However, by comparing Theorem 4.4 below and [6], Theorem 1, it is easy to see that (4.1) and (4.2) have the same approximation properties and are essentially the same. Hence Theorem 4.4 may be considered as a characterization of the Bernstein power series.

THEOREM 4.4. *Let* $0 < a < 1$. *Then a necessary and sufficient condition that* $\{P_n(f;x)\}$ *converge to* $f(x)$ *uniformly on* $[0, a]$, *for each* $f \in C[0,1]$, *is* $\mu_j(x) = (1-x)^j$ *for* $j = 0, 1, 2, \ldots$

Proof. By applying the Korovkin theorem and Lemma 4.1 with $a_n = 1$ for all n, we see that the condition is sufficient. The proof of necessity is similar to the proof given in Theorem 3.3.

References

[1] E. Cheney and A. Sharma, *Bernstein power series*, Canadian Journal of Math. 16 (1964), p. 241-252.

[2] S. Eisenberg, *Moment sequences and the Bernstein polynomials*, Canadian Math. Bulletin (to appear).

[3] L. C. Hsu, *Approximation of non-bounded continuous functions by certain sequences of linear positive operators or polynomials*, Studia Math. 21 (1961/62), p. 37-43.

[4] — and J. H. Wang, *General "increasing multiplier" methods and approximation of unbounded continuous functions by certain concrete polynomial operators*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 156 (1964), p. 264-267.

[5] G. G. Lorentz, *Bernstein polynomials*, Toronto 1953.

[6] W. Meyer-König and K. Zeller, *Bernsteinsche Potenzreihen*, Studia Math. 19 (1960), p. 89-94.

[7] B. Wood, *Convergence and almost convergence of certain sequences of positive linear operators*, ibidem 34 (2) (1969).

Reçu par la Rédaction le 17. 7. 1969

STUDIA MATHEMATICA, T. XXXV. (1970)

Пример гладкого пространства, сопряженное к которому не является строго нормированным

С. Л. ТРОЯНСКИ (София)

Пространство Банаха X называется *строго нормированным*, если из условии

$$\|x\| = \|y\| = 1, \quad \|x+y\| = 2 \quad (x, y \in X)$$

следует, что x и y совпадают.

Пространство Банаха X называется *гладким*, если его норма дифференцируема по Гато, т.е. если для любых $x, y \in X$ ($\|x\| > 0$) выполнено следующее условие:

$$\lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau}(\|x+\tau y\| + \|x-\tau y\| - 2\|x\|) = 0.$$

Алаоглу и Биркхоф [1] показали, что

(а) пространство X строго нормированно, если его сопряженное X^* гладко,

(б) пространство X гладко, если X^* строго нормированно.

Известны примеры (см. напр. Дэй [2], стр. 191) строго нормированного пространства, сопряженное к которому не является гладким.

Цель настоящей заметки построить пример гладкого пространства, сопряженное к которым не является строго нормированным.

Через l обозначим банахово пространство, состоящее из действительных числовых последовательностей $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$, ряд из которых абсолютно сходится:

$$\|\{a_i\}_{i=1}^{\infty}\| = \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| \quad (\{a_i\}_{i=1}^{\infty} \in l).$$

Общий вид линейного функционала в l записывается в виде:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \xi_i \quad (\{a_i\}_{i=1}^{\infty} \in l),$$

где $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ есть ограниченная последовательность действительных чисел. Сопряженным пространством к l является пространство m, состоящее из ограниченных последовательностей действительных чисел $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$:

$$\|\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}\| = \sup_i |\xi_i| \qquad (\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty} \in m).$$

В пространстве m введем новую норму. Для этого возьмем произвольную действительную функцию $M(a)$, заданую на открытом интервале $(-1, 1)$ и удоллетворяющую следующим условиям:

1. $M(a) = M(-a)$, $M(0) = 0$;
2. $M(a) < M(b)$, если $|a| < |b|$;
3. $M(pa+qb) < pM(a)+qM(b)$, где $p+q = 1, p > 0, q > 0$;
4. $\lim\limits_{a\to 1} \dfrac{1}{M(a)} = 0$.

Примером функции, удовлетворяющей этим условиям, может служить например функция $a^2/(1-a^2)$.

Пусть $x = \{\xi_i\}_{i=1}^{\infty} \in m$, а λ действительное число. Положим:

$$\varphi(x, \lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} M\left(\frac{\xi_i}{\lambda}\right).$$

Через $I(x)$ обозначим совокупность действительных чисел λ, удовлетворяющих неравенствам $\lambda \geqslant \|x\|, \varphi(x, \lambda) \leqslant 1$. Легко видеть, что $I(x)$ есть замкнутое множество.

Новую норму в m определим равенством:

$$\|x\|' = \min_{\lambda \in I(x)} \lambda. \tag{1}$$

Из определения новой нормы следует, что $\|x\|' \geqslant \|x\|$ для любого $x \in m$. Пусть $\varphi(x, \|x\|') = 1$. Тогда для некоторого индекса i

$$M\left(\frac{\xi_i}{\|x\|'}\right) \geqslant 1.$$

Отсюда $\|x\|' \leqslant K|\xi_i| \leqslant K\|x\|$, где K положительный корень уравнения $M(1/a) = 1$. Если $\varphi(x, \|x\|') < 1$, то $\|x\|' = \|x\|$. Значит

$$\|x\| \leqslant \|x\|' \leqslant K\|x\| \qquad (x \in m),$$

т.е. новая и старая нормы эквивалентны.

Положительная однородность нормы $\|\cdot\|'$ следует немедленно из (1). Докажем неравенство треугольника для $\|\cdot\|'$. Пусть $x = \{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$, $y = \{\eta_i\}_{i=1}^{\infty}$ ненулевые элементы из m. Тогда, так как

$$M\left(\frac{\xi_i+\eta_i}{\|x\|'+\|y\|'}\right) \leqslant \frac{\|x\|'}{\|x\|'+\|y\|'} M\left(\frac{\xi_i}{\|x\|'}\right) + \frac{\|y\|'}{\|x\|'+\|y\|'} M\left(\frac{\eta_i}{\|y\|'}\right)$$
$$(i = 1, 2, \ldots),$$

то

$$\varphi(x+y, \|x\|'+\|y\|') \leqslant 1. \tag{2}$$

Замечая, что $\|x\|'+\|y\|' \geqslant \|x\|+\|y\| \geqslant \|x+y\|$, то из (1), следует, что

$$\|x+y\|' \leqslant \|x\|'+\|y\|'.$$

Теперь введем в l новую норму

$$\|\{a_i\}_{i=1}^{\infty}\|_1 = \sup \frac{\sum_{i=1}^{\infty} a_i \xi_i}{\|\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}\|'}, \tag{3}$$

где точная верхняя грань берется по всем ненулевым элементам $\{\xi_i\} \in m$.

Покажем, что пространство m с нормой $\|\cdot\|'$ сопряженно к пространству l с нормой определенной равенством (3). Так как пространство l сепарабельно, то для этого достаточно показать (см. напр. Кадец [3]), что для любой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset m$ слабо сходящейся к элементу $x \in m$, относительно l следует, что[1]

$$\varliminf_{n\to\infty} \|x_n\|' \geqslant \|x\|'. \tag{4}$$

Пусть $x_n = \{\xi_i^{(n)}\}_{i=1}^{\infty}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и $x = \{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$. Из слабой сходимости следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \xi_i^{(n)} = \xi_i \qquad (i = 1, 2, \ldots). \tag{5}$$

Так как

$$\varphi(x_n, \|x_n\|') \leqslant 1,$$

то имея ввиду (5) легко проверить, что

$$\varphi(x, \varliminf_{n\to\infty} \|x_n\|') \leqslant 1.$$

С другой стороны,

$$\varliminf_{n\to\infty} \|x_n\|' \geqslant \varliminf_{n\to\infty} \|x_n\| \geqslant \|x\|.$$

Значит $\varliminf\limits_{n\to\infty} \|x_n\|' \in I(x)$. Но тогда из (1) вытекает (4).

Возьмем произвольный элемент $\{a_i\}_{i=1}^{\infty} \in l$, принадлежащий единичной сферой, порожденной нормы $\|\cdot\|_1$. Пусть, для некоторого $x = \{\xi_i\}_{i=1}^{\infty} \in m$ $(\|x\|' = 1)$,

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \xi_i = 1.$$

---

[1] Это условие и необходимо.

Покажем, что

$$\varphi(x,1) = 1. \tag{6}$$

Допустим противное, т.е. $\varphi(x,1) < 1$. Так как $\|x\|' = 1$, то

$$|\xi_i| < 1 \ (i = 1, 2, \ldots), \quad \overline{\lim_{i\to\infty}} |\xi_i| = 1.$$

Найдем индекс k, так чтобы $|a_k| > 0$. Выберем ξ, так чтобы

$$\varphi(x,1) + \frac{1}{2^k}[M(\xi) - M(\xi_k)] \leqslant 1, \quad |\xi_k| < \xi < 1. \tag{7}$$

Рассмотрим элемент $x' = \{\xi_i'\}_{i=1}^{\infty}$, где $\xi_i' = \xi_i$ если $i \neq k$ и $\xi_k' = \xi \operatorname{sign} a_k$. Так как $\|x'\| = 1$, то $1 \epsilon I(x')$. Из (1) и (7) получим, что $\|x'\|' = 1$. С другой стороны, $a_k \xi_k < a_k \xi_k'$. Отсюда

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \xi_i' > 1,$$

что противоречит выбору элемента $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Теперь покажем, что l есть гладкое пространство относительно нормы $\|\cdot\|_1$. Для этого достаточно показать (см. напр. Дэй [2], стр. 187), что каждому нормированному элементу относительно нормы $\|\cdot\|_1$, из l соответствует только одна опорная гиперплоскость.

Пусть нормированному элементу $\{a_i\}_{i=1}^{\infty} \epsilon l$ соответствуют две различные гиперплоскости $x, y \epsilon m$ ($\|x\|' = \|y\|' = 1$). Тогда и $(x+y)/2$ ($\|(x+y)/2\|' = 1$) есть опорная гиперплоскость к элементу $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$. В силу (6)

$$\varphi\left(\frac{x+y}{2}, 1\right) = 1. \tag{8}$$

С другой стороны, замечая, что $\|x-y\| > 0$ и $M(a)$ есть строго выпуклая функция, то проводя буквально такие же рассуждения как и при доказательстве (2) получим

$$\varphi\left(\frac{x+y}{2}, 1\right) < 1,$$

что противоречит (8). Полученное противоречие и доказывает гладкость пространства l относително нормы $\|\cdot\|_1$.

И, наконец, нам осталось показать, что пространство m не является строго нормированным относительно нормы $\|\cdot\|'$. Положим $x = \{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$, $y = \{(-1)^i \xi_i\}_{i=1}^{\infty}$, где ξ_i есть корень уравнения

$$M(a) = \frac{i}{3}.$$

Очевидно

$$\lim_{i\to\infty} |\xi_i| = 1.$$

Отсюда $\|x\| = \|y\| = 1$.

Из монотонности функции $M(|a|)$ следует, что при $\lambda \geqslant 1$

$$\varphi(x, \lambda) = \varphi(y, \lambda) \leqslant \frac{2}{3}.$$

Значит $\|x\|' = \|y\|' = 1$. Так как $\|x+y\|' \geqslant \|x+y\| = 2$, то $\|x+y\|' = 2$ и тем не менее x и y не совпадают.

В заключение выражаю глубокую благодарность М. Й. Кадецу за ценные советы по поводу настоящей заметки.

Литература

[1] L. Alaoglu and G. Birkhoff, *General ergodic theorems*, Ann. Math. 41 (1940), p. 293-309.

[2] М. Дэй, *Нормированные линейные пространства*, Москва 1961.

[3] М. И. Кадец, *Условия дифференцируемости нормы Банахова пространства*, УМН вып. 3 (1965), p. 183-187.

Reçu par la Rédaction le 17. 7. 1969