STUDIA MATHEMATICA, T. XXXV. (1970)

Groupes de fonctions continues sur un compact

Applications a l'etude des ensembles de Kronecker

par

A. BERNARD (Grenoble) et N. TH. VAROPOULOS (Orsay)

Dans cet article nous répondons à des questions posées verbalement par Monsieur S. Hartman pendant les Journées Mathématiques de Sopot (Pologne) en juin 1968. Soit K un compact indépendant, union de deux compacts de Kronecker, K est-il de Kronecker ?

I. INTRODUCTION

Nous étudions tout d'abord le groupe dual du groupe abélien topologique $S(X)$ des applications continues d'un espace compact X dans $T = \{z \in C, |z| = 1\}$, $S(X)$ étant muni de la topologie de la convergence uniforme. Cette étude a été à la source des résultats 1 et 2 que nous introduisons ci-dessous.

Soit G un groupe abélien localement compact.

Définition 1. Une partie K de G est dite *indépendante* (sur les entiers) si pour tout n-uple $x_1 \ldots x_n$ d'éléments distincts de K, l'équation $\sum_1^n p_i x_i = 0$ ($\prod_1^n x_i^{p_i} = 1$ si le groupe est noté multiplicativement) a comme seule solution $p_1 \ldots p_n$ en éléments de Z la solution triviale $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = 0$.

Définition 2. Un sous-compact K de G est dit *de Kronecker* si toute fonction continue de module 1 sur K peut-être approchée uniformément sur K par des (restrictions à K de) caractères continus sur G.

Il est évident que tout compact de Kronecker est indépendant. La réciproque est exacte si K est fini (théorème de Kronecker).

Nous obtenons essentiellement les résultats suivants (qui complètent un résultat (voir théorème 2 plus loin) de N. Th. Varopoulos):

Résultat 1. *Il existe un compact indépendant K de T^N (produit d'une infinité de copies d'exemplaires de T) tel que:*

(i) *K soit union d'un compact de Kronecker et d'un point,*

(ii) *K ne soit pas de Kronecker.*

Résultat 2. *Il existe un compact indépendant K de $\boldsymbol{T}$ tel que:*
(i) *K soit union de deux compacts de Kronecker,*
(ii) *K ne soit pas de Kronecker.*

II. DUAL DU GROUPE DES FONCTIONS CONTINUES DE MODULE 1 SUR UN ESPACE COMPACT X.

1. Notations. Soit X un espace topologique compact. Nous noterons:

$S(X)$ le groupe (multiplicatif) topologique (convergence uniforme) des applications continues de X dans $\boldsymbol{T} = \{z \in \boldsymbol{C}, |z| = 1\}$,

$C_{\boldsymbol{R}}(X)$ le groupe (additif) topologique (convergence uniforme) des applications continues de X dans $\boldsymbol{R}$;

$S_e(X)$ le sous-groupe topologique de $S(X)$ image de $C_{\boldsymbol{R}}(X)$ par l'homomorphisme $C_{\boldsymbol{R}}(X) \to S(X)$ qui à $u \in C_{\boldsymbol{R}}(X)$ associe $f = \exp(2i\pi u)$;

$H^1(X)$ le groupe topologique quotient de $S(X)$ par $S_e(X)$ (ce groupe $H^1(X)$ est discret);

$C_Z(X)$ le sous-groupe topologique de $C_{\boldsymbol{R}}(X)$ formé par les fonctions continues à valeurs dans Z;

$M_{\boldsymbol{R}}(X)$ le groupe (additif) des mesures de Radon réelles sur X;

$M_Z(X)$ le sous-groupe de $M_{\boldsymbol{R}}(X)$ formé des mesures μ prenant une valeur entière sur chaque élément de $C_Z(X)$.

Enfin, pour tout groupe topologique abélien G, nous noterons $\hat{G}$ le groupe, sans topologie, des caractères continus sur G (i.e. des homomorphismes continus de G dans le groupe compact T); et pour tout homomorphisme continu $h: G_1 \to G_2$, entre groupes abéliens topologiques, nous noterons h^*: $\hat{G}_2 \to \hat{G}_1$ l'homomorphisme dual.

2. Etude de $S_e(X)$.

Théorème 1. *Soit X un espace compact. Le groupe $S_e(X)$ est isomorphe au groupe des mesures de Radon réelles μ sur X de la forme $\mu = \sum_1^n \mu_i$, où $\mu_1, \ldots, \mu_n$ sont des mesures de masse totale entière portées par des composantes connexes de X. (Une telle mesure μ definissant un caractère continu χ_μ sur $S_e(X)$ de la façon suivante: pour tout $f \in S_e(X)$ on a $\chi_\mu(f) = \exp(2i\pi \int u d\mu)$ pour n'importe quel choix de $u \in C_{\boldsymbol{R}}(X)$ tel que $\exp(2i\pi u) = f$.)*

Ce théorème sera une conséquence immédiate des trois propositions suivantes.

Proposition 1. *Notons h l'application qui à chaque $\mu \in M_{\boldsymbol{R}}(X)$ associe l'application φ_μ de $C_{\boldsymbol{R}}(X)$ dans T définie par $\varphi_\mu(u) = \exp(2i\pi \int u d\mu)$. h est un homomorphisme bijectif du groupe $M_{\boldsymbol{R}}(X)$ sur le groupe $\widehat{C_{\boldsymbol{R}}(X)}$.*

Démonstration. Tout d'abord φ_μ est trivialement un caractère continu sur $C_{\boldsymbol{R}}(X)$. Ensuite h (trivialement homomorphique) est injectif: si $\mu_1 \neq \mu_2$, il existe $u \in C_{\boldsymbol{R}}(X)$ telle que $\int u d\mu_1 - \int u d\mu_2 \notin Z$.

Enfin, h est surjectif: soit φ un caractère continu sur $C_{\boldsymbol{R}}(X)$, $C_{\boldsymbol{R}}(X)$ étant connexe et simplement connexe, il existe une application l additive et continue de $C_{\boldsymbol{R}}(X)$ dans $\boldsymbol{R}$ telle que

$$u \in C_{\boldsymbol{R}}(X) \Rightarrow \varphi(u) = \exp(2i\pi l(u)).$$

l étant additive et continue sur $C_{\boldsymbol{R}}(X)$, l est linéaire, donc il existe une mesure de Radon réelle μ sur X telle que

$$u \in C_{\boldsymbol{R}}(X) \Rightarrow l(u) = \int u d\mu.$$

On a alors $\varphi = \varphi_u$. C.Q.F.D.

Convention. Dans ce qui suit nous identifierons $\widehat{C_{\boldsymbol{R}}(X)}$ à $M_{\boldsymbol{R}}(X)$, via cet isomorphisme h.

Proposition 2. *L'homomorphisme e^* dual de e: $C_{\boldsymbol{R}}(X) \to S_e(X)$ $(e(u) = \exp 2i\pi u)$ est une injection de $\widehat{S_e(X)}$ dans $M_{\boldsymbol{R}}(X)$ qui a pour image $M_Z(X)$.*

Démonstration. e étant surjectif (par définition de $S_e(X)$), e^* est bien sur injectif. Montrons que l'image de e^* est incluse dans $M_Z(X)$.

Soit $\varphi \in \widehat{S_e(X)}$, soit μ son image par e^*; on a $\exp(2i\pi \int u d\mu) = \varphi(\exp 2i\pi u)$ pour tout $u \in C_{\boldsymbol{R}}(X)$; donc, si $u \in C_Z(X)$, du fait que $\varphi(\exp 2i\pi u) = 1$ on déduit $\int u d\mu \in Z$. Ceci prouve que $\mu \in M_Z(X)$.

Montrons enfin que tout élément μ de $M_Z(X)$ est atteint: pour tout $f \in S_e(X)$, le nombre $\exp(2i\pi \int u d\mu)$ est indépendant du choix du $u \in C_{\boldsymbol{R}}(X)$ tel que $\exp 2i\pi u = f$ (du fait que $\mu \in M_Z(X)$). Posons donc $\varphi(f) = \exp(2i\pi \int u d\mu)$. φ définit bien un caractère sur $S_e(X)$, continu, dont l'image par e^* est μ. C.Q.F.D.

Proposition 3. *$M_Z(X)$ est l'ensemble des mesures μ de la forme $\sum_1^n \mu_i$, où $\mu_1, \ldots, \mu_n$ sont des mesures réelles de masse totale entière portées par des composantes connexes de X.*

Démonstration. Une telle mesure $\sum \mu_i$ appartient trivialement à $M_Z(X)$. Réciproquement, soit $\mu \in M_Z(X)$. Pour chaque composante connexe X_a de X notons μ_a la trace de μ sur X_a. μ donnant une masse entière à tout ouvert et fermé de X, chaque X_a étant intersection des ouverts et fermés le contenant, on en déduit que chaque μ_a a une masse entière. Il n'existe donc qu'un nombre fini de X_a, soit $X_1, \ldots, X_n$, tels que $\mu_a \neq 0$. Considérons

$$\mu' = \mu - \sum_1^n \mu_i,$$

$\mu' \in M_Z(X)$ et la trace de μ' sur chaque X_a est nulle; chaque X_a étant intersection dénombrable des ouverts et fermés qui le contiennent, on en déduit que pour chaque X_a, il existe un ouvert contenant X_a sur lequel μ' a une trace nulle. On en déduit $\mu' = 0$. C.Q.F.D.

3. Etude de $\widehat{S(X)}$. Si X est simplement connexe ($H^1(X)=0$), le théorème 1 donne $\widehat{S(X)}$. En particulier, on retrouve facilement le résultat suivant [3]:

COROLLAIRE 1. *Soit X un compact totalement discontinu. Pour tout caractère continu χ sur $S(X)$ il existe $p_1, \ldots, p_n \in Z$ et $x_1, \ldots, x_n \in X$ tels que:*

$$\chi(f) = \prod_1^n [f(x_i)]^{p_i} \quad pour\ tout\ f \in S(X).$$

(En d'autres termes, $\widehat{S(X)}$ est isomorphe au groupe libre commutatif engendré par X).

Nous aurons aussi besoin dans la suite du corollaire suivant:

COROLLAIRE 2. *Soit X un espace compact. Soit μ une mesure réelle sur X, de masse totale entière, portée par une composante connexe de X; il existe un caractère continu χ sur $S(X)$ tel que, pour tout $u \in C_{\boldsymbol{R}}(X)$, on ait*

$$\chi(\exp 2i\pi u) = \exp(2i\pi \textstyle\int u d\mu).$$

Démonstration. Après le théorème 1 nous n'avons plus qu'à montrer que tout caractère continu φ sur $S_e(X)$ se prolonge en un caractère continu sur $S(X)$. Du fait que T est divisible, φ se prolonge en un caractère χ sur $S(X)$. Du fait que $S_e(X)$ est ouvert dans $S(X)$, χ est continu. C.Q.F.D.

Remarques. (a) Le corollaire 1 n'est en fait qu'un cas particulier du cas où toute composante connexe X_a de X est simplement connexe (i.e. $H^1(X_a) = 0$); on montre alors que $H^1(X) = 0$, d'où le fait que $\widehat{S(X)}$ est la somme directe des $M_Z(X_a)$, $M_Z(X_a)$ étant le groupe des mesures réelles de masse totalle entière sur X_a.

(b) Le corollaire 2 peut se formuler plus précisément de la façon suivante: considérons la suite exacte

$$0 \to S_e(X) \to S(X) \to H^1(X) \to 0.$$

$S_e(X)$ étant ouvert (et fermé) dans $S(X)$, $H^1(X)$ est discret et la suite duale $0 \to \widehat{H^1(X)} \to \widehat{S(X)} \to \widehat{S_e(X)} \to 0$ est exacte, et $\widehat{H^1(X)}$ est le groupe des caractères de $H^1(X)$, sans condition de continuité.

III. ETUDE DE L'UNION D'UN COMPACT DE KRONECKER ET D'UN POINT

A partir du corollaire 1 nous retrouvons le théorème suivant [3]:

THÉORÈME 2. *Soit X un compact indépendant, totalement discontinu, d'un groupe abélien localement compact G. Supposons que X soit union d'un compact de Kronecker X_1 et d'un point a. Alors X est de Kronecker.*

A partir du corollaire 2 nous allons maintenant obtenir le théorème suivant, qui montre la nécessité de la totale discontinuité dans le théorème 2:

THÉORÈME 3. *Soit X_1 un espace compact métrisable non totalement discontinu. Il existe un sous-compact K de T^N tel que:*

(i) *K soit indépendant;*

(ii) *K soit union d'un compact de Kronecker K_1 homéomorphe à X_1 et d'un point a;*

(iii) *K ne soit pas de Kronecker.*

Pour démontrer ce théorème 3 il suffit de démontrer:

PROPOSITION 4. *Soit X un espace compact métrisable non totalement discontinu, union d'un compact X_1 et d'un point $a \notin X_1$. Alors, il existe un sous-groupe Γ dénombrable de $S(X)$ tel que:*

(i) *pour toute partie finie F de X, l'ensemble Γ/F des restrictions à F des éléments de Γ soit dense dans $S(F)$;*

(ii) *Γ/X_1 soit dense dans $S(X_1)$;*

(iii) *Γ ne soit pas dense dans $S(X)$.*

Démonstration de la proposition 4. X n'étant pas totalement discontinu, il existe une mesure réelle μ sur X, diffuse, de masse totale entière, portée par une composante connexe de X (donc de X_1). D'après le corollaire 2 il existe un caractère continu χ sur $S(X)$ tel que, pour tout $u \in C_{\boldsymbol{R}}(X)$, on ait

$$\chi(\exp(2i\pi u)) = \exp(2i\pi \textstyle\int u d\mu).$$

On prend alors pour Γ un sous-groupe dénombrable partout dense du groupe

$$S_{\mu,a}(X) = \{f \in S(X);\ f(a) = \chi(f)\}.$$

Les propriétés (i) à (iii) sont faciles à vérifier (pour (i) on utilise le fait que μ est diffuse). C.Q.F.D.

Ensuite, pour déduire le théorème 3 de la proposition 4, on pose $K = \{\{\gamma(x) \in T\}_{\gamma \in \Gamma} \in T^\Gamma \mid x \in X\}$.

Remarque. Le paragraphe montre clairement que, pour que K, union d'un Kronecker K_1 et d'un point a, soit de Kronecker, il est nécessaire (et, au moins si $H^1(K) = 0$, suffisant) de supposer non seulement K indépendant, mais de plus qu'il n'existe pas de mesure $\mu \in M_Z(K_1)$ et d'entier $q \in Z$ tels que "$qa = \int_K x d\mu$" (notation additive).

IV. ETUDE DE L'UNION DE DEUX COMPACTS DE KRONECKER

Nous allons démontrer les théorèmes suivants (résultat 2 de l'introduction).

THÉORÈME 4. *Il existe deux compacts X_1 et X_2 de $\boldsymbol{R}$, disjoints, dénombrables tels que*

(i) *$X_1 \cup X_2$ soit indépendant;*
(ii) *X_1 et X_2 soient de Kronecker;*
(iii) *$X_1 \cup X_2$ ne soit pas de Kronecker.*

THÉORÈME 5. *Il existe deux compacts X_1 et X_2 de $\boldsymbol{R}$, disjoints, parfaits, tels que*

(i) *$X_1 \cup X_2$ soit indépendant;*
(ii) *X_1 et X_2 soient de Kronecker;*
(iii) *$X_1 \cup X_2$ ne soit pas H_1*(1).

Les démonstrations reposent sur la méthode de Kaufman [1] et sur le lemme suivant:

LEMME. *Soit $E \subset \boldsymbol{R}$ un K_σ d'intérieur vide. Soit K un espace métrisable compact totalement discontinu. Alors, il existe un ensemble de $1^{\text{ère}}$ catégorie de Baire Σ dans $C(K)$ tel que pour tout $\varphi \in C(K) \setminus \Sigma$, on a*

$$Gp\big(\varphi(K)\big) \cap E \subset \{0\}.$$

Démonstration du lemme. Il suffit de démontrer que pour tout sous compact C d'intérieur vide de $\boldsymbol{R}$, pour tout couple (n, m) d'entiers non négatifs tel que $n+m > 0$, l'ensemble

$$\Sigma_{C,n,m} = \{\varphi \in C(K);\ \big(n\varphi(K) - m\varphi(K)\big) \cap C \neq \emptyset\}$$

qui est évidemment fermé, est d'intérieur vide.

Ici, pour tout $X \subset \boldsymbol{R}$, pour tout couple (n, m) d'entiers non négatifs, on adopte la notation:

$$nX - mX = \{x_1 + \ldots + x_n - x_{n+1} - \ldots - x_{n+m};\ x_j \in X,\ j = 1, 2, \ldots, n+m\}.$$

Pour ceci, notant, pour chaque entier $p \geqslant 1$, F_p le sous-ensemble de $C_{\boldsymbol{R}}(K)$ formé des fonctions prenant au plus p valeurs, on remarque que, du fait que C est d'intérieur vide, on a

$$\overline{\complement \Sigma_{C,n,m} \cap F_p} = F_p,$$

ce qui, compte tenu du fait que $\bigcup_p F_p$ est dense dans $C_{\boldsymbol{R}}(K)$, entraîne notre résultat. C.Q.F.D.

(1) Un compact K de $\boldsymbol{R}$ est dit H_1 si pour tout $\mu \in M(K)$ on a $\|\mu\| = \|\hat{\mu}\|_\infty$.

Démonstration du théorème 5. Soit X un compact de $\boldsymbol{R}$, parfait, indépendant, et non H_1 [2]. Soit i: $X \to \boldsymbol{R}$ l'injection canonique de X dans $\boldsymbol{R}$. En utilisant la méthode de [1] on voit qu'il existe un ensemble Σ de $1^{\text{ère}}$ catégorie de Baire dans $C_{\boldsymbol{R}}(X)$ tel que pour tout $\varphi \notin \Sigma$, les deux ensembles $\varphi(X)$ et $(\varphi+i)(X) = \{\varphi(x)+x\}_{x\in X}$ sont tous deux de Kronecker. Le lemme 1 entraîne donc qu'il existe un ensemble Σ_1 de $1^{\text{ère}}$ catégorie de Baire tel que, pour tout $\varphi \notin \Sigma_1$ on ait:

(a) $\varphi(X)$ est un Kronecker homéomorphe à X;
(b) $(\varphi+i)(X)$ est un Kronecker homéomorphe à X;
(c) $Y_\varphi = \varphi(X) \cup (\varphi+i)(X)$ est indépendant.

Cependant Y_φ n'est jamais un H_1: en utilisant la caractérisation des ensembles H_1 donnée dans [3] on voit en effet que si Y_φ était H_1, l'ensemble

$$X = \{x + \varphi(x) - \varphi(x)\}_{x\in X}$$

le serait aussi. C.Q.F.D.

La démonstration du théorème 4 se fait de façon analogue en partant d'un sous-compact X de $\boldsymbol{R}$ dénombrable qui soit indépendant mais non de Kronecker.

L'idée sous jacente à ces deux théorèmes était de partir d'un sous-groupe fermé Δ de $S(X)$ tel que

(a) $\Delta / F = S(F)$ pour toute partie finie F de X;
(b) $\Delta \neq S(X)$;

puis de construire le sous-groupe Γ de $S(X) \times S(X)$ $\big(= S(X \cup X)\big)$ défini par

$$\{(f_1, f_2) \in \Gamma\} \Leftrightarrow \{f_1 f_2 \in \Delta\}.$$

Γ correspond alors à un ensemble indépendant, union de deux ensembles de Kronecker, qui ne soit pas de Kronecker.

Travaux cités

[1] R. Kaufman, *A functional method for linear sets*, Israel J. Math. 5 (1967), p. 185-187.
[2] W. Rudin, *Fourier transforms of measures on independent sets*, Bull. Amer. Math. Soc. 66 (1960), p. 199-202.
[3] N. Th. Varopoulos, C.R.A.S. 268 (1969), p. 954-957 (A).

Reçu par la Rédaction le 23. 5. 1969