть окрестность нуля в $R^{\Delta'}$, и из определения отображения φ следует, что $\varphi(V_i) \subset W_i$.

Остается доказать единственность продолжения. Для этого достаточно заметить, что на множестве всех элементов вида

$$\lambda_1 q_1^0 + \ldots + \lambda_l q'_l$$

(которое всюду плотно в $R^{\Delta'}$) гомоморфизм φ определен однозначно. Следовательно, по непрерывности, он однозначно определен на всем $R^{\Delta'}$. Лемма доказана.

Из доказанных выше лемм вытекает следующая теорема, полностью вскрывающая строение гомоморфизмов $\varphi\colon R^{\Delta'}\to R^{\Delta}$.

Теорема 1. *Пусть $\varphi\colon R^{\Delta'}\to R^{\Delta}$ — произвольный гомоморфизм. Обозначим через $\widetilde{\Delta}'$ множество всех элементов $q' \in \Delta'$, для которых $\varphi(q') = 0$, и положим $\Delta^* = \Delta' \setminus \widetilde{\Delta}'$. Далее, для любого $q' \in \Delta^*$ обозначим через $M_{q'}$ множество всех*

тех элементов $q \in \Delta$, для которых $\varphi(q')q = 1$. Наконец, через $\widetilde{\Delta}$ обозначим множество всех элементов $q \in \Delta$, для которых $\varphi(1_{\Delta'})q = 0$. Тогда множества $\widetilde{\Delta}$ и $M_{q'}(q' \in \Delta^*)$ образуют разбиение множества Δ на попарно непересекающиеся подмножества, причем каждое из множеств $M_{q'}$ непусто.

Обратно, каждое такое разбиение

(3) $$\Delta = \widetilde{\Delta} \cup \Big(\bigcup_{q' \in \Delta^*} M_{q'}\Big)$$

(на попарно непересекающиеся подмножества, где каждое $M_{q'}$ непусто, порождает некоторый гомоморфзим (и притом единственный)).

Доказательство. Пусть φ-произвольный гомоморфизм, и множества $\widetilde{\Delta}$, $M_{q'}$ определены, как указано в формулировке теоремы. Возьмем произвольные элементы $q' \in \Delta^*$, $q \in \widetilde{\Delta}$. Тогда $q' \leqslant 1_{\Delta'}$, и потому $\varphi(q') \leqslant \varphi(1_{\Delta'})$ (Лемма 3). Отсюда следует, что

$$\varphi(q')q \leqslant \varphi(1_{\Delta'})q = 0\,,$$

т. е. $\varphi(q')q = 0$, и потому $q \notin M_{q'}$. Итак, множество $\widetilde{\Delta}$ не пересекается ни с одним из множеств $M_{q'}(q' \in \Delta^*)$.

Далее, пусть q'_1, q'_2 — два различных элемента множества Δ^*. Если бы существовал элемент $q \in M_{q'_1} \cap M_{q'_2}$, то мы имели бы $\varphi(q'_1)q = 1$, $\varphi(q'_2)q = 1$, т. е. $\varphi(q'_1) \geqslant q$, $\varphi(q'_2) \geqslant q$, и потому $\varphi(q'_1)\varphi(q'_2) \neq 0$. Но это противоречит дизъюнктности элементов q'_1 и q'_2 (см. Лемму 2). Таким образом, $M_{q'_1} \cap \cap M_{q'_2} = \emptyset$, т. е. все множества $\widetilde{\Delta}$, $M_{q'}(q' \in \Delta^*)$ попарно не пересекаются.

Пусть, наконец, q-произвольный элемент множества Δ. Если существует такое $q' \in \Delta'$, что $\varphi(q')q \neq 0$, то $q \in M_{q'}$. Если же $\varphi(q')q = 0$ для всех $q' \in \Delta'$, то $\big(\nabla\varphi(\Delta')\big)q = 0$, и потому $\varphi(\nabla\Delta')q = 0$ (Лемма 4), т. е. $\varphi(1_{\Delta'})q = 0$ и, значит, $q \in \widetilde{\Delta}$. Таким образом, справедливо соотношение (3). Тем самым первая часть теоремы доказана.

Докажем обратное утверждение. Пусть в множестве Δ заданы произвольным образом подмножества $\widetilde{\Delta}$ и $M_{q'}$, где индексы q' пробегают некоторое подмножество $\Delta^* \subset \Delta'$. Положим $\widetilde{\Delta}' = \Delta' \setminus \Delta^*$. Мы должны построить гомоморфизм, соответствующий указанному разбиению на подмножества. С этой целью положим:

$$\varphi(q') = \begin{cases} 0 & \text{при } q' \in \widetilde{\Delta}'\,, \\ \nabla M_{q'} & \text{при } q' \in \Delta^*\,. \end{cases}$$

Условия Леммы 5 очевидным образом выполнены, и потому указанное отображение $\varphi\colon \Delta'\to D^{\Delta}$ продолжается до некоторого гомоморфизма $\varphi\colon R^{\Delta'}\to R^{\Delta}$. Непосредственно проверяется, что гомоморфизм φ порождает как раз первоначально взятое разбиение на подмножества (3). Единственность также вытекает из Леммы 5. Тем самым доказана и вторая часть теоремы.

Следствие 1. *Всякий гомоморфизм* $\varphi\colon R^{\Delta'}\to R^{\Delta}$ *имеет следующую структуру*:

$$\varphi(x)q=\begin{cases}xq', & \text{если } q\in M_{q'};\\ 0, & \text{если } q\in\tilde{\Delta};\end{cases}$$

(*где* $M_{q'}$ *и* $\tilde{\Delta}$ *имеют тот же смысл, что и в Теореме* 1).

В самом деле, эти формулы, очевидно определяют гомоморфное отображение $R^{\Delta'}\to R^{\Delta}$, порождающее то же самое разбиение (3). Следовательно, этот гомоморфизм совпадает с исходным.

Следствие 2. *Гомоморфизм* φ *является мономорфизмом в том и только в том случае, если* $\tilde{\Delta}'=\emptyset$. *Гомоморфизм* φ *является эпиморфизмом в том и только в том случае, если* $\tilde{\Delta}=\emptyset$ *и, кроме того, каждое из множеств* $M_{q'}$ $(q'\in\Delta^*)$ *состоит лишь из одного элемента.*

Доказательство. Если φ-мономорфизм, то множество $\tilde{\Delta}'$, очевидно, должно быть пустым. Обратно, пусть множество $\tilde{\Delta}'$ пусто, т. е. $\Delta^*=\Delta'$. Пусть, далее, x-произвольный отличный от нуля элемент полуполя $R^{\Delta'}$. Тогда найдется такой элемент $q'\in\Delta'$, что $xq'\neq 0$. Пусть $q\in M_{q'}$ (напомним, что множество $M_{q'}$ непусто). Мы имеем: $xq'=\lambda q'$, где λ — отличное от нуля действительное число, и потому

$$\varphi(x)q=\varphi(x)\big(\varphi(q')q\big)=\big(\varphi(x)\varphi(q')\big)q=\varphi(xq')q= \tag{4}$$
$$=\varphi(\lambda q')q=\lambda\varphi(q')q=\lambda q\neq 0\,.$$

Таким образом, если $x\neq 0$, то $\varphi(x)\neq 0$, т. е. отображение φ мономорфно.

Перейдем к рассмотрению эпиморфизмов. Если $q\in\tilde{\Delta}$, то $\varphi(1_{\Delta'})q=0$, и потому $\varphi(x)q=\varphi(x\cdot 1_{\Delta'})q=\varphi(x)\varphi(1_{\Delta'})q=0$ для любого $x\in R^{\Delta'}$. Следовательно, $\varphi(x)\neq q$ ни для какого $x\in R^{\Delta'}$, т. е. φ не является эпиморфизмом. Итак, если отображение φ эпиморфно, то $\tilde{\Delta}=\emptyset$. Далее, допустим, что некоторое множество $M_{q'}$ содержит не менее двух элементов: $q_1, q_2\in M_{q'}$ где $q_1\neq q_2$. Пусть x-произвольный элемент полуполя $R^{\Delta'}$. Тогда $xq'=\lambda q'$, где λ-некоторое действительное число, и потому $\varphi(x)q_1=\lambda q_1$, $\varphi(x)q_2=\lambda q_2$, (ср. (4)). Иными словами, элемент $\varphi(x)\in R^{\Delta}$ принимает одинаковые значения на q_1 и q_2 (каков бы ни был элемент $x\in R^{\Delta'}$). Ясно поэтому, что $\varphi(x)\neq q_1$ ни для какого $x\in R^{\Delta'}$, т. е. отображение φ не является эпиморфизмом.

Итак, для того чтобы φ было эпиморфизмом, необходимо чтобы множество $\tilde{\Delta}$ было пусто и каждое из множеств $M_{q'}(q'\in\Delta^*)$ состояло лишь из одного элемента.

Остается доказать достаточность этого условия. Итак, пусть $\tilde{\Delta}=\emptyset$ и каждое из множеств $M_{q'}$ состоит лишь из одного элемента. Для любого $y\in R^{\Delta}$ мы определим элемент $x\in R^{\Delta'}$, положив:

$$xq'=\begin{cases}0, & \text{если } q'\in\tilde{\Delta}';\\ yq, & \text{если } q'\in\Delta^* \text{ и } M_{q'}=\{q\}\,.\end{cases}$$

В силу следствия 1 мы имеем тогда: $\varphi(x)=y$. Таким образом, отображение φ эпиморфно.

Следствие 3. *Всякий гомоморфизм сохраняет порядок, т. е. если* $x\geqslant y$, *то* $\varphi(x)\geqslant\varphi(y)$.

Доказательство. Достаточно установить, что если $x\geqslant 0$, то $\varphi(x)\geqslant 0$. Но это непосредственно вытекает из Следствия 1.

2. Обобщенные полуметрики и метрики. *Обобщенной полуметрикой* на множестве X (со значениями в R^{Δ}) называется отображение $\varrho\colon X\times X\to R^{\Delta}$, переводящее диагональ прямого произведения $X\times X$ в нуль и удовлетворяющее обычным аксиомам неотрицательности, симметрии и треугольника. Если в нуль кроме диагонали другие элементы не переходят, то ϱ называется *обобщенной метрикой*. Непосредственно проверяется, что если $\varrho'\colon X\times X\to R^{\Delta'}$ — обобщенная полуметрика и $\varphi\colon R^{\Delta'}\to R^{\Delta}$ — произвольный гомоморфизм, то отображение $\varphi\circ\varrho'\colon X\times X\to R^{\Delta}$ также является обобщенной полуметрикой. Если φ — мономорфизм, то обобщенную полуметрику $\varrho=\varphi\circ\varrho'$ мы будем называть *порожденной полуметрикой* ϱ'. Заметим, что полуметрика, порожденная обобщенной метрикой, также является обобщенной метрикой. Полуметрику $\varrho'\colon X\times X\to R^{\Delta}$ назовем *насыщенной*, если для всякой полуметрики ϱ и всякого мономорфизма $\varphi\colon R^{\Delta'}\to R^{\Delta}$, удовлетворяющих условию $\varrho'=\varphi\circ\varrho$, мономорфизм φ оказывается *биморфизмом*.

Наконец, определим *эквивалентные полуметрики* $(\varrho_0\sim\varrho_1)$, как такие полуметрики, которые порождаются одной и той же полуметрикой ϱ.

Лемма 6. *Полуметрика* $\varrho\colon X\times X\to R^{\Delta}$ *насыщена тогда и только тогда, когда одновременно выполняются два следующих условия*:

1) *для любых* $q_1, q_2\in\Delta$, $q_1\neq q_2$ *существует такая пара точек* $x, y\in X$, *что* $\varrho(x,y)\cdot q_1\neq\varrho(x,y)q_2$ *и*

2) *для любого* $q\in\Delta$, *существует такая пара точек* $x, y\in X$, *что* $\varrho(x,y)q\neq 0$.

Доказательство. Пусть условие 1) не выполнено, т. е. найдутся такие элементы $q_1, q_2\in\Delta$, $q_1\neq q_2$, что $\varrho(x,y)q_1=\varrho(x,y)q_2$ для любых $x, y\in X$. Обозначим через Δ' множество, получающееся из Δ, если из него выбросить элементы q_1, q_2, а взамен них добавить один новый элемент q'. Далее, определим отображение $\varrho'\colon X\times X\to R^{\Delta'}$, положив

$$\varrho'(x,y)q=\varrho(x,y)q \quad \text{при } q\in\Delta',\ q\neq q',$$
$$\varrho'(x,y)q'=\varrho(x,y)q_1=\varrho(x,y)q_2 .$$

Непосредственно проверяется, что ϱ' есть обобщенная полуметрика. Обозначим, через φ мономорфизм $R^{\Delta'}\to R^{\Delta}$, тождественный на $\Delta'\setminus\{q'\}$ и удовлетворяющий условию $\varphi(q')=q_1\vee q_2$. Без труда проверяется, что $\varrho=\varphi\circ\varrho'$ (ср. Следствие 1). Так как отображение φ не является биморфизмом, то полуметрика не насыщена. Итак, условие 1) является необходимым.

Пусть теперь не выполнено условие 2), т. е. найдется такое $q_0\in\Delta$, что $\varrho(x,y)q_0=0$ для любых $x,y\in X$. Положим $\Delta'=\Delta\setminus\{q_0\}$ и определим отображение $\varrho'\colon X\times X\to R^{\Delta'}$, положив

$$\varrho'(x,y)q=\varrho(x,y)q \quad \text{для любого } q\in\Delta'.$$

Непосредственно проверяется, что ϱ' есть обобщенная полуметрика. Обозначим далее через φ мономорфизм $R^{\Delta'}\to R^{\Delta}$, тождественный на Δ'. Тогда $\varrho=\varphi\circ\varrho'$, и потому полуметрика ϱ не насыщена. Итак, условие 2) также является необходимым.

Докажем достаточность условий 1) и 2), т. е. предположим, что эти условия выполнены и докажем, что полуметрика ϱ насыщена. Пусть $\varrho=\varphi\circ\varrho'$, где $\varphi\colon R^{\Delta'}\to R^{\Delta}$ — некоторый мономорфизм. Пусть, далее $q'\in\Delta'$, и $q_1,q_2\in M_{q'}$ (см. формулировку Теоремы 1). Тогда для любых $x,y\in X$ мы имеем:

$$\varrho(x,y)q_1=\varrho'(x,y)q' \quad\text{и}\quad \varrho(x,y)q_2=\varrho'(x,y)q',$$

т. е. $\varrho(x,y)q_1=\varrho(x,y)q_2$. Из условия 1) следует поэтому, что $q_1=q_2$. Итак, каждое множество $M_{q'}$ состоит из единственного элемента. Далее, из условия 2) непосредственно следует, что $\tilde{\Delta}=\emptyset$. Теперь из Следствия 2 вытекает, что φ — эпиморфизм и, значит, — биморфизм. Таким образом, полуметрика ϱ является насыщенной.

Лемма 7. *Каждая полуметрика $\varphi\colon X\times X\to R^{\Delta}$ порождается некоторой (единственной с точностью до биморфизма) насыщенной полуметрикой.*

Доказательство. Пусть $q_1,q_2\in\Delta$; положим $q_1\sim q_2$, если для любых точек $x,y\in X$ мы имеем $\varrho(x,y)q_1=\varrho(x,y)q_2$. Это отношение эквивалентности разбивает множество Δ на классы. Через $\tilde{\Delta}$ обозначим множество тех $q\in\Delta$, для которых $\varrho(x,y)q=0$ при любых $x,y\in X$. (Если $\tilde{\Delta}$ непусто, то оно является одним из классов). Перенумеруем все отличные от $\tilde{\Delta}$ классы элементами некоторого множества Δ'; класс, соответствующий элементу $q'\in\Delta'$, обозначим через $M_{q'}$. Тогда

$$\Delta=\bigcup_{q'\in\Delta'}M_{q'}\cup\tilde{\Delta}.$$

Положим, далее, $\varphi(q')=\vee M_{q'}$ для любого $q'\in\Delta'$. Согласно Лемме 5, это отображение $\varphi\colon\Delta'\to D^{\Delta}$ порождает гомоморфизм $\varphi\colon R^{\Delta'}\to R^{\Delta}$, являющийся в силу следствия 2 мономорфизмом (ибо $\tilde{\Delta}'\neq\emptyset$).

Обозначим через $\varrho'(x,y)$ элемент полуполя $R^{\Delta'}$, удовлетворяющий для любого $q'\in\Delta'$ соотношениям

$$\varrho'(x,y)q'=\varrho(x,y)q, \quad\text{где}\quad q\in M_{q'}.$$

Легко видеть, что это определение корректно, т. е. не зависит от выбора представителя $q\in M_{q'}$. Без труда проверяется далее, что ϱ' есть полуметрика и что $\varphi\circ\varrho'=\varrho$. Таким образом, полуметрика ϱ порождается полуметрикой ϱ'.

Насыщенность полуметрики ϱ' вытекает из Леммы 6. В самом деле, если $q_1'\neq q_2'$ (где $q_1',q_2'\in\Delta'$) и $q_1\in M_{q_1'}$, $q_2\in M_{q_2'}$, то элементы q_1,q_2 не эквивалентны, т. е., по построению, найдется такая пара точек $x,y\in X$, что $\varrho(x,y)q_1\neq\varrho(x,y)q_2$. Но тогда

$$\varrho'(x,y)q_1'=\varrho(x,y)q_1\neq\varrho(x,y)q_2=\varrho'(x,y)q_2'$$

т. е. условие 1) Леммы 6 выполнено. Далее, если $q'\in\Delta'$, то класс $M_{q'}$, по построению, отличен от класса $\tilde{\Delta}$, т. е. для любого $q\in M_{q'}$ мы имеем $q\in\Delta$. Это означает, что найдутся точки $x,y\in X$, для которых $\varrho(x,y)q\neq0$, т. е. $\varrho'(x,y)q'=\varrho(x,y)q\neq0$. Таким образом, выполнено и условие 2) Леммы 6, т. е. полуметрика ϱ' является насыщенной.

Докажем, наконец, единственность (с точностью до биморфизма) полуметрики ϱ'. Пусть $\varrho''\colon X\times X\to R^{\Delta''}$ — другая насыщенная полуметрика, порождающая полуметрику ϱ, т. е. $\varrho=\psi\circ\varrho''$, где $\Psi\colon R^{\Delta''}\to R^{\Delta}$ — некоторый мономорфизм. Разбиение вида (3), соответствующее этому мономорфизму, мы запишем в виде

$$\Delta=\Big(\bigcup_{q''\in\Delta''}M_{q''}\Big)\cup\tilde{\tilde{\Delta}}.$$

Пусть q'-произвольный элемент множества Δ'. Так как полуметрика ϱ' насыщена, то найдутся такие точки $x_0,y_0\in X$, что $\varrho'(x_0,y_0)q'\neq0$ (Лемма 6). Выберем произвольный элемент $q\in M_{q'}$. Тогда

$$\varrho(x,y)q=\varrho'(x,y)q' \quad\text{для любых } x,y\in X;$$

в частности, $\varrho(x_0,y_0)q=\varrho'(x_0,y_0)q'\neq0$, и потому $q\notin\tilde{\tilde{\Delta}}$. Следовательно, найдется такой элемент $q''\in\Delta''$, что $q\in M_{q''}$.

Итак, для любого $q'\in\Delta'$ найдутся такие $q\in\Delta$, $q''\in\Delta''$, что $q\in M_{q'}$, $q\in M_{q''}$. При этих обстоятельствах мы условимся писать $q''=\chi(q')$. Мы покажем прежде всего, что χ является отображением множества Δ' в Δ'', т. е. что элемент $q''=\chi(q')$ определен элементом q' однозначно. В самом деле, пусть

$$q_1\in M_{q'},\qquad q_1\in M_{q_1''}$$

и, кроме того,

$$q_2 \in M_{q'}, \quad q_2 \in M_{q_2''}.$$

Тогда для любых $x, y \in X$ мы имеем:

$$\varrho(x,y)\,q_1 = \varrho'(x,y)\,q', \quad \varrho(x,y)\,q_1 = \varrho''(x,y)\,q_1'',$$
$$\varrho(x,y)\,q_2 = \varrho'(x,y)\,q', \quad \varrho(x,y)\,q_2 = \varrho''(x,y)\,q_2''.$$

Из этого следует, что $\varrho''(x,y)\,q_1'' = \varrho(x,y)\,q_2''$ для любых $x, y \in X$, и потому, в силу насыщенности метрики ϱ'', мы имеем $q_1'' = q_2''$ (Лемма 6). Таким образом, корректность определения отображения χ установлена.

Заметим теперь, что в определение отображения χ множества Δ' и Δ'' входят симметрично ($q'' = \chi(q')$, если существует элемент $q \in \Delta$, для которого $q \in M_{q'}$, $q \in M_{q''}$). Поэтому, повторяя те же рассуждения, исходя от множества Δ'', мы построим некоторое отображение $\chi^*\colon \Delta'' \to \Delta'$; именно, $\chi^*(q'') = q'$, если найдется такой элемент $q \in \Delta$, что $q \in M_{q'}$, $q \in M_{q''}$. Отображение χ^* задано на всем множестве Δ'' и является однозначно определенным. Но очевидно, отображения χ и χ^* взаимно обратны (ибо соотношения $q'' = \chi(q')$, $q' = \chi^*(q'')$ означают одно и то же: существование элемента $q \in \Delta$, удовлетворяющего соотношениям $q \in M_{q'}$, $q \in M_{q''}$). Поэтому χ есть взаимно-однозначное отображение множества Δ' на Δ''.

Продолжим теперь отображение $\chi\colon \Delta' \to \Delta''$ до гомоморфизма $\mathring{\chi}\colon R^{\Delta'} \to R^{\Delta''}$ (это возможно в силу Леммы 5). Так как отображение $\chi\colon \Delta' \to \Delta''$ взаимно однозначно отображает Δ' на Δ'', то, в силу следствия 2, гомоморфизм $\chi\colon R^{\Delta'} \to R^{\Delta''}$ является биморфизмом. Для любого элемента $x' \in R^{\Delta'}$ мы имеем, согласно Следствия 1:

$$\chi(x')\,\chi(q') = x'q' \quad (q' \in \Delta').$$

Пусть теперь q' — произвольный элемент множества Δ' и $q'' = \chi(q')$, так что существует элемент $q \in \Delta$, для которого $q \in M_{q'}$, $q \in M_{q''}$. Тогда для любых $x, y \in X$ выполнены соотношения

$$\varrho(x,y)\,q = \varrho'(x,y)\,q', \quad \varrho(x,y)\,q = \varrho''(x,y)\,q''$$

так что

(6) $$\varrho'(x,y)\,q' = \varrho''(x,y)\,q''.$$

Из (5) и (6) получаем (для любых $x, y \in X$):

$$\chi\big(\varrho'(x,y)\big)\,q'' = \chi\big(\varrho'(x,y)\big)\,\chi(q'') = \varrho'(x,y)\,q' = \varrho''(\chi,y)\,q''.$$

Следовательно, $\chi\big(\varrho'(x,y)\big) = \varrho''(x,y)$, т. е. $\chi \circ \varrho' = \varrho''$. Таким образом, насыщенные метрики ϱ' и ϱ'' совпадают с точностью до биморфизма.

Теорема 2. *Введенное выше отношение эквивалентности полуметрик рефлексивно, симметрично и транзитивно и, следовательно, порождает разбиение совокупности полуметрик, заданных на X, на попарно непересекающиеся классы эквивалентности. В каждом классе имеется единственная (с точностью до биморфизма) насыщенная полуметрика, порождающая все полуметрики того же класса. При этом же отношении эквивалентности совокупность обобщенных метрик, заданных на X, также разбивается на классы эквивалентности, и в каждом классе имеется единственная (с точностью до биморфизма) насыщенная метрика, порождающая все метрики того же класса.*

Доказательство. Рефлексивность и симметричность введенного отношения эквивалентности очевидны. Докажем транзитивность. Пусть $\varrho' \sim \varrho''$ и $\varrho'' \sim \varrho'''$, т. е. существуют такие полуметрики ϱ_1, ϱ_2 и такие мономорфизмы

$$\varphi_1'\colon R^{\Delta_1} \to R^{\Delta'}, \quad \varphi_1''\colon R^{\Delta_1} \to R^{\Delta''},$$
$$\varphi_2''\colon R^{\Delta_2} \to R^{\Delta''}, \quad \varphi_2'''\colon R^{\Delta_2} \to R^{\Delta'''},$$

что

$$\varrho' = \varphi_1' \circ \varrho_1, \quad \varrho'' = \varphi_1'' \circ \varrho_1, \quad \varrho'' = \varphi_2'' \circ \varrho_2, \quad \varrho''' = \varphi_2''' \circ \varrho_2.$$

В силу Леммы 7 существуют такие *насыщенные* полуметрики ϱ^*, ϱ^{**}, и такие гомоморфизмы $\varphi^*\colon R^{\Delta^*} \to R^{\Delta_1}$, $\varphi^{**}\colon R^{\Delta^{**}} \to R^{\Delta_2}$, что $\varrho_1 = \varphi^* \circ \varrho^*$, $\varrho_2 = \varphi^{**} \circ \varrho^{**}$. Мы имеем:

$$\varrho'' = \varphi_1'' \circ \varrho_1 = \varphi_1'' \circ (\varphi^* \circ \varrho^*) = (\varphi_1'' \circ \varphi^*) \circ \varrho^*,$$
$$\varrho'' = \varphi_2'' \circ \varrho_2 = \varphi_2'' \circ (\varphi^{**} \circ \varrho^{**}) = (\varphi_2'' \circ \varphi^{**}) \circ \varrho^{**}.$$

Таким образом, одна и та же полуметрика ϱ'' порождается двумя насыщенными полуметриками φ^*, ϱ^{**}. В силу Леммы 7, эти насыщенные полуметрики отличаются лишь биморфизмом, т. е. существует такой биморфизм $\Psi\colon R^{\Delta^*} \to R^{\Delta^{**}}$, что $\varrho^{**} = \psi \circ \varrho^*$. Теперь мы получаем:

$$\varrho' = \varphi_1' \circ \varrho_1 = \varphi_1' \circ (\varphi^* \circ \varrho^*) = (\varphi_1' \circ \varphi^*) \circ \varrho^*,$$
$$\varrho''' = \varphi_2''' \circ \varrho_2 = \varphi_2''' \circ (\varphi^{**} \circ \varrho^{**}) = (\varphi_2''' \circ \varphi^{**}) \circ \varrho^{**} =$$
$$= (\varphi_2''' \circ \varphi^{**}) \circ (\psi \circ \varrho^*) = (\varphi_2''' \circ \varphi^{**} \circ \psi) \circ \varrho^*.$$

Итак, обе полуметрики ϱ', ϱ''' порождаются одной и той же полуметрикой ϱ^* и потому эквивалентны: $\varrho' \sim \varrho'''$. Тем самым транзитивность доказана, и первое утверждение теоремы установлено.

Пусть теперь R — один из классов эквивалентности и $\varrho \in R$. Согласно Лемме 7, существует насыщенная полуметрика ϱ^*, порождающая полуметрику ϱ, т. е. $\varrho = \varphi \circ \varrho^*$.

Пусть, далее, ϱ_1-любая другая полуметрика того же класса R, так что $\varrho \sim \varrho_1$. Тогда существует полуметрика ϱ', порождающая обе полуметрики ϱ, ϱ_1:

$$\varrho = \varphi \circ \varrho', \quad \varrho_1 = \varphi_1 \circ \varrho'.$$

Согласно Лемме 7, существует насыщенная полуметрика ϱ^{**}, порождающая полуметрику ϱ', т. е. $\varrho' = \varphi' \circ \varrho^{**}$. Теперь мы имеем:

$$\varrho = \varphi \circ \varrho' = \varphi \circ (\varphi' \circ \varrho^{**}) = (\varphi \circ \varphi') \circ \varrho^{**}\,.$$

Таким образом, полуметрика ϱ порождается двумя насыщенными полуметриками ϱ^*, ϱ^{**}, и потому эти насыщенные полуметрики отличаются лишь биморфизмом: $\varrho^{**} = \psi \circ \varrho^*$. Теперь имеем:

$$\varrho_1 = \varphi_1 \circ \varrho' = \varphi_1 \circ (\varphi' \circ \varrho^{**}) = (\varphi_1 \circ \varphi') \circ \varrho^{**} =$$
$$= (\varphi_1 \circ \varphi') \circ (\psi \circ \varrho^*) = (\varphi_1 \circ \varphi' \circ \psi) \circ \varrho^*\,.$$

Мы видим, что насыщенная полуметрика ϱ^*, порождающая одну полуметрику $\varrho \in R$, порождает и любую другую полуметрику $\varrho_1 \in R$, т. е. в каждом классе эквивалентности имеется насыщенная полуметрика, порождающая все полуметрики этого класса. Единственность ее (с точностью до биморфизма) очевидна.

Для доказательства последнего утверждения теоремы достаточно установить, что если полуметрика ϱ является обобщенной метрикой, то и порождающая ее насыщенная полуметрика также является обобщенной метрикой. Итак, пусть $\varrho = \varphi \circ \varrho^*$, где ϱ — обобщенная метрика, а ϱ^* — насыщенная полуметрика. Пусть x, y — две произвольные точки пространства X, причем $x \neq y$. Так как ϱ — обобщенная метрика, то $\varrho(x, y) \neq 0$. А так как $\varrho(x, y) = \varphi\big(\varrho^*(x, y)\big)$, то, очевидно и $\varrho^*(x, y) \neq 0$. Таким образом, ϱ^* также является обобщенной метрикой. Теорема доказана.

Обозначим через $M(X)$ множество всех классов эквивалентности полуметрик на X, построенное на основе Теоремы 2. В $M(X)$ введем естественный порядок, определяемый следующим образом. Пусть $\alpha, \alpha' \in M(X)$; мы считаем, что $\alpha \leqslant \alpha'$, если для полуметрик $\varrho \in \alpha$, $\varrho' \in \alpha'$ существует гомоморфизм ψ: $R^{\Delta'} \to R^{\Delta}$, удовлетворяющий условию $\varrho = \psi \circ \varrho'$. Корректность этого определения мы докажем ниже (в Лемме 8).

Обозначим теперь через $\Delta(X)$ множество *всех действительных полуметрик* на X, не равных тождественно нулю. Далее, для произвольной полуметрики ϱ на X мы обозначим через $\delta(\varrho)$ множество всех действительных полуметрик $\sigma \in \Delta(X)$, удовлетворяющих условию $\sigma = \varphi \circ \varrho$, где φ — некоторый гомоморфизм.

Лемма 8. *Данное выше определение порядка в $M(X)$ корректно (т. е. не зависит от выбора представителей); оно превращает $M(X)$ в частично упорядоченное множество. Далее, две полуметрики ϱ_1 и ϱ_2 в том и только в том случае эквивалентны, если $\delta(\varrho_1) = \delta(\varrho_2)$. Это позволяет ввести для любого класса $\alpha \in M(X)$ множество $\delta(\alpha) \subset \Delta(X)$: по определению $\delta(\alpha) = \delta(\varrho)$, где $\varrho \in \alpha$. Неравенство $\alpha \leqslant \beta$ имеет место в $M(X)$ в том и только в том случае, если $\delta(\alpha) \subset \delta(\beta)$.*

Докажем прежде всего, что если ϱ — произвольная полуметрика, а ϱ^* — порождающая ее насыщенная полуметрика, то существует такой гомоморфизм ψ: $R^{\Delta} \to R^{\Delta^*}$, что $\varrho^* = \psi \circ \varrho$. Пусть φ: $R^{\Delta^*} \to R^{\Delta}$ — такой мономорфизм, что $\varrho = \varphi \circ \varrho^*$, и пусть

$$\Delta = \widetilde{\Delta} \cup \big(\bigcup_{q' \in \Delta^*} M_{q'}\big)$$

— разбиение множества Δ, соответствующее этому мономорфизму (Теорема 1). Выберем в каждом множестве $M_{q'}$ один элемент $p(q')$, т. е. $p(q') \in M_{q'}$. Определим, далее, отображение ψ: $\Delta \to D^{\Delta^*}$, считая, что $\psi\big(p(q')\big) = q'$ и $\psi(q) = 0$ для остальных элементов множества Δ. Таким образом, в каждый элемент $q' \in \Delta^*$ отображается ровно один элемент из Δ, и притом элемент, принадлежащий множеству $M_{q'}$. Условия, указанные в Лемме 5, соблюдены, и потому отображение ψ может быть продолжено до гомоморфизма ψ: $R^{\Delta} \to R^{\Delta^*}$. Этот гомоморфизм и является искомым. В самом деле, так как $\varrho = \varphi \circ \varrho^*$, то для любых точек $x, y \in X$ мы имеем $\varrho(x, y) = \varphi\big(\varrho^*(x, y)\big)$, и потому, согласно Следствию 1,

$$\varrho(x, y)q = \varphi\big(\varrho^*(x, y)\big)q = \varrho^*(x, y)q'\,, \qquad \text{если } q \in M_{q'};$$

в частности,

$$\varrho(x, y)p(q') = \varrho^*(x, y)q'\,,$$

или иначе

$$\varrho(x, y)q = \varrho^*(x, y)\psi(q)\,, \qquad \text{если } q = p(q')\,. \tag{7}$$

Для остальных же элементов $q \in \Delta$ (не имеющих вида $p(q')$) мы имеем

$$\varrho^*(x, y)\cdot\psi(q) = 0 \tag{8}$$

(ибо $\psi(q) = 0$).

Соотношения (7) и (8) означают, согласно Следствию 1, что $\psi\big(\varrho(x, y)\big) = \varrho^*(x, y)$ (для любых $x, y \in X$), т. е. $\varrho^* = \psi \circ \varrho$.

Докажем теперь корректность введенного в $M(X)$ определения порядка. Пусть $\alpha, \alpha' \in M(X)$; далее, пусть $\varrho \in \alpha$, $\varrho' \in \alpha'$ и предположим, что $\varrho = \psi \circ \varrho'$, где ψ — некоторый гомоморфизм. Для доказательства корректности определения нужно установить, что если $\varrho_1 \in \alpha$, $\varrho \in \alpha'$, то существует гомоморфизм ψ_1, удовлетворяющий условию $\varrho_1 = \psi_1 \circ \varrho_1'$. Пусть ϱ_*, ϱ_*' — насыщенные метрики, принадлежащие классам α, α' соответственно. Тогда $\varrho_1 = \varphi_1 \circ \varrho_*$, $\varrho' = \varphi' \circ \varrho_*'$, где φ_1, φ_1' — некоторые мономорфизмы. Кроме того, согласно уже доказанному, $\varrho_* = \psi_* \circ \varrho$, $\varrho_*' = \psi_*' \circ \varrho_1'$, где ψ_*, ψ_*' — некоторые гомоморфизмы. Теперь мы имеем

$$\varrho_1 = \varphi_1 \circ \varrho_* = \varphi_1 \circ \psi_* \circ \varrho = \varphi_1 \circ \psi_* \circ \psi \circ \varrho' = \varphi_1 \circ \psi_* \circ \psi \circ \varphi' \circ \varrho_*' =$$
$$= \varphi_1 \circ \psi_* \circ \psi \circ \varphi' \circ \psi_*' \circ \varrho_1'\,,$$

что и доказывает корректность определения порядка.

Транзитивность введенного отношения порядка очевидна (если $\varrho = \psi \circ \varrho'$, $\varrho' = \psi' \circ \varrho''$, то $\varrho = (\psi \circ \psi') \circ \varrho''$, т. е. если $\alpha \leqslant \alpha'$, $\alpha' \leqslant \alpha''$, то $\alpha \leqslant \alpha''$). Таким образом, $M(X)$ превращается в частично упорядоченное множество.

Пусть теперь полуметрики ϱ_1, ϱ_2 эквивалентны, т. е. $\varrho_1, \varrho_2 \in \alpha \in M(X)$, и пусть $\sigma \in \delta(\varrho_1)$, т. е. $\sigma = \varphi \circ \varrho_1$. Выберем в классе α насыщенную полуметрику ϱ^*. Тогда $\varrho_1 = \varphi_1 \circ \varrho^*$, где φ_1-некоторый мономорфизм. Далее, согласно сказанному в начале доказательства, $\varrho^* = \psi \circ \varrho_2$, где ψ — некоторый гомоморфизм. Мы получаем теперь:

$$\sigma = \varphi \circ \varrho_1 = \varphi \circ \varphi_1 \circ \varrho^* = \varphi \circ \varphi_1 \circ \psi \circ \varrho_2$$

т. е. $\sigma \in \delta(\varrho_2)$. Итак, если $\sigma \in \delta(\varrho_1)$, то $\sigma \in \delta(\varrho_2)$, т. е. $\delta(\varrho_1) \subset \delta(\varrho_2)$. Аналогично устанавливается и обратное включение. Таким образом, $\delta(\varrho_1) = \delta(\varrho_2)$.

Остается доказать последнее утверждение леммы. Пусть $\alpha \leqslant \beta$. Тогда для насыщенных полуметрик $\varrho_\alpha, \varrho_\beta$, принадлежащих классам α, β имеет место соотношение $\varrho_\alpha = \psi \circ \varrho_\beta$, где ψ — некоторый гомоморфизм. Если теперь, $\sigma \in \delta(\alpha)$, т. е. $\sigma = \varphi \circ \varrho_\alpha$, то мы имеем $\sigma = \varphi \circ \varrho_\alpha = \varphi \circ \psi \circ \varrho_\beta$, т. е. $\sigma \in \delta(\beta)$. Итак, $\delta(\alpha) \subset \delta(\beta)$.

Пусть, обратно, $\delta(\alpha) \subset \delta(\beta)$; докажем, что $\alpha \leqslant \beta$. Насыщенные полуметрики, принадлежащие классам α, β мы снова будем обозначать через $\varrho_\alpha, \varrho_\beta$. Пусть $q_0 \in \Delta_\alpha$. Тогда $\sigma_{q_0}(x, y) = \varrho_\alpha(x, y) q_0$ есть некоторая действительная полуметрика на X, не равная тождественно нулю. Положим

$$\psi(q_0) = 1;\ \psi(q) = 0 \quad \text{при } q \neq q_0 .$$

Мы получаем отображение ψ: $\Delta_\alpha \to D$, где $D = \{0, 1\}$, очевидно, удовлетворяющее условиям Леммы 5. Поэтому существует гомоморфизм ψ: $R^{\Delta_\alpha} \to R$, продолжающий отображение ψ: $\Delta_\alpha \to D$ (где R — действительная прямая). Из следствия 1 мы непосредственно получаем $\sigma_{q_0} = \psi \circ \varrho_\alpha$ (ибо $\varrho_\alpha(x, y) q_0 = \sigma(x, y) = \sigma(x, y)\psi(q_0)$ и $\sigma_{q_0}(x, y)\psi(q) = 0$ при $q \neq q_0$). Следовательно, $\sigma_{q_0} \in \delta(\varrho_\alpha) = \delta(\alpha)$. Из включения $\delta(\alpha) \subset \delta(\beta)$ вытекает теперь, что $\sigma_{q_0} \in \delta(\beta)$, т. е. $\sigma_{q_0} \in \delta(\varrho_\beta)$, и потому $\sigma_{q_0} = \varphi \circ \varrho_\beta$, где φ: $R^{\Delta_\beta} \to R$ — некоторый гомоморфизм. Гомоморфизм φ является ненулевым, ибо σ_{q_0} не равна тождественно нулю. Так как поле R содержит лишь один неразложимый идемпотент 1, то ненулевой гомоморфизм φ имеет следующую структуру (см. Теорему 1): имеется такой элемент $q^0 \in \Delta_\beta$, что $\varphi(q^0) = 1$, а для остальных $q \in \Delta_\beta$ имеем $\varphi(q) = 0$. При этом, согласно Следствию 1, $\varrho_\beta(x, y) q^0 = \sigma_{q_0}(x, y) \circ \varphi(q^0) = \sigma_{q_0}(x, y)$. Элемент $q^0 \in \Delta_\beta$ однозначно определяется элементом $q_0 \in \Delta_\alpha$, и мы положим $q^0 = \chi(q_0)$. Мы получаем таким образом отображение χ: $\Delta_\alpha \to \Delta_\beta$. Это отображение является вложением, т. е. при $q_0 \neq q_0'$ (где $q_0, q_0' \in \Delta_\alpha$) мы имеем $\chi(q_0) \neq \chi(q_0')$. В самом деле, если бы было $\chi(q_0) = \chi(q_0') = q^0$, то мы имели бы $\varrho_\beta(x, y) q^0 = \sigma_{q_0}(x, y)$, $\varrho_\beta(x, y) = \sigma_{q_0'}(x, y)$, т. е. $\sigma_{q_0}(x, y) = \sigma_{q_0'}(x, y)$, или иначе $\varrho_\alpha(x, y) q_0 = \varrho_\alpha(x, y) q_0'$ (для всех $x, y \in X$), что противоречит насыщенности метрики ϱ_α. Итак, отображение χ: $\Delta_\alpha \to \Delta_\beta$ является вложением.

Определим теперь отображение π: $\Delta_\beta \to \Delta_\alpha$, положив

$$\pi(q) = \begin{cases} q' & \text{если } \chi(q') = q , \quad \text{где } q' \in \Delta_\alpha , \\ 0 & \text{если } q \in \Delta_\beta \setminus \chi(\Delta_\alpha) . \end{cases}$$

В частности, $\pi(q^0) = q_0$, где q_0 и q^0 имеют тот же смысл, что и раньше. Так как $\Delta_\alpha \subset D^{\Delta_\alpha}$, то π можно рассматривать как отображение $\Delta_\beta \to D^{\Delta_\alpha}$. На основании Леммы 5, это отображение может быть продолжено до гомоморфизма π: $R^{\Delta_\beta} \to R^{\Delta_\alpha}$. Согласно следствию 2, π является эпиморфизмом. Из полученных ранее соотношений

$$\varrho_\beta(x, y) q^0 = \sigma_{q_0}(x, y) = \varrho_\alpha(x, y) q_0$$

или, иначе,

$$\varrho_\beta(x, y) q^0 = \varrho_\alpha(x, y) \pi(q^0)$$

вытекает, в силу Следствия 1, что $\varrho_\alpha = \pi \circ \varrho_\beta$, и потому $\alpha \leqslant \beta$.

Лемма 9. *Произведению полуметрик (заданных на одном и том же множестве X) соответствует объединение соответствующих множеств $\delta(\varrho)$.*

В самом деле, пусть ϱ: $X \times X \to \prod_\nu R^{\Delta_\nu}$ есть произведение полуметрик ϱ_ν: $X \times X \to R^{\Delta_\nu}$ (где ν пробегает некоторое множество индексов). Обозначим через φ_{ν_0}: $\prod_\nu R^{\Delta_\nu} \to R^{\Delta_{\nu_0}}$ естественный гомоморфизм (проекцию). Тогда, очевидно, $\varphi_{\nu_0} \circ \varrho = \varrho_{\nu_0}$, и потому $\varrho \geqslant \varrho_{\nu_0}$ для любого индекса ν_0. Следовательно, $\delta(\varrho_\nu) \subset \delta(\varrho)$ для любого индекса ν, и потому $\delta(\varrho) \supset \bigcup_\nu \delta(\varrho_\nu)$.

Докажем обратное включение. Пусть $\sigma \in \delta(\varrho)$, т. е. $\sigma = \psi \circ \varrho$, где ψ — некоторый гомоморфизм. Так как σ — действительная полуметрика (т. е. отображение $X \times X \to R$), то гомоморфизм ψ переводит $\prod_\nu R^{\Delta_\nu}$ в R. Но в R имеется лишь один неразложимый идемпотент 1. Поэтому гомоморфизм ψ переводит самое большее один неразложимый идемпотент полуполя $\prod_\nu R^{\Delta_\nu}$ в 1, а все остальные — в нуль. Допустим, что этот неразложимый идемпотент, переходящий в 1, принадлежит полуполю $R^{\Delta_{\nu_0}}$. Тогда, очевидно, $\psi = \psi \circ i_{\nu_0} \circ \varphi_{\nu_0}$, где φ_{ν_0}: $\prod_\nu R^{\Delta_\nu} \to R^{\Delta_{\nu_0}}$ естественная проекция, а i_{ν_0}: $R^{\Delta_{\nu_0}} \to \prod_\nu R^{\Delta_\nu}$ — естественный мономорфизм вложения. Следовательно,

$$\sigma = \psi \circ \varrho = (\psi \circ i_{\nu_0} \circ \varphi_{\nu_0}) \circ \varrho = (\psi \circ i_{\nu_0}) \circ (\varphi_{\nu_0} \circ \varrho) = (\psi \circ i_{\nu_0}) \circ \varrho_{\nu_0}$$

т. е. $\sigma \in \delta(\varrho_{\nu_0})$. Таким образом, $\delta(\varrho) \subset \bigcup_\nu \delta(\varrho_\nu)$.

Лемма 10. *Для любого подмножества $\delta \subset \Delta(X)$ найдется в $M(X)$ такой класс α, что $\delta(\alpha) = \delta$.*

Это непосредственно вытекает из предыдущей леммы: достаточно перемножить все полуметрики, входящие в множество $\delta(\alpha)$.

Из доказанных лемм непосредственно вытекает следующее предложение:

Теорема 3. *Частично упорядоченное множество $M(X)$ представляет собой полную атомную алгебру Буля изоморфную $D^{\Delta(X)}$. Её неразложимыми идемпотентами (атомами) служат всевозможные классы, содержащие действительные полуметрики, не обращающиеся тождественно в нуль. В алгебре Буля $M(X)$ для любого множества $A \subset M(X)$ элемент ∇A определяется как класс, содержащий насыщенную полуметрику, порождающую прямое произведение всех полуметрик, взятых по одной из каждого класса, составляющих множество A. Единицей в $M(X)$ является класс, содержащий произведение всех действительных полуметрик на X. Дополнение $C\alpha$ элемента $\alpha \in M(X)$ определяется, как класс, содержащий минимальную насыщенную полуметрику, дающую в произведении с полуметрикой $\varrho \in \alpha$ единицу алгебры Буля $M(X)$.*

Цитированная литература

[1] М. Я. Антоновский, В. Г. Болтянский, Т. А. Сарымсаков, *Очерк теории топологический полуполей*, УМН, т. XXI, выпуск 4 (130), 1966.

[2] — *Обобщенные метрики и структуры связанные с ними*, УМН выпуск 1, 1969.

ЦЭМИ АН СССР

Reçu par la Rédaction le 18. 12. 1968

Remarks on generalized analytic sets and the axiom of determinateness

by

B. V. Rao (Calcutta)

§ 1. Summary. The purpose of this note is to treat systematically the generalized analytic sets introduced by Ulam and discuss the problems posed by him. Some results of this note will be strengthened versions of previous results of the author. Others will be conclusions from the axiom of determinateness introduced by Jan Mycielski and H. Steinhaus. After giving preliminaries in Section 2, we discuss the main results in Sections 3 and 4. The results in this paper could equivalently be stated in terms of arbitrary separable metric spaces, but the author has not done so to keep the flavour of the discussion of Ulam.

§ 2. Preliminaries. Let I denote the unit interval $[0,1]$ and $\{A_n, n \geqslant 1\}$ be any sequence of subsets of I. Unless otherwise stated this sequence is fixed throughout the paper. $\boldsymbol{B}$ is the σ-algebra on I generated by this sequence. Following (Ulam [11], p. 9) the projections to I of sets in the σ-algebra on $I \times I$ generated by rectangles with sides in $\boldsymbol{B}$ are called generalized analytic sets (clearly these will depend on the sequence $\{A_n\}$). The σ-algebra on I generated by the generalized analytic sets is denoted by $\boldsymbol{A}$. The generalized analytic sets of $I^2 = I \times I$ are defined as the projections to I^2 of sets in the σ-algebra on I^3 generated by cubes with sides in $\boldsymbol{B}$. One can also define higher projective classes which are, however, not necessary for our purposes.

When $\{A_n\}$ happens to be the sequence of intervals with rational end points then $\boldsymbol{B}$ coincides with the usual Borel sets and the generalized analytic sets coincide with the usual analytic sets. We shall refer to these as standard Borel and standard analytic respectively.

Let f be the Marczewski function [2] on I to I defined as

$$f(x) = \sum \frac{2\chi_{A_n}(x)}{3^n}.$$

The range of f is denoted by R. The σ-algebra $\boldsymbol{R}$ on R is always the standard Borel σ-algebra of I restricted to R. If the atoms of $\boldsymbol{B}$ are singletons, then obviously f is an isomorphism between $(I, \boldsymbol{B})$ and $(R, \boldsymbol{R})$.