STUDIA MATHEMATICA, T. XXXIV. (1970)

Sur l'intégration directe des équations d'évolution

par

T. LEŻAŃSKI (Lublin)

Faisons correspondre à tout nombre réel $t \in \langle 0, \tau \rangle$ un espace réel complet X_t de Banach, avec la norme $\| \|_t$. Pour $\varepsilon > 0$, $0 \leqslant t \leqslant \tau - \varepsilon$ soit définie l'opération linéaire $S(t, \varepsilon) \in X_t \to X_{t+\varepsilon}$. Admettons les hypothèses suivantes:

(A) Il existe des fonctions réelles $\varphi(t, \varepsilon)$ et $\psi(t)$, $\varphi(t, \varepsilon) \geqslant 1$, $\psi(t)$ croissante et $\psi(0) = 0$, telles que $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_n \leqslant \tau$, $\delta_i = t_{i+1} - t_i$ entraîne

$$\prod_{i=1}^{n-1} \varphi(t_i, \delta_i) \leqslant \psi(t_n - t_1), \tag{1}$$

$$\|S(t, \varepsilon)x\|_{t+\varepsilon} \leqslant \varphi(t, \varepsilon) \|x\|_t \qquad (x \in X_t,\ 0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon). \tag{2}$$

(B) Pour $t \in \langle 0, \tau \rangle$ il existe un ensemble $Z_t \subset X_t$ convexe, fermé et contenant 0, tel que

$$S(t, \varepsilon)x \in Z_{t+\varepsilon} \quad \text{si } x \in Z_t. \tag{3}$$

(C) Il existe un nombre $C > 0$ tel que pour $x \in Z_t$, $\delta, \varepsilon \geqslant 0$ l'inégalité (4) a lieu:

$$\|S(t, \delta+\varepsilon)x - S(t+\delta, \varepsilon)S(t, \delta)x\|_{t+\delta+\varepsilon} \leqslant C\delta\varepsilon. \tag{4}$$

Définissons les fonctions abstraites (f. ab.) comme les transformations de la forme $\langle 0, \tau \rangle \ni t \to x(t) \in X_t$, et posons

$$\frac{D}{Dt} x(t) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [x(t) - S(t-\varepsilon, \varepsilon)x(t-\varepsilon)], \tag{5}$$

si la limite ci-dessus existe au sens fort dans X_t. Nous donnerons dans ce travail les conditions suffisantes pour que les équations

$$\frac{D}{Dt} x(t) = 0 \ \left(\text{resp. } \frac{D}{Dt} x(t) = y(t)\right), \qquad x(0) = a \in X_0 \tag{6}$$

admettent des solutions uniques dans une certaine classe linéaire de fonctions abstraites. Nous donnerons aussi une application à l'équation

$$\frac{d}{dt}x(t) = A_t(x(t)),$$

où A_t sont fermées et linéaires. Nous construirons les solutions de (6) d'une manière effective, à l'aide d'un "produit-intégrale".

Soient $s \epsilon \langle 0, \tau \rangle$, π une division de l'intervalle $\langle s, \tau \rangle$:

$$0 \leqslant s = t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_p = \tau, \qquad \delta_i = t_{i+1} - t_i.$$

A toute division π on peut faire correspondre une opération linéaire $T(\pi, s, t)$ définie sur X_s et à valeurs dans X_t telle que

$$T(\pi, s, t)x = S(t_k, t-t_k)S(t_{k-1}, \delta_{k-1})\ldots S(t_0, \delta_0)x, \tag{7}$$

si $x \epsilon X_s = X_{t_0}$ et $t_k \leqslant t \leqslant t_{k+1}$.

Lemme 1. *Pour* $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant \tau$, $x \epsilon X_s$ *on a*

$$\|T(\pi, s, t)x\|_t \leqslant \psi(t-s)\|x\|_s. \tag{8}$$

Démonstration. En faisant usage des inégalités (2) et (1) de l'hypothèse (A), on obtient

$$\|T(\pi, s, t)x\|_t \leqslant \varphi(t, t-t_k)\prod_{i=0}^{k-1}\varphi(t_i, \delta_i)\|x\|_s \leqslant \psi(t-s)\|x\|_s, \qquad \text{c.q.f.d.}$$

Lemme 2. *Avec les notations précédentes on a, pour* $x \epsilon Z_{t_0}$,

$$\|S(t_n, \delta_n)S(t_{n-1}, \delta_{n-1})\ldots S(t_0, \delta_0)x - S(t_0, \delta_0+\ldots+\delta_n)x\|_{t_{n+1}} \leqslant C\psi(t_{n+1}-t_0)(t_{n+1}-t_0)^2. \tag{9}$$

Démonstration. En vertu de (4) et de (1), on a

$$\begin{aligned}
&\|S(t_n, \delta_n)S(t_{n-1}, \delta_{n-1})\ldots S(t_0, \delta_0)x - S(t_0, \delta_0+\ldots+\delta_n)x\|_{t_{n+1}} \\
&\leqslant \|S(t_n, \delta_n)[S(t_{n-1}, \delta_{n-1})\ldots S(t_0, \delta_0) - S(t_0, \delta_0+\ldots+\delta_{n-1})]x\|_{t_{n+1}} + \\
&\quad + \|S(t_n, \delta_n)S(t_0, \delta_0+\ldots+\delta_{n-1})x - S(t_0, \delta_0+\ldots+\delta_n)x\|_{t_{n+1}} \\
&\leqslant \varphi(t_n, \delta_n)\|S(t_{n-1}, \delta_{n-1})\ldots S(t_0, \delta_0)x - S(t_0, \delta_0+\ldots+\delta_{n-1})x\|_{t_{n+1}} + \\
&\quad + C\cdot(\delta_0+\delta_1+\ldots+\delta_{n-1})\cdot\delta_n,
\end{aligned}$$

d'où, en désignant par r_n le premier membre de (9), et en posant $\gamma_n = \delta_0+\ldots+\delta_n = t_{n+1}-t_n$, $a_n = \varphi(t_n, \delta_n)$ on obtient $r_n \leqslant a_n\cdot r_{n-1} + C\gamma_{n-1}\delta_n$, $r_0 = 0$. Or, une induction facile donne, vu que $\gamma_i > 0$, $a_i \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}
r_n &\leqslant C\cdot a_0\ldots a_n\cdot(\delta_0+\ldots+\delta_n)\gamma_{n-1} \\
&= C\prod_{i=0}^{n}\varphi(t_i, \delta_i)(t_{n+1}-t_0)(t_n-t_0) \leqslant C\psi(t_{n+1}-t_0)(t_{n+1}-t_0)^2,
\end{aligned}$$

c.q.f.d.

Lemme 3. *Soient* $t_0 \epsilon \langle 0, \tau \rangle \pi$, $t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_p = \tau$ *une division de l'intervalle* $\langle t_0, \tau \rangle$ *et* σ_n: $t_n = s_1^n \leqslant s_2^n \leqslant \ldots \leqslant s_{r_n}^n = t_{n+1}$ *une division de l'intervalle* $\langle t_n, t_{n+1} \rangle$. *Posons*: $\delta_i = t_{i+1}-t_i$, $\delta_i^n = s_{i+1}^n - s_i^n$, $\Delta = \max\delta_i$. *Posons enfin, pour* $x_0 \epsilon Z_{t_0}$:

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= S(t_n, \delta_n)\ldots S(t_0, \delta_0)x_0, \\
y_{n+1} &= S(s_{r_n-1}^n, \delta_{r_n-1}^n)\ldots S(s_1^n, \delta_1^n)y_n.
\end{aligned}$$

On a alors

$$\|x_n - y_n\|_{t_n} \leqslant C\psi(\Delta)\Delta\cdot\psi(t_n-t_0)(t_n-t_0). \tag{10}$$

Démonstration. Remarquons d'abord que les éléments x_n et y_n appartiennent, d'après (3), hypothèse (B), à l'ensemble Z_{t_n}, de sorte que l'inégalité (4), hypothèse (C), est applicable. En remplaçant alors dans (9), lemme 2, t_0 par t_n, x par y_n et δ_i par δ_i^n, on obtient

$$\begin{aligned}
&\|y_{n+1} - S(t_n, \delta_n)y_n\|_{t_{n+1}} \\
&\qquad = \|S(s_{r_n-1}^n, \delta_{r_n-1}^n)\ldots S(s_1^n, \delta_1^n)y_n - S\Big(s_1^n, \sum_{i=1}^{r_n-1}\delta_i^n\Big)y_n\|_{t_{n+1}} \\
&\qquad \leqslant C\psi(t_{n+1}-t_n)(t_{n+1}-t_n)^2 = C\psi(\delta_n)(\delta_n)^2,
\end{aligned}$$

ayant égard à

$$\delta_n = t_{n+1}-t_n = \sum_{i=1}^{r_n-1}\delta_i^n.$$

Vu que $x_{n+1} = S(t_n, \delta_n)x_n$, on tire de l'inégalité obtenue:

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1}-y_{n+1}\|_{t_{n+1}} &\leqslant \|y_{n+1} - S(t_n, \delta_n)x_n\|_{t_{n+1}} \\
&\leqslant \|y_{n+1} - S(t_n, \delta_n)y_n\|_{t_{n+1}} + \|S(t_n, \delta_n)(y_n - x_n)\|_{t_{n+1}} \\
&\leqslant C\psi(\delta_n)\delta_n^2 + \varphi(t_n, \delta_n)\|x_n - y_n\|_{t_{n+1}}.
\end{aligned}$$

Nous obtenons par induction, en tenant compte du fait que $y_0 = x_0$ et que la fonction ψ est croissante,

$$\begin{aligned}
\|x_n - y_n\|_{t_n} &\leqslant C\max\psi(\delta_i)\prod_{i=0}^{n-1}\varphi(t_i, \delta_i)\sum_{i=0}^{n-1}\delta_i^2 \\
&\leqslant C\psi(\Delta)\psi(\delta_0+\ldots+\delta_{n-1})(\delta_0+\ldots+\delta_{n-1})\Delta \\
&\leqslant C\psi(\Delta)\Delta\cdot\psi(t_n-t_0)(t_n-t_0),
\end{aligned}$$

c.q.f.d.

En conservant les notations du lemme 3, définissons par σ la division de l'intervalle $\langle t_0, \tau \rangle$ engendrée par l'union de toutes les divisions σ_n des intervalles $\langle t_n, t_{n+1} \rangle$. Considérons les opérations $T(\pi, t_0, t)$ et $T(\sigma, t_0, t)$, définies par (7). Or nous avons, d'après (7), pour $x \epsilon Z_{t_0}$,

$$T(\pi, t_0, t)x = S(t_n, t-t_n)S(t_{n-1}, \delta_{n-1})\ldots S(t_0, \delta_0), \tag{11}$$

$$T(\sigma, t_0, t)x = S(s_k^n, t-s_k^n)S(s_{k-1}^n, \delta_{k-1}^n)\ldots S(s_1^n, \delta_1^n)y_n, \tag{12}$$

si $t_n \leqslant s_k^n \leqslant t \leqslant s_{k+1}^n \leqslant t_{n+1}$; or, remplaçant dans (10) n par $n+1$, et puis en y identifiant t avec t_{n+1} on obtient de (10)

LEMME 4. *Soient $0 \leqslant s \leqslant \tau$, π une division de l'intervalle $\langle s, \tau\rangle$, σ une subdivision de π, Δ le diamètre de π. On a alors pour $x \in Z_s$*

$$\|T(\pi, s, t)x - T(\sigma, s, t)x\|_t \leqslant C\Delta\psi(\Delta)(t-s)\psi(t-s). \tag{13}$$

Soit maintenant π_n une suite croissant de divisions (c.-à-d. telles que $\pi_{n+1} \supset \pi_n$), et telles que $\Delta(\pi_n) \to 0$. Pour $x \in Z_s$ la suite $T(\pi_n, s, t)x$ est alors fondamentale, car, en vertu du lemme 4, inégalité (13), on a

$$\|T(\pi_n, s, t)x - T(\pi_m, s, t)x\|_t \leqslant 2C\Delta(\pi_n)\psi\big(\Delta(\pi_n)\big)(t-s)\psi(t-s).$$

Or, l'espace X_t étant complet, la suite $T(\pi_n, s, t)x$ converge en norme $\| \|_t$ vers un élément que nous désignons par $T(s, t)x$. On a alors par définition

$$T(s, t)x = \lim_n T(\pi_n, s, t)x \quad \text{pour } x \in Z_s. \tag{14}$$

Il est évident que cette limite de dépend pas de la suite π_n, pourvu qu'on ait $\Delta(\pi_n) \to 0$. En effet, π et π' étant deux divisions arbitraires, leur union σ est une subdivision de π et de π', de sorte que le lemme 4 donne, pour $x \in Z_s$,

$$\|T(\pi, s, t)x - T(\pi', s, t)x\|_t \leqslant 2C\psi(\Delta)\cdot\Delta\cdot(t-s)\psi(t-s),$$

où $\Delta = \max[\Delta(\pi), \Delta(\pi')]$, ce qui prouve notre assertion.

De même, l'hypothèse $\pi_{n+1} \supset \pi_n$ n'est pas essentielle, car, $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ étant une suite arbitraire de divisions, on a pour $\sigma_n =$ union de $\pi_1, \ldots, \pi_n$: $\sigma_{n+1} \supset \sigma_n$ et $\Delta(\sigma_n) \leqslant \Delta(\pi_n)$. Enfin, la condition $x \in Z_s$ peut évidemment être remplacée par $x \in \mathrm{lin}(Z_s)$, de sorte que

$$T(s, t)x = \lim_n T(\pi_n, s, t)x \quad (x \in \mathrm{lin}(Z_s)).$$

On a de plus

$$T(s, t) \in Z_s \to Z_t. \tag{15}$$

En effet, si $x \in Z_s$, chacun des éléments $T(\pi_n, s, t)x \in Z_t$, en vertu de (3), hyp. (B). Or, Z_t étant fermé, (14) entraîne (15).

Notons encore:

$$\|T(s, t)x\|_t \leqslant \psi(t-s)\|x\|_s \quad (x \in \mathrm{lin}(Z_s),\ 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant \tau). \tag{16}$$

Pour $x \in Z_s$ c'est une simple conséquence de (8) et (14); le passage au cas $x \in \mathrm{lin}(Z_s)$ est évident. On a évidemment $T(s, s)x = x$ pour $x \in \mathrm{lin}(Z_s)$.

LEMME 5. *Pour $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant \tau - \varepsilon$, $x \in Z_s$ et $\varepsilon \geqslant 0$ on a*

$$\|S(t, \varepsilon)T(s, t)x - T(s, t+\varepsilon)x\|_{t+\varepsilon} \leqslant C\psi(\varepsilon)\varepsilon^2. \tag{17}$$

Démonstration. Soit $0 \leqslant s = s_1 \leqslant s_2 \leqslant \ldots \leqslant s_{p+1} = t = t_1 \leqslant t_2 \ldots \leqslant t_{n+1} = t+\varepsilon \leqslant t_{n+2} \leqslant \ldots \leqslant t_r = \tau$ une division de l'intervalle $\langle s, \tau\rangle$ contenant les points $s, t, t+\varepsilon$. En vertu de (3), $T(\pi, s, t)x \in Z_t$, de sorte que (9) donne

$$\begin{aligned}\|S(t, \varepsilon)T(\pi, s, t)x - T(\pi, s, t+\varepsilon)x\|_{t+\varepsilon} &= \|S(t_n, \delta_1+\ldots+\delta_n)T(\pi, s, t)x - \\ &\quad - S(t_n, \delta_n)S(t_{n-1}, \delta_{n-1})\ldots S(t_1, \delta_1)T(\pi, s, t)x\|_{t+\varepsilon} \\ &\leqslant C\psi(t_{n+1}-t_1)(t_{n+1}-t_2)^2 = C\psi(\varepsilon)\varepsilon^2.\end{aligned}$$

Soit maintenant π_n une suite de divisions contenant les points $s, t, t+\varepsilon$ et telles que $\Delta(\pi_n) \to 0$. Or, (17) étant vraie pour $T(\pi_n, s, t)x$ $(n = 1, 2, \ldots)$, il en est de même pour $T(s, t)x = \lim T(\pi_n, s, t)x$ vu que l'opération $S(t, \varepsilon)$ est linéaire et bornée, c.q.f.d.

Définition. Une fonction abstraite $x(\cdot)$, $x(t) \in X_t$, sera dite *uniformément différentiable* (un. diff.) si pour tout $\delta > 0$ il existe un $\varepsilon(\delta)$ tel que $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon(\delta)$ entraîne (pour la définition de $D\big(x/(t)\big)/Dt$ voir (5))

$$\left\|\frac{D}{Dt}x(t) - \varepsilon^{-1}[x(t) - S(t-\varepsilon, \varepsilon)x(t-\varepsilon)]\right\|_t \leqslant \delta.$$

Les f.ab.un. diff. forment évidemment un ensemble linéaire.

LEMME 6. *Si $x(\cdot)$ est une f.ab.un. diff. et si $D\big(x(t)\big)/Dt = 0$ pour $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, alors*

$$\|x(t_2)\|_{t_2} \leqslant \psi(t_2-t_1)\|x(t_1)\|_{t_1}. \tag{18}$$

Démonstration. Soit $\delta > 0$ arbitraire; choisissons un nombre naturel n suffisamment grand pour que $0 < \varepsilon \leqslant n^{-1}(t_2-t_1)$ entraîne

$$\left\|\frac{1}{\varepsilon}[S(t-\varepsilon, \varepsilon)x(t-\varepsilon) - x(t)]\right\|_t \leqslant \delta.$$

Posons $s_i = t_1 + (i/n)(t_2-t_1)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $\delta_i = s_{i+1} - s_i = (1/n)(t_2-t_1)$. On obtiendra alors de (2) et (1)

$$\begin{aligned}\|x(s_{i+1})\|_{s_{i+1}} - \varphi(s_i, \delta_i)\|x(s_i)\|_{s_i} &\leqslant \|x(s_{i+1})\|_{s_{i+1}} - \|S(s_i, \delta_i)x(s_i)\|_{s_{i+1}} \\ &\leqslant \|S(s_i, \delta_i)x(s_i) - x(s_{i+1})\|_{s_{i+1}} \leqslant \delta_i\delta = \frac{1}{n}(t_2-t_1)\delta,\end{aligned}$$

d'où l'on tire par induction

$$\begin{aligned}\|x(t_2)\|_{t_2} = \|x(s_n)\|_{s_n} &\leqslant \prod_{i=0}^{n-1}\varphi(s_i, \delta_i)\|x(t_1)\|_{t_1} + (n-1)n^{-1}(t_2-t_1)\delta \\ &\leqslant \psi(t_2-t_1)\|x(t_1)\|_{t_1} + (t_2-t_1)\delta,\end{aligned}$$

ce qui prouve (18), δ étant arbitrairement petit, c.q.f.d.

Théorème 1. *Soient* $0 \leqslant s < \tau$, $a \in \mathrm{lin}(Z_s)$. *Alors la f. ab.* $x(t) = T(s,t)a$ *est une solution de l'équation*

$$\frac{D}{Dt}x(t) = 0, \quad s < t \leqslant \tau, \quad x(s) = a,$$

unique dans la classe des f. ab. uniformément différentiables.

Démonstration. Soit d'abord $a \in Z_s$; alors $T(s,t)a \in Z_t$, de sorte que le lemme 5 est applicable. Alors (17) montre que

$$\frac{D}{Dt}T(s,t)a = 0 \tag{19}$$

et que, de plus, $T(s,t)a$ est une f. ab. un. diff., ce qui prouve la première partie du théorème. L'unicité découle immédiatement de (18), lemme 6. Le passage de Z_s à $\mathrm{lin}(Z_s)$ est évident, c.q.f.d.

Théorème 2. *Soient* $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant t_3 < \tau$, $x \in \mathrm{lin}(Z_{t_1})$. *On a alors*

$$T(t_2, t_3)T(t_1, t_2)x = T(t_1, t_3)x. \tag{20}$$

Démonstration. Posons $x(t) = T(t_1, t)x$, $y(s) = T(t_2, s)x(t_2)$. On a alors

$$\frac{D}{Dt}x(t) = 0, \quad \frac{D}{Ds}y(s) = 0,$$

$$y(t_2) = T(t_2, t_2)x(t_2) = x(t_2),$$

de sorte que le théorème 1 donne $y(t) = x(t)$ pour $t_2 \leqslant t < \sigma$, c.-à-d.

$$T(t_2, t)T(t_1, t_2)x = T(t_1, t)x.$$

Le passage au cas $\lim(Z_{t_1})$ est évident, c.q.f.d.

Théorème 3. *Soient* $t_1 \in \langle 0, \tau\rangle$, $y(t) \in Z_{t_1}$ $(t \geqslant 0)$. *Si la dérivée*

$$d^+y(t) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\varepsilon}[y(t+\varepsilon) - y(t)]$$

existe dans X_{t_1} *en norme* $\|\ \|_{t_1}$, *alors* $D\big(T(t_1, t)y(t)\big)/Dt$ *existe aussi et on a*

$$\frac{D}{Dt}T(t_1, t)y(t) = T(t_1, t)d^+y(t). \tag{21}$$

Démonstration. En vertu de (20) on a pour $\varepsilon > 0$

$$\left\|\frac{1}{\varepsilon}[S(t-\varepsilon, \varepsilon)T(t_1, t-\varepsilon)y(t-\varepsilon) - T(t_1 t)y(t)] - T(t_1, t)\left\{\frac{1}{\varepsilon}[y(t-\varepsilon) - y(t)]\right\}\right\|$$

$$= \left\|\frac{1}{\varepsilon}[S(t-\varepsilon, \varepsilon) - T(t-\varepsilon, t)]T(t_1, t-\varepsilon)y(t-\varepsilon)\right\|_t \leqslant C_\psi(\varepsilon)\varepsilon.$$

On obtient cette inégalité de la formule (17), lemme 5, en y posant $T(t_1, t-\varepsilon)y(t-\varepsilon)$ pour x et $t-\varepsilon$ pour t. Le lemme 5 est applicable, car $y(t) \in Z_{t_1}$ entraîne, en vertu de (16), que

$$T(t_1, t-\varepsilon)y(t-\varepsilon) \in Z_{t-\varepsilon}.$$

L'inégalité obtenue établit notre conclusion, vu que $T(t_1, t)$ est bornée en vertu de (15), c.q.f.d.

Définition. Une f. ab. $x(\cdot)$: $x(t) \in X_t$ sera dite *uniformément T-continue* (un. T-con.), si pour tout $\delta > 0$ il existe un $\vartheta > 0$ tel que $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \vartheta$ entraîne

$$\|x(t+\varepsilon) - T(t, t+\varepsilon)x(t)\|_{t+\varepsilon} \leqslant \delta. \tag{22}$$

Définissons $\mathfrak{M}$ comme l'ensemble des fonctions ab. $x(\cdot)$ un. T-con., telles que $x(t) \in Z_t$ pour $0 \leqslant t \leqslant \tau$. Soit $y(\cdot) \in \mathfrak{M}$. En vertu du lemme 7 la f. ab. $z(s) = T(s,t)y(s)$ considérée, pour t fixé comme fonction de la variable s, a ses valeurs dans l'espace fixé X_t, et elle y est continue en norme $\|\ \|_t$, de sorte que l'intégrale $\int_0^t T(s,t)y(s)\,ds$ existe.

Théorème 4. *Si la f.ab.* $y(\cdot) \in \mathfrak{M}$, *alors la f.ab.* $\int_0^t T(s,t)y(s)\,ds$ *est un. diff., et on a*

$$\frac{D}{Dt}\int_0^t T(s,t)y(s)\,ds = y(t). \tag{23}$$

Démonstration. Soit $\delta > 0$; $y(\cdot)$ étant supposée un. T-con., il existe un nombre $\vartheta > 0$ tel qu'on a, pour $t-\varepsilon \leqslant s \leqslant t$,

$$\|T(s,t)y(s) - y(t)\|_t \leqslant 2^{-1}\delta \quad (0 \leqslant \varepsilon \leqslant \vartheta).$$

Posons $\varepsilon_1 = \min\big(\vartheta, \big(2C\tau\psi(\tau)\big)^{-1}\delta\big)$. Or, comme l'hypothèse $y(\cdot) \in \mathfrak{M}$ entraîne $y(s) \in Z_s$, on a, en vertu de (15), $T(s, t-\varepsilon)y(s) \in Z_{t-\varepsilon}$, de sorte qu'on tire de (17), lemme 5, en y posant $T(s, t-\varepsilon)y(s)$ au lieu de x, l'inégalité suivante, vraie pour $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$:

$$\left\|\frac{1}{\varepsilon}\left\{\int_0^t T(s,t)y(s)\,ds - S(t-\varepsilon, \varepsilon)\int_0^{t-\varepsilon} T(s, t-\varepsilon)y(s)\,ds\right\} - y(t)\right\|_t$$

$$\leqslant \left\|\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{t-\varepsilon}[T(t-\varepsilon, t) - S(t-\varepsilon, \varepsilon)]T(s, t-\varepsilon)y(s)\,ds\right\|_t +$$

$$+ \left\|\frac{1}{\varepsilon}\int_{t-\varepsilon}^t [T(s,t)y(s) - y(t)]\,ds\right\|_t$$

$$\leqslant \varepsilon^{-1}(t-\varepsilon)C\psi(\varepsilon)\varepsilon^2 + \frac{\delta}{2} \leqslant \tau C\psi(\tau)\varepsilon_1 + \frac{\delta}{2} \leqslant \delta,$$

ce qui prouve la conclusion, c.q.f.d.

Théorème 5. *Soient* $y(\cdot)\in\mathfrak{M}$, $a\in Z_0$. *Alors la f. ab.*

$$x(t)=\int_0^t T(s,t)y(s)ds+T(0,t)a$$

est une solution de l'équation

$$\frac{D}{Dt}x(t)=y(t),\quad x(0)=a, \tag{24}$$

unique dans la classe des fonctions uniformément différentiables.

Démonstration. La première partie de notre conclusion découle du théorème 4; l'unicité est une conséquence du lemme 6, vu que la f. ab. $x(\cdot)$ définie plus haut est uniformément différentiable, en vertu du théorème 4 et du lemme 5, c.q.f.d.

Nous donnerons une application de la théorie développée ci-dessus à l'équation $d(x(t))/dt=A_t x(t)$.

Soient X un espace réel de Banach avec la norme $\|\ \|$, M un sous-ensemble linéaire dense de X, A_t une famille d'opérations linéaires, A_t: $M\to X$, chacune d'elles définie sur M et fermée dans M, remplissantes les conditions suivantes: pour $0\leqslant\varepsilon\leqslant\bar\varepsilon$ on a $(I-\varepsilon A_t)(M)=X$

$$\|(I-\varepsilon A_t)x\|\geqslant(1+\alpha\varepsilon)^{-1}\|x\|\quad(0\leqslant\varepsilon\leqslant\bar\varepsilon), \tag{25}$$

$$\|A_tx-A_sx\|\leqslant\mu|t-s|\,\|A_tx\|\quad(x\in M), \tag{26}$$

où α et μ sont des constantes positives. On déduit de (26) l'existence de $\lambda_1,\lambda_2>0$ telles que

$$\lambda_1\|A_tx\|\leqslant\|A_0x\|\leqslant\lambda_2\|A_tx\|\quad(0\leqslant t\leqslant\tau,\ x\in M). \tag{27}$$

Les hypothèses énumérées ici sont suffisantes pour l'existence de $\exp(\varepsilon A_t)$, pour $\varepsilon>0$, t fixé. On a de plus, en vertu de (25)

$$\|\exp(\varepsilon A_t)x\|\leqslant e^{\alpha\varepsilon}\|x\|. \tag{28}$$

Posons pour $0\leqslant t\leqslant\tau$, $\varepsilon>0$:

$$S(t,\varepsilon)=\exp(\varepsilon A_t), \tag{29}$$

$$\varphi(t,\varepsilon)=e^{\alpha\varepsilon},\quad\psi(t)=e^{\alpha t}, \tag{30}$$

$$x\in Z_t^*=\{x\in M\,\|A_tx\|\leqslant e^{(\mu+\alpha)t};\ Z_t=\bar Z_t^*=\text{fermeture } Z_t\}. \tag{31}$$

Montrons que les hypothèses (A), (B) et (C) sont satisfaites. Vérifions (A). Or (1) découle de (30), (2) équivaut à (28). Afin de vérifier (B) il suffit de montrer que $S(t,\varepsilon)\in Z_t^*\to Z_{t+\varepsilon}$ vu que $S(t,\varepsilon)$ est linéaire, bornée. Or, soit $x\in Z_t^*$, c.-à-d. $x\in M$, $\|A_tx\|\leqslant e^{(\alpha+\mu)t}$, et soit $\varepsilon>0$. Nous avons

$$\begin{aligned}\|A_{t+\varepsilon}S(t,\varepsilon)x\|&=\|A_{t+\varepsilon}\exp(\varepsilon A_t)x\|\leqslant(1+\mu\varepsilon)\|A_t\exp(\varepsilon A_t)x\|\\&=(1+\mu\varepsilon)\|\exp(\varepsilon A_t)A_tx\|\leqslant(1+\mu\varepsilon)(1+\alpha\varepsilon)\|A_tx\|\\&\leqslant e^{(\alpha+\mu)(t+\varepsilon)},\quad\text{c.q.f.d.}\end{aligned}$$

Nous avons profité de (26) et du fait que $\exp(A)\in\mathcal{D}(A)\to\mathcal{D}(A)$. Pour démontrer (C) nous aurons besoin de quelques lemmes.

Lemme 7. *Il existe un nombre $K_1>0$ tel que, pour $\varepsilon>0$ $(x\in M)$,*

$$\|[(I-\varepsilon A_t)^{-1}-(I-\varepsilon A_s)^{-1}]x\|\leqslant K_1|t-s|\,\varepsilon\|A_tx\|. \tag{32}$$

En effet, on a pour $x\in M$

$$\begin{aligned}\|[(I-\varepsilon A_t)^{-1}-(I-\varepsilon A_s)^{-1}]x\|&=\|(I-\varepsilon A_s)^{-1}\varepsilon(A_s-A_t)(I-\varepsilon A_t)^{-1}x\|\\&\leqslant\varepsilon(1+\alpha\varepsilon)\cdot\|(A_s-A_t)(I-\varepsilon A_t)^{-1}x\|\\&\leqslant\varepsilon(1+\alpha\varepsilon)\mu|t-s|\,\|A_t(I-\varepsilon A_t)^{-1}x\|\\&=\varepsilon(1+\alpha\varepsilon)\mu|t-s|\,\|(I-\varepsilon A_t)^{-1}A_tx\|\\&\leqslant(1+\alpha\tau)^2\mu|t-s|\,\varepsilon\|A_tx\|.\end{aligned}$$

Lemme 8. *Si les opérations linéaires a, B: $\mathcal{D}(A)=\mathcal{D}(B)=M$ sont fermées et satisfont aux inégalités*

$$\|(I-\varepsilon A)^{-1}\|\leqslant(1+\alpha\varepsilon),\quad\|(I-\alpha B)^{-1}\|\leqslant(1+\alpha\varepsilon)\quad(\varepsilon>0), \tag{33}$$

$$\|[(I-\varepsilon A)^{-1}-(I-\varepsilon B)^{-1}]x\|\leqslant K\varepsilon\|Ax\|\quad(x\in M), \tag{34}$$

alors on a, pour $x\in M$,

$$\|\exp(A)x-\exp(B)x\|\leqslant Ke^{\alpha}\cdot(e^{\alpha}-1)\alpha^{-1}\cdot\|Ax\|. \tag{35}$$

Démonstration. Posons pour n naturel, fixé, $i=1,2,\ldots,n$,

$$x_0=y_0=x\quad(x\in M),$$
$$x_i=(I-n^{-1}A)^{-i}x,$$
$$y_i=(I-n^{-1}B)^{-i}x.$$

On a (voir [1], p. 269.)

$$\lim x_n=\exp(A)x,\quad\lim y_n=\exp(B)x.$$

De plus,

$$\|Ax_i\|=\|(I-n^{-1}A)^{-1}Ax\|\leqslant(1+\alpha n^{-1})^n\|Ax\|\leqslant e^{\alpha}\|Ax\|.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\|x_{i+1}-y_{i+1}\|&=\|(I-n^{-1}A)^{-1}x_i-(I-n^{-1}B)^{-1}y_i\|\\&\leqslant\|[(I-n^{-1}A)^{-1}-(I-n^{-1}B)^{-1}]x_i\|+\|(I-n^{-1}B)^{-1}(x_i-y_i)\|\\&\leqslant Kn^{-1}\|Ax_i\|+(1+\alpha n^{-1})\|x_i-y_i\|\\&\leqslant Kn^{-1}e^{\alpha}\|Ax\|+(1+\alpha n^{-1})\|x_i-y_i\|,\end{aligned}$$

d'où l'on tire par induction

$$\|x_n - y_n\| \leqslant Ka^{-1} \cdot e^a[(1+an^{-1})^n - 1]\|Ax\|.$$

En effet, en posant pour l'instant

$$\xi_i = \|x_i - y_i\|, \quad \vartheta = Kn^{-1}e^a\|Ax\|, \quad \eta = (1+an^{-1}),$$

on obtient de ce qui a été dit que $\xi_{i+1} \leqslant \eta\xi_i + \vartheta$ et $\xi_0 = \|x_0 - y_0\| = 0$, d'où l'on tire par induction que

$$\xi_n \leqslant \vartheta(1+\eta+\eta^2+\ldots+\eta^{n-1}) = \vartheta(\eta^n - 1)(\eta-1)^{-1}$$
$$= Ke^a \cdot a^{-1}[(1+an^{-1})^n - 1]\|Ax\|,$$

d'où l'on obtient (35) par un passage à limite, c.q.f.d. On voit aussitôt de (25) et (32) que les hypothèses (33) et (34) du lemme 8 restent valables, si l'on y remplace, avec t et s fixés, $0 < \delta < \tau$, A, B, a, K respectivement par δA_t, δA_s, $a\delta$, $K_1|t-s|$, où K_1 est la constante du lemme 7. Alors, l'inégalité (35) convenablement modifiée fournit

$$\|\exp(\delta A_t)x - \exp(\delta A_s)x\| \leqslant K_1|t-s|e^{a\delta}[e^{a\delta}-1](a\delta)^{-1}\|\delta A_t x\|$$
$$\leqslant K_1|t-s|e^{a\tau}(e^{a\delta}-1)\delta^{-1}a^{-1}\delta\|A_t x\|$$
$$\leqslant K_1 e^{2a\tau}|t-s|\delta\|A_t x\|,$$

d'où l'on obtient, en posant $K_2 = K_1 e^{2a\tau}$, et en remplaçant δ par ε

(36) $$\|\exp(\varepsilon A_t)x - \exp(\varepsilon A_s)x\| \leqslant K_2\varepsilon|t-s|\,\|A_t x\| \quad (x \in M).$$

Il suffit maintenant pour démontrer (C) de poser, pour la constante C figurant dans (4), $C = K_2 e^{a\tau}e^{(a+\mu)\tau}$.

Soient $\varepsilon, \delta > 0$, $x \in Z_t^*$; on a en vertu de la définition de $S(t, \varepsilon)$ et Z_t^*

$$\|S(t, \delta+\varepsilon)x - S(t+\delta, \varepsilon)S(t, \delta)x\|_{t+\delta+\varepsilon}$$
$$= \|[\exp(\delta+\varepsilon)A_t - \exp(\varepsilon A_{t+\delta})]\exp(\delta A_t)\|x$$
$$= \|[\exp(\varepsilon A_t) - \exp(\varepsilon A_{t+\delta})]\exp(\delta A_t)x\|$$
$$\leqslant K_2\varepsilon\delta\|A_t\exp(\delta A_t)x\| \leqslant K_2\varepsilon\delta e^{a\delta}\|A_t x\|$$
$$\leqslant K_2 e^{a\tau}e^{(a+\mu)\tau}\varepsilon\delta = C\varepsilon\delta, \quad \text{c.q.f.d.}$$

Les hypothèses sont ainsi vérifiées.

Il s'ensuit qu'en posant $x(t) = T(0, t)x_0$, où $x_0 \in M$, et $T(0, t)$ est définie par (14) (cette formule est valable, vu que $M = \mathrm{lin}(Z_0)$), on obtient de (17), lemme 5,

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\varepsilon}[S(t, \varepsilon)x(t) - x(t+\varepsilon)] = 0,$$

c.-à-d., dans notre cas,

(37) $$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\varepsilon}[\exp(\varepsilon A_t)x(t) - x(t+\varepsilon)] = 0.$$

Si $x(t) \in \mathscr{D}(A_t) = M$, on obtient alors

(38) $$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\varepsilon}[x(t+\varepsilon) - x(t)] = A_t x(t),$$

vu qu'on a

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\varepsilon}[\exp(\varepsilon A_t)x - x] = A_t x \quad \text{pour } x \in \mathscr{D}(A_t).$$

Remarquons que conformément à (14) la f. ab. $(T(0, t)x_0$ est dans notre cas la limite d'expressions de la forme

$$\prod_{i=0}^{n}\exp(t_{i+1} - t_i)A_{t_i}x_0$$

(comp. [2]), où $t_i < t_{i+1}$.

Pour assurer l'inclusion $T(0, t)x \in M$ si $x \in M$, admettons les hypothèses supplémentaires suivantes:

(39) $$\mathscr{D}(A_t^2) = \text{const} = M_2,$$

(40) $$\|(A_t^2 - A_s^2)x\| \leqslant \varkappa|t-s|\,\|A_t^2 x\| \quad \text{avec une constante } \varkappa > 0.$$

On tire de (40) et de (26):

(41) $$\|A_t(A_t - A_s)x\| \leqslant \lambda|t-s|\,\|A_s^2 x\|, \quad \text{où } \lambda = \mu + \varkappa.$$

Admettons les nouvelles définitions:

(42) $$X_t = M \ (0 \leqslant t \leqslant \tau), \quad \|x\|_t = \|x\| + \|A_t x\|,$$

(43) $$\varphi(t, \varepsilon) = e^{(a+\mu)\varepsilon}, \quad \psi(t) = e^{(a+\mu)t},$$
$$x \in Z_t^* \equiv x \in M_2 \quad \text{et} \quad \|A_t x\|_t \leqslant e^{(a+\lambda)t}.$$

On définit Z_t comme la fermeture de Z_t^* en norme $\|\ \|_t$.

Comme auparavant, $S(t, \varepsilon) = \exp(\varepsilon A_t)$. Vérifions que les hypothèses (A), (B) et (C) sont remplies. Remarquons d'abord que $M = \mathscr{D}(A_t)$ est complet en norme $\|\ \|_t$; cela découle du fait que A_t est supposée fermée en norme $\|\ \|$. De plus, l'ensemble M_2 est dense dans M en norme $\|\ \|_t$, car, si $x \in M_2 = \mathscr{D}(A_t^2)$, on a

$$(I - n^{-1}A_t)^{-1}x \in M_2,$$

et

$$\|(I - n^{-1}A_t)^{-1}x - x\|_t$$
$$= \|(I - n^{-1}A_t)^{-1}x - x\| + \|(I - n^{-1}A_t)^{-1}A_t x - A_t x\| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Il est évident que $A_t x \in M$ si $x \in M_2$, et que A_t, considérée sur M_2, est fermée en norme $\|\ \|_t$. De plus, on a, pour $\varepsilon > 0$,

$$(I - \varepsilon A_t)^{-1}(M_2) = M,$$

et

(44) $$\|(I - \varepsilon A_t)^{-1}x\|_t \leqslant (1 + a\varepsilon)\|x\|_t,$$

en vertu de (25). Il découle des propriétés de l'opération A_t démontrées ci-dessus qu'on a, pour $\varepsilon > 0$,

(45) $$\|\exp(\varepsilon A_t)x\|_t \leqslant e^{a\varepsilon}\|x\|_t,$$

(46) $$\|(I-\varepsilon n^{-1}A_t)^{-n}(x)-\exp(\varepsilon A_t)(x)\|_t \to 0 \qquad (n\to\infty).$$

Cela posé, vérifions (A). Or, on a, pour $x \in M_2 = X_t$, en vertu de (26),

$$\begin{aligned}\|S(t,\varepsilon)x\|_{t+\varepsilon} &= \|\exp(\varepsilon A_t)x\| + \|A_{t+\varepsilon}(\exp(\varepsilon A_t)x\| \\ &\leqslant e^{a\varepsilon}\|x\| + (1+\mu\varepsilon)\|A_t \exp(\varepsilon A_t)x\| \\ &\leqslant e^{a\varepsilon}\|x\| + (1+\mu\varepsilon)\|\exp(\varepsilon A_t)A_t x\| \\ &\leqslant e^{(a+\mu)\varepsilon}\{\|x\|+\|A_t x\|\} = \varphi(t,\varepsilon)\|x\|_t, \qquad \text{c.q.f.d.}\end{aligned}$$

Pour vérifier (B), il suffit qu'on ait $S(t,\varepsilon) \in Z_t^* \to Z_{t+\varepsilon}^*$, vu que $S(t,\varepsilon)$ est linéaire et bornée en norme $\|\ \|_t$, en vertu de (A). Soit alors $x \in Z_t^*$, c.-à-d. $x\in M_2$ et $\|A_t x\|_t \leqslant e^{(a+\lambda)t}$. On a, d'après (40) et (26),

$$\begin{aligned}\|A_{t+\varepsilon}S(t,\varepsilon)x\|_{t+\varepsilon} &= \|A_{t+\varepsilon}\exp(\varepsilon A_t)x\| + \|A_{t+\varepsilon}^2\exp(\varepsilon A_t)x\| \\ &\leqslant (1+a\varepsilon)\|A_t\exp(\varepsilon A_t)x\| + (1+\varkappa\varepsilon)\|A_t^2\exp(\varepsilon A_t)x\| \\ &\leqslant (1+a\varepsilon)\big(1+(\varkappa+\mu)\varepsilon\big)\{\|A_t x\|+\|A_t^2 x\|\} \\ &= (1+a\varepsilon)(1+\lambda\varepsilon)\|A_t x\|_t \leqslant e^{(a+\lambda)\varepsilon}\|A_t x\|_t \leqslant e^{(a+\lambda)(t+\varepsilon)}.\end{aligned}$$

Comme, de plus,

$$S(t,\varepsilon) = \exp(\varepsilon A_t) \in M_2 \to M_2,$$

l'hypothèse (B) est ainsi remplie. Pour vérifier (C), montrons

LEMME 9. *Il existe un nombre $K_4 > 0$ tel qu'on a, pour $\varepsilon > 0$, $z\in M_2$,*

(47) $$\|[(I-\varepsilon A_t)^{-1}-(I-\varepsilon A_s)^{-1}]z\|_t \leqslant K_4|t-s|\,\varepsilon\,\|A_t z\|_t.$$

Démonstration. En nous appuyant sur (40) et (41), nous avons

$$\begin{aligned}\|A_t[(I-\varepsilon A_t)^{-1}-(I-\varepsilon A_s)^{-1}]z\| &= \|A_t(I-\varepsilon A_t)^{-1}\varepsilon(A_s-A_t)(I-\varepsilon A_s)^{-1}z\| \\ &\leqslant \varepsilon\cdot(1+a\varepsilon)\cdot\|A_t(A_s-A_t)(I-\varepsilon A_s)^{-1}z\| \\ &\leqslant \varepsilon(1+a\varepsilon)\lambda|t-s|\,\|A_s^2(I-\varepsilon A_s)^{-1}z\| \\ &\leqslant (1+a\varepsilon)^2|t-s|\,\|A_s^2 z\|\cdot\varepsilon\lambda \\ &\leqslant \varepsilon\lambda(1+a\varepsilon)^2|t-s|(1+\varkappa|t-s|)\|A_t^2 z\| \\ &\leqslant \varepsilon\lambda(1+a\tau)^2(1+\varkappa\tau)|t-s|\,\|A_t^2 z\| \\ &= K_3\varepsilon|t-s|\,\|A_t^2 z\|,\end{aligned}$$

si l'on pose $K_3 = (1+a\tau)^2(1+\varkappa\tau)\lambda$. Or, on obtient facilement la conclusion (47) de l'inégalité démontrée ci-dessus, et de (32), lemme 7, en posant $K_3 = \max(K_1, K_3)$, c.q.f.d.

LEMME 10. *Il existe un nombre $K_6 > 0$ tel qu'on a, pour $z\in M_2$,*

(48) $$\|\exp(\varepsilon A_t)z-\exp(\varepsilon A_s)z\|_t \leqslant K_6\varepsilon|t-s|\,\|A_t z\|_t.$$

Démonstration. Posons pour n naturel, $i = 0, 1, \ldots, n$,

$$x_i = (I-\varepsilon n^{-1}A_t)^{-i}(z), \qquad y_i = (I-\varepsilon n^{-1}A_s)^{-i}(z).$$

Il existe alors un nombre $K_5 > 0$ tel que

(49) $$\|A_t(y_i)\|_t \leqslant K_5\|A_t z\|_t.$$

En effet, on a

$$\begin{aligned}\|A_t(y_i)\|_t &= \|A_t(I-\varepsilon n^{-1}A_s)^{-i}(z)\| + \|A_t^2(I-\varepsilon n^{-1}A_s)^{-i}(z)\| \\ &\leqslant (1+\mu|t-s|)\|A_s(I-\varepsilon n^{-1}A_s)^{-i}(z)\| + \\ &\quad + (1+\varkappa|t-s|)\|A_s^2(I-\varepsilon n^{-1}A_s)^{-1}(z)\| \\ &\leqslant (1+\lambda\tau)(1+a\varepsilon n^{-1})^n\{\|A_s z\|+\|A_s^2 z\|\} \\ &\leqslant e^{a\varepsilon}(1+\lambda\tau)^2\{\|A_t z\|+\|A_t^2 z\|\} \leqslant K_5\cdot\|A_t z\|_t,\end{aligned}$$

si l'on pose $K_5 = e^{at}(1+a\tau)^2$, $\lambda = \mu+\varkappa$.

En s'appuyant sur (44), (47) lemme 9, et (49), on montre

$$\begin{aligned}\|x_{i+1}-y_{i+1}\|_t &= \|(I-\varepsilon n^{-1}A_t)^{-1}(x_i)-(I-\varepsilon n^{-1}A_s)^{-1}(y_i)\|_t \\ &\leqslant \|[(I-\varepsilon n^{-1}A_t)^{-1}-(I-\varepsilon n^{-1}A_s)^{-1}](y_i)\|_t + \\ &\quad + \|(I-\varepsilon n^{-1}A_t)^{-1}(x_i-y_i)\|_t \\ &\leqslant K_4\varepsilon n^{-1}|t-s|\,\|A_t(y_i)\|_t + (1+a\varepsilon)\|x_i-y_i\|_t \\ &\leqslant K_4K_5\varepsilon n^{-1}|t-s|\,\|A_t z\|_t + (1+a\varepsilon)\|x_i-y_i\|_t,\end{aligned}$$

d'où l'on tire par induction:

$$\begin{aligned}\|x_n-y_n\|_t &\leqslant K_4K_5|t-s|[(1+a\varepsilon n^{-1})^n-1]a^{-1}\|A_t z\|_t \\ &\leqslant K_4K_5|t-s|[e^{a\varepsilon}-1]a^{-1}\cdot\|A_t z\|_t \leqslant K_6|t-s|\,\|A_t z\|_t\end{aligned}$$

en posant $K_6 = K_4K_5e^{a\tau}$. Il suffit alors de poser $C = K_6\cdot e^{a\tau}e^{(a+\lambda)\tau}$, pour vérifier (4), hypothèse (C). En effet, soient $x\in Z_t^*$, c.-à-d. $x\in M_2$, $\|A_t x_t\| \leqslant e^{(a+\lambda)t}$, $\delta, \varepsilon > 0$. Nous avons, en vertu de (48) et (45)

$$\begin{aligned}\|S(t,\delta+\varepsilon)x - S(t+\delta,\varepsilon)S(t,\delta)x\|_t & \\ &= \|\exp((\delta+\varepsilon)A_t x-\exp(\varepsilon A_{t+\delta})\exp(\delta A_t)x\|_t \\ &= \|[\exp(\varepsilon A_t)-\exp(\varepsilon A_{t+\delta})]\exp(\delta A_t)x\|_t \\ &\leqslant K_6\varepsilon\delta\|A_t\exp(\delta A_t)x\|_t \\ &= K_6\varepsilon\delta\|\exp(\delta A_t)A_t x\|_t \leqslant K_6\varepsilon\delta e^{a\delta}\|A_t x\|_t \\ &\leqslant K_6\varepsilon\delta e^{(a+\lambda)t}\cdot e^{a\delta} \leqslant K_6 e^{(a+\lambda)\tau}\cdot e^{a\tau}\cdot\varepsilon\delta = C\delta\varepsilon, \qquad \text{c.q.f.d.}\end{aligned}$$

Ainsi les hypothèses (A), (B) et (C) sont vérifiées. Il s'ensuit, en vertu de (15), que si $x_0 \in \operatorname{lin}(Z_0^*) = M_2$, alors

$$T(0,t)x_0 \in \operatorname{lin}(Z_t) = \bigcup_{n=1}^{\infty} n\overline{Z_t^*} \subset \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} nZ_t^*} = M,$$

la fermeture étant prise en norme $\| \|_t$. On a alors $T(0,t) \in M_2 \to M$; mais, comme l'opération $T(0,t)$ satisfait d'après (16) à

$$\|T(0,t)x\|_t \leqslant \psi(T)\|x\|_0 \quad \text{pour } x \in X_0 = M,$$

on a $T(0,t)x \in M$; si $x \in M$, l'ensemble M_2 étant dense dans M en norme $\| \|_t$. Nous avons ainsi démontré le

THÉORÈME 6. *Soient X un espace de Banach, M un sous-ensemble linéaire, dense dans X; A_t une famille d'opérations linéaires, fermées, définies sur M, $\mathscr{D}(A_t) = M$ $(0 \leqslant t \leqslant \tau)$, satisfaisant aux conditions suivantes:*

1° *pour* $\varepsilon > 0$ *l'inverse* $(I - \varepsilon A_t)^{-1}$ *est partout définie et on a* $\|(I-\varepsilon A_t)^{-1}x\| \leqslant (1+a\varepsilon)\|x\|$;

2° $\|A_t(x) - A_s(x)\| \leqslant \mu|t-s|\,\|A_t(x)\|$ *avec* $\mu = \text{const.}$

Alors il existe une famille d'opérations linéaires $T(0,t)$ partout définies et bornées dans leur ensemble, telles qu'on a, pour $x_0 \in M$

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon}[\exp(\varepsilon A_t)T(0,t)x_0 - T(0,t+\varepsilon)x_0] = 0.$$

Si, de plus, les opérations A_t^2 ont un domaine commun M_2, et si

3° $\|A_t^2(x) - A_s^2(x)\| \leqslant \varkappa|t-s|\,\|A_t^2(x)\|$ *pour* $x \in M_2$, *alors* $T(0,t)x_0 \in M$, *chaque fois que $x_0 \in M$, de sorte que l'on a pour $x_0 \in M$*

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon}[T(0,t+\varepsilon)x_0 - T(0,t)x_0] = A_t T(0,t)x_0.$$

Il s'en suit que $x(t) = T(0,t)x_0$ est la solution du probléme de Cauchy,

$$\frac{d}{dt}x(t) = A_t x(t), \qquad x_0 \in M = D(A_0),$$

unique, grâce au théorème 1, dans la classe de fonctions uniformément différentiables, c.-à-d. remplissant la condition suivante:

Pour tout $\delta > 0$ il existe un $\bar{\varepsilon} > 0$ tel que $0 < \varepsilon \leqslant \bar{\varepsilon}$ entraîne

$$\|\varepsilon^{-1}[\exp(\varepsilon A_t)x(t) - x(t+\varepsilon)\|_t \leqslant \delta$$

conformément à la définition de la p. 8, et vu que

$$\frac{D}{Dt}x(t) = \frac{d}{dt}x(t) - A_t x(t) = 0.$$

La notion de "produit-intégrale" a été considérée par d'autres auteurs, comme Birkhoff [1] et Kato qui a démontré dans [2] la convergence du produit

$$\prod_{j=n-1}^{0} \exp(t_{j+1} - t_j)A_{t_j}x_0 \qquad (\max|t_{j+1} - t_j| \to 0)$$

pour tout $x_0 \in X$, mais sous des hypothèses plus fortes que 1° et 2° du théorème 6 de ce travail.

Travaux cités

[1] G. D. Birkhoff, J. Math. Phys. 16.

[2] T. Kato, *Integration of the equation of evolution in Banach spaces* J. Math. Soc. Japan 5 (1953), p. 208–234.

[3] K. Yoshida, *Functional analysis*, Berlin 1966.

Reçu par la Rédaction le 16. 12. 1968