[25] R. Schatten, *A theory of cross spaces*, Princeton University Press, 1950.
[26] I. Singer, *Sur un problème d'isomorphie de S. Banach*, Rend. dei Lincei 30 (1961), p. 343–346.
[27] — *Bases and quasi-reflexivity of Banach spaces*, Math. Ann. 153 (1964), p. 199–209.
[28] — *Basic sequences and reflexivity of Banach spaces*, Studia Math. 21 (1962), p. 351–369.
[29] M. Zippin, *A remark on bases and reflexivity in Banach spaces*, Israel J. Math. 6 (1968), p. 74–79.

THE LOUISIANA STATE UNIVERSITY

Reçu par la Rédaction le 20. 12. 1968

STUDIA MATHEMATICA, T. XXXIV. (1970)

Симметризуемые операторы, не удовлетворяющие условиям положительной определенности и их приложения

Д. Ф. ХАРАЗОВ (Ленинград)

1. Введение. В работе получают дальнейшее развитие результаты, установленные в статьях [1], [2]. Пусть X—гильбертово пространство над полем комплексных (или вещественных) чисел, $R \subseteq X$ — линейное множество, плотное в X, A и H линейные (вообще говоря, неограниченные) операторы, определенные на R, H симметричен в R и симметризует A.

В работах [1], [2] изучались симметризуемые операторы A с дискретным спектром, для которых выполнялось одно из следующих двух условий: $(Hx, x) \geqslant 0$ или $(HAx, x) \geqslant 0$ для любого $x \in R$.

В этой работе симметризуемые операторы A исследуются в предположении, что ни одно из указанных условий положительной определенности не выполняется. Полученные результаты прилагаются к изучению задач о собственных значениях обыкновенных дифференциальных операторов широкого класса, содержащих, как частные случаи, классы, изучавшиеся ранее Э. Камке [3] и Л. Коллатцем [4].

2. Симетризуемые операторы, не удовлетворяющие условиям определенности. Пусть X — гильбертово пространство над полем комплексных чисел, R — линейное множество, плотное в X, $R \subseteq X$. Рассмотрим аддитивные и однородные (вообще говоря, неограниченные) операторы A и H, определенные на R $(A(R) \subseteq R;\ H(R) \subseteq X)$, удовлетворяющие следующим условиям:

1) уравнение $Hx = 0$ имеет только нулевое решение $x = 0$;

2) H — симметрический оператор на R, симметризующий оператор A:

$$(Hx, y) = (x, Hy), \quad (HAx, y) = (x, HAy), \quad x, y \in R; \tag{1}$$

3) спектр оператора A может содержать только собственные значения конечной кратности уравнения

$$x - \lambda Ax = 0, \quad x \in R, \tag{2}$$

множество которых не имеет предельных точек в конечной части плоскости λ;

4) форма (Hx, x) принимает на R как положительные, так и отрицательные значения, оператор A не является конечномерным и $A^2 \neq 0$;

5) на множестве элементов

$$x \in E_H^0 = E\{x \in R;\ (Hx, x) = 0\}, \quad x \neq 0,$$

функционал $(HAx, x) > 0$ (или $(HAx, x) < 0$).

Рассмотрим множество

$$E_{HA}^0 = E\{x \in R;\ (HAx, x) = 0\}.$$

Если условие 5) выполнено, то, как легко видеть, имеет место равенство

$$E_H^0 \cap E_{HA}^0 = \{0\}, \tag{3}$$

где $\{0\}$ — множество, содержащее только 0 — нульэлемент X. Обратное утверждение для вполне непрерывного оператора A и ограниченного H доказал Р. Кюне [5], но его доказательство справедливо и в общем случае неограниченных A и H.

Не ограничивая общности, будем считать в дальнейшем, что

$$(HAx, x) > 0, \quad x \in E_H^0, \quad x \neq 0. \tag{4}$$

Операторы A, удовлетворяющие условиям 1), 2), 3), 4) и 5) будем называть операторами *класса* (SA).

Пусть

$$E_H^+ = E\{x \in R;\ (Hx, x) > 0\}, \quad \mu = \inf_{x \in E_H^+} \frac{(HAx, x)}{(Hx, x)}.$$

Лемма 1. *Если оператор* $A \in (SA)$, *то* $\mu > -\infty$.

Это утверждение для вполне непрерывного A и ограниченного H доказано в [5], но оно остается в силе и в рассматриваемом случае. Пусть

$$E_H^- = E\{x \in R;\ (Hx, x) < 0\}.$$

Тогда, для любых $x \in E_H^+$, $y \in E_H^-$,

$$\frac{(HAy, y)}{(Hy, y)} < \frac{(HAx, x)}{(Hx, x)}. \tag{5}$$

В противном случае найдутся такие x_0 и y_0, для которых

$$(Hx_0, x_0) = 1, \quad (Hy_0, y_0) = -1, \quad (HAx_0, x_0) \leqslant -(HAy_0, y_0).$$

Нетрудно убедиться в том, что можно подобрать два таких вещественных числа α и β, для которых

$$\operatorname{Re}\{e^{i(\alpha-\beta)}(Hx_0, y_0)\} = 0, \quad \operatorname{Re}\{e^{i(\alpha-\beta)}(HAx_0, y_0)\} \leqslant 0. \tag{6}$$

Тогда, в силу (6), для элемента $z = e^{i\alpha}x_0 + e^{i\beta}y_0$ будем иметь

$$(Hz, z) = 0, \quad (HAz, z) \leqslant 0. \tag{7}$$

Но, $z \neq 0$, ибо в противном случае $(Hy_0, y_0) = (Hx_0, x_0)$, что невозможно. Тогда (7) противоречит нашему условию (4). Теперь, справедливость леммы 1 сразу следует из (5) и условия 4).

Рассмотрим теперь оператор $H_\mu = H(A - \mu I)$, где I оператор тождественного преобразования на X.

Лемма 2. *Оператор* H_μ *положителен на* R, *симметризует оператор* A *на* R *и* $H_\mu A \neq 0$, *если* $A \in (SA)$.

Пусть $x \in E_H^+$; тогда в силу определения числа μ, $(HAx, x) \geqslant \mu(Hx, x)$ и $(H_\mu x, x) \geqslant 0$. Если $x \in E_H^0$, то в силу (4), $(H_\mu x, x) > 0$. Если же $x \in E_H^-$, то в силу (5) и определения числа μ,

$$\frac{(HAx, x)}{(Hx, x)} \leqslant \mu$$

и, так как $(Hx, x) < 0$, видим, что $(HAx, x) \geqslant \mu(Hx, x)$. Следовательно, для любого $x \in R$, $(H_\mu x, x) \geqslant 0$. Покажем теперь, что H_μ симметризует A на R. Действительно, для любых $x, y \in R$

$$(H_\mu Ax, y) = \big(H(A - \mu I)Ax, y\big) = (HAx, Ay) - \mu(x, HAy) =$$
$$= \big(x, H(A - \mu I)Ay\big) = (x, H_\mu Ay).$$

Допустим, теперь, что $H_\mu A = 0$. Тогда $H(A - \mu I)Ax = 0$ для любого $x \in R$. Отсюда

$$(A - \mu I)Ax = 0, \quad x \in R.$$

Если $\mu = 0$, то $A^2 x = 0$, $x \in R$, что невозможно в силу условия 4). Если же $\mu \neq 0$, то

$$Ax - \frac{1}{\mu}A(Ax) = 0, \quad x \in R,$$

и оператор A имеет собственное значение $1/\mu$, которому в качестве собственного подпространства соответствует бесконечномерный образ оператора A, что противоречит условию 3) о спектре оператора A. Следовательно, $H_\mu A \neq 0$.

Лемма 3. *Для любого собственного элемента* x *оператора* $A \in (SA)$, $(Hx, x) \neq 0$ *и* $(HAx, x) \neq 0$.

Справедливость этой леммы следует из условия 4), ибо в силу равенства $(Hx, x) = \lambda(HAx, x)$, из предположения $(Hx, x) = 0$, следует $(HAx, x) = 0$, что противоречит неравенству (4).

Лемма 4. *Для любого собственного элемента x оператора $A \in (SA)$, соответствующего собственному значению $\lambda \neq 1/\mu$,*

$$(H_\mu x, x) \neq 0.$$

Действительно, так как $(Hx, x) = \lambda(HAx, x)$, то из предположения, что $(H_\mu x, x) = 0$ или $(HAx, x) - \mu(Hx, x) = 0$, следует равенство $\lambda = 1/\mu$, противоречащее условию леммы 4.

Теорема 1.2. *Все собственные значения оператора $A \in (SA)$ вещественны, а собственные элементы x_i и x_k, соответствующие разным собственным значениям λ_i и λ_k удовлетворяют условию $(Hx_i, x_k) = 0$.*

Если λ_0 собственное значение, а x_0 собственный элемент оператора A, то в силу леммы 3, $(Hx_0, x_0) \neq 0$, $(HAx_0, x_0) \neq 0$ и число $\lambda_0 = (Hx_0, x_0)/(HAx_0, x_0)$ вещественное. В силу (1)

$$(Hx_k, x_i) = (x_k, Hx_i), \qquad (HAx_k, x_i) = (x_k, HAx_i),$$

откуда обычным путем найдем, что $(\lambda_k - \lambda_i)(Hx_k, x_i) = 0$ и, так как $\lambda_k \neq \lambda_i$, то $(Hx_k, x_i) = 0$.

Следовательно, если $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ последовательность всех собственных значений уравнения (2), каждое из которых повторяется столько раз, какова его кратность, то, обобщая метод ортогонализации, соответствующие собственные элементы мы можем нормировать условиями

$$(Hx_k, x_i) = \pm\delta_{ik} \quad (i, k = 1, 2, \ldots).$$

Теорема 2.2. *Если оператор $A \in (SA)$, то он имеет, по крайней мере, одно собственное значение.*

Действительно, в силу условия 3) оператор A может иметь лишь дискретный спектр, в силу леммы 2 он симметризуем положительным оператором H_μ и $H_\mu A \neq 0$, следовательно A удовлетворяет всем условиям, при которых справедливо доказательство теоремы 8 в работе [2] (см. также утверждение 1) теоремы, доказанной в [1] о существовании собственного значения), откуда и следует справедливость теоремы 2.2.

Лемма 5. *Если $A \in (SA)$ и множество*

$$E_0^+ = E\{x \in R; (H_\mu Ax, x) > 0\} \qquad (E_0^- = E\{x \in R; (H_\mu Ax, x) < 0\})$$

не пусто, то для любого элемента $x \in E_0^+$ $(x \in E_0^-)$ справедливо неравенство

$$\lambda_1^+ \leqslant \frac{(H_\mu x, x)}{(H_\mu Ax, x)} \qquad \left(\lambda_1^- \geqslant \frac{(H_\mu x, x)}{(H_\mu Ax, x)}\right),$$

где λ_1^+ наименьшее положительное собственное значение оператора A (λ_1^- наибольшее отрицательное собственное значение).

Действительно, при наших условиях справедлива лемма 5 работы [2], откуда следует, что если множество E_0^+ не пусто и $x_0 \in E_0^+$ то $(H_\mu x_0, x_0) > 0$, а из доказательства теоремы 8 [2] следует, что в интервале $(0, (H_\mu x_0, x_0)/(H_\mu Ax_0, x_0)]$ лежит хотя бы одно положительное собственное значение оператора A (аналогичное утверждение справедливо для отрицательного собственного значения). Отсюда сразу следует справедливость леммы 5.

Допустим теперь, что оператор $A \in (SA)$ имеет $n-1$ положительных собственных значений $\lambda_1^+ \leqslant \lambda_2^+ \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{n-1}^+$, которым соответствуют собственные элементы $x_1^+, x_2^+, \ldots, x_{n-1}^+$, обладающие следующими свойствами: если $R_0^+ = R$,

$$R_{m-1}^+ = E\{x \in R, (Hx_k^+, x) = 0, k = 1, \ldots, m-1\} \qquad (m = 2, \ldots, n-1),$$

то для любого $x \in E_{m-1}^+ = E\{x \in R_{m-1}^+; (H_\mu Ax, x) > 0\}$,

$$\lambda_m^+ \leqslant (H_\mu x, x)/(H_\mu Ax, x) \qquad (m = 1, \ldots, n-1).$$

Рассмотрим множество

$$R_{n-1}^+ = E\{x \in R; (Hx_k^+, x) = 0, \ k = 1, \ldots, n-1\}.$$

Легко видеть, что линейное множество $R_{n-1}^+ \subset R$ инвариантно относительно оператора A, ибо если $x \in R_{n-1}^+$, то

$$(Hx_k^+, Ax) = (HAx_k^+, x) = \frac{1}{\lambda_k^+}(Hx_k^+, x) = 0,$$

$$k = 1, \ldots, n-1 \text{ и } Ax \in R_{n-1}^+.$$

Применяя теорему 2.2 и лемму 5 к множеству R_{n-1}^+ видим, что если множество

$$E_{n-1}^+ = E\{x \in R_{n-1}^+; (H_\mu Ax, x) > 0\}$$

не пусто, то существует положительное собственное значение λ_n^+ оператора A, которому соответствует собственный элемент $x_n^+ \in R_{n-1}^+$ и для любого $x \in R_{n-1}^+$,

$$\lambda_n^+ \leqslant (H_\mu x, x)/(H_\mu Ax, x).$$

Так как $R_{n-1}^+ \subset R_{n-2}^+$ и λ_{n-1}^+ — наименьшее положительное собственное значение, которому соответствует собственный элемент $x_{n-1}^+ \in R_{n-2}^+$, то $\lambda_{n-1}^+ \leqslant \lambda_n^+$. Аналогичное утверждение справедливо и для отрицательных собственных значений.

Пусть теперь $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ последовательность всех собственных значений оператора A, расположенных по возрастанию их абсолютных величин

$$|\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant \ldots \leqslant |\lambda_n| \leqslant \ldots, \tag{8}$$

а $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ — соответствующие им собственные элементы, удовлетворяющие условиям

$$(9)\qquad (Hx_i, x_k) = \pm\delta_{ik} \quad (i, k = 1, 2, \ldots).$$

Из выше приведенных рассуждений сразу следует

Лемма 6. *Если оператор $A\in(SA)$, то последовательность его собственных значений* (8) *и соответствующие им собственные элементы, нормированные условиями* (9), *удовлетворяют следующим неравенствам: для любого $x\in R_{n-1} = E\{x\in R;\, (Hx_k, x) = 0,\ k = 1, \ldots, n-1\}$,*

$$(10)\qquad |(H_\mu Ax, x)| \leqslant (H_\mu x, x)/|\lambda_n| \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Теорема 3.2. *Если оператор $A\in(SA)$, то любое его собственное значение $\lambda_n \neq 1/\mu$ обладает следующим экстремальным свойством:*

$$\max_{x\in R_{n-1}} |(H_\mu Ax, x)|/(H_\mu x, x) = 1/|\lambda_n|,$$

причем этот максимум достигается на элементе $x = x_n$.

Действительно, в силу леммы 4, $(H_\mu x_n, x_n)\neq 0$, в силу (10),

$$|(H_\mu Ax_n, x_n)|(H_\mu x_n, x_n) \leqslant 1/|\lambda_n|.$$

Теперь справедливость теоремы 3.2 следует из равенства

$$(H_\mu x_n, x_n) = \lambda_n(H_\mu Ax_n, x_n).$$

Рассмотрим произвольный элемент $f\in R$ и положим

$$f_i = (Hx_i, f), \qquad \mu_i = (Hx_i, x_i) = \pm 1 \quad (i = 1, \ldots, n-1),$$
$$u_n = f - \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i \bar f_i x_i.$$

Тогда

$$(Hx_k, u_n) = (Hx_k, f) - \sum_{i=1}^{n-1} f_i\mu_i(Hx_k, x_i) = 0 \quad (k = 1, \ldots, n-1);$$

следовательно, $u_n\in R_{n-1}$ и, в силу (10),

$$(11)\qquad |(H_\mu Au_n, u_n)| \leqslant (H_\mu u_n, u_n)/|\lambda_n|.$$

Но

$$(H_\mu u_n, u_n) = (H_\mu f, f) - \sum_{k=1}^{n-1}\mu_k\left(\frac{1}{\lambda_k}-\mu\right)|f_k|^2, \qquad \mu_k\left(\frac{1}{\lambda_k}-\mu\right) = (H_\mu x_k, x_k)\geqslant 0.$$

Отсюда, в силу (11),

$$(12)\qquad |(H_\mu Au_n, u_n)| \leqslant (H_\mu f, f)/|\lambda_n|.$$

С другой стороны,

$$(H_\mu Au_n, u_n) = (H_\mu Af, f) - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{\mu_k}{\lambda_k}\left(\frac{1}{\lambda_k}-\mu\right)|f_k|^2$$

и, на основании (12), для любого $f\in R$,

$$(H_\mu Af, f) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu_k}{\lambda_k}\left(\frac{1}{\lambda_k}-\mu\right)(f, Hx_k)(Hx_k, f).$$

Из последнего равенства обычным приемом устанавливается

Теорема 4.2. *Если оператор $A\in(SA)$, то для любых $f, g\in R$ справедливо равенство*

$$(13)\qquad (H_\mu Af, g) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu_k}{\lambda_k}\left(\frac{1}{\lambda_k}-\mu\right)(f, Hx_k)(Hx_k, g).$$

Из равенства (13) непосредственно следует

Теорема 5.2. *Если оператор $A\in(SA)$, то для любого $f\in R$*

$$(14)\qquad H_\mu Af = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu_k}{\lambda_k}\left(\frac{1}{\lambda_k}-\mu\right)(f, Hx_k)Hx_k,$$

в смысле слабой сходимости в R.

Рассмотрим теперь неоднородное уравнение

$$(15)\qquad x - \lambda Ax = y, \qquad x, y\in R.$$

Теорема 6.2. *Если оператор $A\in(SA)$ и число λ не является его собственным значением, то для единственного решения x уравнения* (15) *справедливо разложение*

$$(16)\qquad H_\mu x = \lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu_k(1/\lambda_k-\mu)(y, Hx_k)}{\lambda_k-\lambda}Hx_k + H_\mu y,$$

в смысле слабой сходимости в R.

Для получения формулы (16) достаточно в равенстве

$$H_\mu x - \lambda H_\mu Ax = H_\mu y$$

заменить $H_\mu Ax$ его значением из (14) и учесть легко устанавливаемое равенство

$$\frac{(x, Hx_k)}{\lambda_k} = \frac{(y, Hx_k)}{\lambda_k-\lambda}.$$

3. Граничные задачи для дифференциальных уравнений. Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$M(u) = \lambda N(u) + f(x), \tag{17}$$

где:

$$M(u) = \sum_{k=0}^{n} \left(f_k(x)\,u^{(k)}(x)\right)^{(k)}, \quad N(u) = \sum_{k=0}^{m} \left(g_k(x)\,u^{(k)}(x)\right)^{(k)}, \quad m \leqslant n-1,$$

$f(x)$ функция непрерывная в сегменте $[a, b]$, функции $f_k(x)$ и $g_k(x)$ k раз непрерывно дифференцируемы в $[a, b]$, $f_n(x) \not\equiv 0$, $g_m(x) \not\equiv 0$, а λ комплексный параметр.

Рассмотрим следующую задачу (M): найти решение уравнения (17) в $[a, b]$, удовлетворяющее граничным условиям вида

$$\sum_{k=0}^{2n-1} [\alpha_{ik} u^{(k)}(a) + \beta_{ik} u^{(k)}(b)] = 0 \quad (i = 1, \ldots, 2n), \tag{18}$$

где α_{ik} и β_{ik} любые вещественные числа, матрица которых имеет ранг $2n$.

Обозначим через $C^{(2n)}$ класс комплекснозначных функций $u(x)$, $2n$ раз непрерывно дифференцируемых в $[a, b]$ и удовлетворяющих условиям (18).

Мы будем говорит, что задача (M) *принадлежит классу* $(SM^{-1}N)$, если выполняются следующие условия:

1) $\lambda = 0$ не есть собственное значение однородной задачи (M_0) $(f(x) \equiv 0)$, соответствующей задаче (M);

2) для любых функций $u(x), v(x) \in C^{(2n)}$

$$\int_a^b [uM(v) - vM(u)]\,dx = 0, \quad \int_a^b [uN(v) - vN(u)]\,dx = 0;$$

3) $\int_a^b \bar{u}M(u)\,dx$ на множестве функций $u \in C^{(2n)}$ принимает значения любого знака;

4) на множестве функций

$$u \in E_M^0 = E\left\{u \in C^{(2n)};\ \int_a^b \bar{u}M(u)\,dx = 0\right\}, \quad u \not\equiv 0,$$

интеграл $\int_a^b \bar{u}N(u)\,dx > 0$ (или $\int_a^b \bar{u}N(u)\,dx < 0$).

В силу указанных условий дифференциальные выражения $M(u)$ и $N(u)$ порождают на множестве $C^{(2n)}$ симметричные линейные операторы M и N. Из условия 1) следует существование функции Грина $G(x, y)$ для дифференциального уравнения $M(u) = 0$ при граничных условиях (18) и эквивалентность задачи (M) на множестве функций $u(x) \in C^{(2n)}$ интегро-дифференциальному уравнению

$$u = \lambda M^{-1}Nu + M^{-1}f, \tag{19}$$

где

$$M^{-1}Nu = \int_a^b G(x, y)\,N[u(y)]\,dy, \quad M^{-1}f = \int_a^b G(x, y)f(y)\,dy.$$

В силу условия 2) оператор $M^{-1}N$ симметризуем на $C^{(2n)}$ оператором M. Обозначим через C класс функций непрерывных в $[a, b]$.

Лемма 7. *Если $u(x) \in C^{(2n)}$ — решение уравнения $u = \lambda M^{-1}Nu$, то $N(u) \in C$ — решение уравнения $\varphi = \lambda NM^{-1}\varphi$.*

Действительно, если $u = \lambda M^{-1}Nu$, то $Nu = \lambda NM^{-1}Nu$.

Лемма 8. *Если $\varphi(x) \in C$ — решение уравнения $\varphi = \lambda NM^{-1}\varphi$, то $u = M^{-1}\varphi \in C^{(2n)}$ — решение уравнения $u = \lambda M^{-1}Nu$.*

Действительно, пусть $\varphi = \lambda NM^{-1}\varphi$; тогда $M^{-1}\varphi = \lambda M^{-1}NM^{-1}\varphi$.

Доказанные леммы показывают, что спектр оператора $M^{-1}N$ (спектр однородной задачи (M_0)) совпадает со спектром интегрального оператора NM^{-1}, ядром которого является функция $N_x[G(x, y)]$ непрерывная в квадрате $[a \leqslant x \leqslant b;\ a \leqslant y \leqslant b]$, так как $m \leqslant n-1$. Следовательно, спектр оператора $M^{-1}N$ удовлетворяет условию 3) из § 2.

Теперь легко видеть, что если задача $(M) \in (SM^{-1}N)$, то операторы $A = M^{-1}N$ и $H = M$ удовлетворяют всем условиям, определяющим принадлежность оператора $A = M^{-1}N$ на множестве функций $R = C^{(2n)}$, плотном в гильбертовом пространстве L^2 функций $u(x)$ с суммируемым квадратом в $[a, b]$, классу (SA) (см. § 2). Поэтому, для уравнения (19), рассматриваемого на $R = C^{(2n)}$, справедливы все результаты § 2.

Положим

$$E_M^+ = E\left\{u \in C^{(2n)};\ \int_a^b \bar{u}M(u)\,dx > 0\right\}, \quad \mu = \inf_{u \in E_M^+} \frac{\int_a^b \bar{u}N(u)\,dx}{\int_a^b \bar{u}M(u)\,dx}.$$

Теорема 1.3. *Если задача $(M) \in (SM^{-1}N)$, то существует счетное множество собственных значений однородной задачи (M_0) $(f(x) \equiv 0)$, все они вещественны, и множество их не имеет предельной точки в конечной части вещественной оси, а собственные функции $u_i(x)$ и $u_k(x)$,* *соответствующие разным собственным значениям* $\lambda_i \neq \lambda_k$, *удовлетворяют условию обобщенной ортогональности*

$$\int_a^b u_k(x)\, M[u_i(x)]\,dx = 0.$$

Действительно, все утверждения теоремы 1.3, кроме бесконечности множества собственных значений, следуют непосредственно из теорем 1.2 и 2.2 из § 2.

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ последовательность собственных значений задачи (M_0), расположенных в порядке возрастания их абсолютных величин $|\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant \ldots \leqslant |\lambda_n| \leqslant \ldots$, а $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x), \ldots$, соответствующие им собственные функции задачи (M_0), удовлетворяющие условиям обобщенной ортонормированности

$$\int_a^b u_k(x)\, M[u_i(x)]\,dx = \pm\delta_{ik} \quad (i, k = 1, 2, \ldots),$$

причем каждое λ_i повторяется столько раз, сколько линейно-независимых собственных функций ему соответствует. Нам остается показать, что эта последовательность бесконечна. Допустим противное. В рассматриваемом нами случае

$$H_\mu = H(A-\mu I) = M(M^{-1}N-\mu I) = N-\mu M \text{ и } H_\mu A = (N-\mu M)M^{-1}N,$$

а потому из теоремы 5.2, в предположении существования конечного числа p собственных значений задачи (M_0) следует, что для любой функции $v(x) \in C^{(2n)}$ имеет место равенство

$$(N-\mu M)M^{-1}Nv = \sum_{k=1}^{p} \frac{\mu_k}{\lambda_k}\left(\frac{1}{\lambda_k}-\mu\right) v_k M[u_k(x)], \tag{20}$$

где

$$\mu_k = \int_a^b u_k(x) M[u_k(x)]\,dx = \pm 1, \qquad v_k = \int_a^b \overline{v(x)}\, M[u_k(x)]\,dx.$$

Рассмотрим множество функций

$$u(x) \in R_p = E\left\{u \in C^{(2n)};\ \int_a^b \overline{u(x)}\, M[u_i(x)]\,dx = 0,\ i = 1, \ldots, p\right\}.$$

Если равенство (20) имеет место, то для любой $u(x) \in R_p$,

$$(N-\mu M)\, M^{-1}Nu = 0.$$

Из этого равенства нетрудно заключить, что множество R_p вложено в некоторое конечномерное пространство, что неверно. Полученное противоречие доказывает, что множество собственных значений задачи (M_0) счетное.

Теорема 2.3. *Если задача* $(\mathrm{M}) \in (SM^{-1}N)$, *то для любого собственного значения* $\lambda_k \neq 1/\mu$

$$\max_{u \in R_{k-1}} \frac{\left|\int_a^b \left(\int_a^b N_x[G(x,y)]\,N[u(y)]\,dy - \mu N[u(x)]\right)\overline{u(x)}\,dx\right|}{\int_a^b \left(N[u(x)] - \mu M[u(x)]\right)\overline{u(x)}\,dx} = \frac{1}{|\lambda_k|}$$

и этот максимум достигается на собственном элементе $u_k(x)$.

Эта теорема следует из теоремы 3.2, так как в нашем случае уравнения (19)

$$(H_\mu A u, u) = (NM^{-1}Nu - \mu Nu, u), \qquad (H_\mu u, u) = (Nu - \mu Mu, u).$$

Из теоремы 6.2 следует

Теорема 3.3. *Если задача* $(\mathrm{M}) \in (SM^{-1}N)$ *и число* λ *не является собственным значением однородной задачи* (M_0), *то для единственного решения* $u(x)$ *задачи* (M) *справедливо следующее разложение по собственным функциям задачи* (M_0):

$$N[u(x)] - \mu M[u(x)] =$$

$$= \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k(1/\lambda_k - \mu) f_k}{\lambda_k - \lambda} M[u_k(x)] + \int_a^b N_x[G(x,y)]f(y)\,dy - \mu f(x),$$

$$\mu_k = \int_a^b u_k(x)\, M[u_k(x)]\,dx = \pm 1, \qquad f_k = \int_a^b f(x)\, M[u_k(x)]\,dx,$$

сходящееся в смысле слабой сходимости в L^2 *на множестве функций* $C^{(2n)}$.

Действительно, в рассматриваемом нами случае (см. уравнение (19))

$$H_\mu u = Nu - \mu Mu, \quad Hx_k = M[u_k(x)],$$

$$y = M^{-1}f \quad \text{и} \quad H_\mu y = NM^{-1}f - \mu f.$$

Результаты, полученные в этом параграфе для обыкновенных дифференциальных уравнений можно распространить на различные классы дифференциальных уравнений с частными производными эллиптического типа. Для этого можно воспользоваться общей схемой, указанной в работе [2], и уточнить постановку задачи и налагаемые условия в соответствии с рассмотрением уравнения того или иного вида и соответствующих граничных условий.

Цитированная литература

[1] Д. Ф. Харазов, *О некоторых свойствах линейных операторов, обеспечивающих справедливость теории Гильберта-Шмидта*, УМН 12, в. 4 (76) (1957), стр. 201-207.

[2] — *Симметризуемые операторы в банаховых пространствах и их приложения*, Studia Math. 27 (1966), стр. 169-188.

[3] E. Kamke, *Über die definiten selbstadjungierten Eigenwertaufgaben bei gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen. II, III*, Math. Zeit. 46 (1940), стр. 231-286.

[4] L. Collatz, *Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen*, Leipzig 1963.

[5] R. Kühne, *Über eine Klasse I-selbstadjungierter Operatoren*, Math. Ann. 154 (1964), стр. 56-59.

Reçu par la Rédaction le 23. 12. 1968

STUDIA MATHEMATICA, T. XXXIV. (1970)

On non-triangular sets in tensor algebras

by

S. W. DRURY (Orsay, France)

For an arbitrary regular symmetric Banach algebra $R(K)$ of continuous functions on a compact Hausdorff space K and an arbitrary closed subset E of K we denote

$$I(E) = \{f; f \in R(K),\ f \text{ vanishes on } E\},$$
$$I_0(E) = \{f; f \in R(K),\ f \text{ vanishes on a neighbourhood of } E\}.$$

It is easy to see that $I(E)$ is a closed ideal of $R(K)$ and that $I_0(E)$ is an ideal in $R(K)$. The subset E is said to be *of synthesis* if $\overline{I_0(E)} = I(E)$ (closure in $R(K)$) and E is said to be a *strong Dytkin set* if there exists a sequence $\{\tau_n\}_{n=1}^{\infty}$ such that $\tau_n \in I_0(E)$ ($n = 1, 2, \ldots$) and for every $f \in I(E)$ we have $\tau_n f \to f$ as $n \to \infty$ for the norm of $R(K)$. Every strong Dytkin set is clearly a set of synthesis. Together the following conditions imply that E is a strong Dytkin set:

1) E is of synthesis;

2) there exist open sets Ω_n containing E such that

$$\Omega_{n+1} \subseteq \Omega_n \quad \text{for} \quad n = 1, 2, \ldots \quad \text{and} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\Omega}_n = E;$$

3) there exists a sequence $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ with $1 - u_n \in I_0(E)$, $n = 1, 2, \ldots$, satisfying the two conditions

$$(+) \qquad \begin{aligned} u_n(x) &= 0 \quad \text{for all } x \notin \Omega_n, \\ \|u_n\|_{R(K)} &\leqslant 1 + \varepsilon_n, \end{aligned}$$

where $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ is a sequence decreasing to zero. We observe that these conditions tend to bear on the case K metrizable.

To see this we take $\tau_n = 1 - u_n$. Let $f \in I(E)$ and $\varepsilon > 0$ be arbitrary. By 1) there exists $g \in I_0(E)$ such that

$$\|f - g\|_R \leqslant \varepsilon.$$

By 2) there exists N such that g vanishes on Ω_n for $n \geqslant N$. We have

$$\tau_n f - f = \tau_n(f - g) - u_n g - (f - g)$$