STUDIA MATHEMATICA, T. XXXVI, (1970)

Ensemble de non-synthèse uniforme dans les algèbres $A_p(G)$

par

N. LOHOUE (Grenoble et ORSAY)

Introduction. On a rassemblé ci-dessous quelques définitions utiles à la compréhension du texte.

G désigne un groupe abélien localement compact, non discret, muni d'une mesure de Haar dx. Γ est le groupe dual de G muni de la mesure de Haar normalisée $d\gamma$. $L^p(G)$ est l'espace de Banach classique associé au couple (G, dx), $p \geqslant 1$.

Un *convoluteur* de $L^p(G)$ est un opérateur de $L^p(G)$ dans $L^p(G)$ qui commute avec les translations. A un convoluteur T on sait associer ([3], p. 4) un élément $\hat{T}$ dit *multiplicateur* de $\mathscr{F}L^p(G)$, tel que pour toute fonction f de $L^p(G) \cap L^2(G)$ on ait $\widehat{T(f)} = \hat{T}.\hat{f}$ ($\hat{f}$ étant la transformée de Fourier de f).

On note $CV_p(G)$ l'algèbre de Banach des convoluteurs de $L^p(G)$ (la norme $\|T\|CV_p(G)$ d'un élément T de $CV_p(G)$ étant sa norme d'opérateur).

On dit qu'une fonction f, définie sur G, à valeurs complexes, *appartient à* $A_p(G)$, si elle s'exprime de la façon suivante ($*$ est le symbole de convolution):

$$\forall x \in G, \quad f(x) = \sum_1^\infty f_i * g_i(x)$$

($f_i \in L^p(G)$, $g_i \in L^q(G)$, q étant l'exposant conjugué de p), avec

$$\sum_1^\infty \|f_i\|_{L^p(G)} \times \|g_i\|_{L^q(G)} < \infty.$$

On munit $A_p(G)$ de la norme suivante:

$$\|f\|_{A_p(G)} = \operatorname*{Inf}_{f=\sum_1^\infty f_i * g_i} \Big\{ \sum_1^\infty \|f_i\|_{L^p(G)} \times \|g_i\|_{L^q(G)} \Big\}.$$

$A_p(G)$ est alors une algèbre de Banach pour le produit ponctuel (Th. C. Herz, voir [1]). Son dual est isomorphe et isométrique à $CV_p(G)$ (Th. A. Figa-Talamanca, voir [2]). Si T est un convoluteur, la forme linéaire associée est définie comme suit:

$$\forall f \in A_p(G)\left(f = \sum_1^\infty f_i * g_i\right), \quad \langle T, f\rangle = \sum_1^\infty T(f_i) * g_i(0).$$

On montre que $A_2(G)$ est l'algèbre de Banach des transformées de Fourier des éléments de $L^1(\Gamma)$ munie de la norme provenant de $L^1(\Gamma)$, et qu'elle est incluse dans $A_p(G)$ pour tout p (voir [1]).

Dans cet article on se propose de mettre en évidence un sous-ensemble fermé du groupe G qui n'est de synthèse pour aucune algèbre $A_p(G)$, $p \neq 1$.

Pour résoudre le problème on va montrer qu'il existe une fonction f de $A_2(G)$ qui engendre dans chaque $A_p(G)$ un idéal fermé non auto-adjoint.

On établira ce résultat pour un groupe compact infini et on le généralisera à l'aide du théorème de structure.

I. Théorème. *Si G est un groupe abélien compact infini, alors il existe une fonction f de $A_2(G)$ qui engendre dans chaque $A_p(G)$ un idéal fermé non auto-adjoint.*

Démonstration. On va utiliser la construction de P. Malliavin [4] et ses variantes classiques.

On désigne par Ω le produit dénombrable d'intervalles $[0,1]$; les coordonnées d'un point ω de Ω sont $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_n, \ldots$

On note $d\omega$ la mesure sur Ω produit des mesures de Lebesgue sur chaque intervalle, $\varphi_k(\omega)$ une suite de variables aléatoires, gaussiennes, normales, indépendantes sur l'espace de probabilité Ω.

D'après [5], 7.7, on peut choisir une suite (γ_k) d'éléments de Γ telle que les trois conditions ci-dessous soient vérifiées.

1° La fonction en la variable x

$$\hat{f}(x, \omega) = \sum_{k \text{ pair}} k^{-2}\varphi_k(\omega)\operatorname{Re}\langle x, \gamma_k\rangle + i\sum_{k \text{ impair}} k^{-2}\varphi_k(\omega)\operatorname{Re}\langle x, \gamma_k\rangle,$$

appartient presque sûrement à $A_2(G)$. (Cette condition est d'ailleurs toujours satisfaite.)

2° Soient $a_\gamma(u, v, \omega)$ $\big((u, v) \in R^2\big)$ définis par

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma(u, v, \omega)\langle x, \gamma\rangle = \prod_{k \text{ pair}} \operatorname{Exp}\left(-i\frac{u}{k^2}\cdot\varphi_k(\omega)\operatorname{Re}\langle x, \gamma_k\rangle\right). \times$$
$$\times \prod_{k \text{ impair}} \operatorname{Exp}\left(-i\frac{v}{k^2}\varphi_k(\omega).\operatorname{Re}\langle x, \gamma_k\rangle\right)$$

et

$$B(u, v, \omega) = \sum_{\gamma\in\Gamma} |a_\gamma(u, v, \omega)|^4,$$

alors il existe une constante $\delta > 0$ dépendant de $\{\gamma_k\}$ telle que

$$\int_\Omega B(u, v, \omega)\,d\omega \leqslant 2\operatorname{Exp}\{-\delta(|u|^{1/2} + |v|^{1/2})\}.$$

3° Soit $\Psi_\omega(\gamma')$ la fonction définie par

$$\Psi_\omega(\gamma') = \int_{R^2} (u - iv)\,a_{\gamma'}(u, v, \omega)\,e^{-ius-ivt}\,ds\,dt;$$

alors presque sûrement on a

$$\Psi_\omega \in L^\infty(\Gamma), \qquad \forall\gamma\in\Gamma, \qquad \sum_{\gamma'\in\Gamma} \Psi_\omega(\gamma')\bar{f}(-\gamma + \gamma', \omega) \equiv 0$$

et $\sum_{\gamma'\in\Gamma} \Psi_\omega(\gamma') f(-\gamma', \omega) \neq 0$ avec une probabilité positive.

On veut montrer que la fonction Ψ_ω appartient presque sûrement à $L^s(\Gamma)$ pour tout $s > 2$. Soit $0 < \varepsilon < \delta'$. Si

$$I = \int_{R^2\times\Omega} B(u, v, \omega)\operatorname{Exp}\{\varepsilon(|u|^{1/2} + |v|^{1/2})\}\,du\,dv\,d\omega,$$

par application du théorème de Fubini et en tenant compte de (2)

$$I \leqslant 2\int_{R^2} \operatorname{Exp}\{(\varepsilon - \delta)(|u|^{1/2} + |v|^{1/2})\}\,du\,dv < \infty,$$

donc

$$\int_{R^2} B(u, v, \omega)\operatorname{Exp}\{\varepsilon(|u|^{1/2} + |v|^{1/2})\}\,du\,dv \qquad (4)$$

est presque sûrement finie.

Soit $2 < s < 4$. A cause de (4), l'application répétée de l'inégalité de Hölder montre comme dans [5], 7.8.6, que la série $\sum_{\gamma'\in\Gamma} |\Psi_\omega(\gamma')|^s$ est presque sûrement convergente.

Soit ω_0 tel que Ψ_{ω_0} appartienne à $L^s(\Gamma)$ pour tout $s > 2$, $\hat{f}(x, \omega_0)$ appartienne à $A_2(G)$ et tel que (3) soit vérifiée.

Soient par ailleurs $1 < p < 2$, $s_0 = 2p/(2-p)$; $\Psi_{\omega_0} \in L^{s_0}(\Gamma)$; $\Psi_{\omega_0} = \Psi_{\omega_0} * \delta_{\hat{0}}$, $\delta_{\hat{0}}$ étant la masse de Dirac de l'élément neutre de Γ. Du fait que $\delta_{\hat{0}} \in L^r(\Gamma)$ $(r \geqslant 1)$ et d'après [6], Ψ_{ω_0} est un multiplicateur de $\mathscr{F}L^p(G)$.

Il en est de même pour tout $p \geqslant 2$, voir [2].

D'autre part, d'après (3) et [3], p. 8, si $T_{\Psi_{\omega_0}}$ est le convoluteur associé à Ψ_{ω_0} alors pour tout $\gamma\in\Gamma$

$$\langle T_{\Psi_{\omega_0}}, \bar{\hat{f}}\gamma\rangle = \sum_{\gamma'\in\Gamma} \Psi_{\omega_0}(\gamma')\bar{f}(-\gamma + \gamma') \equiv 0;$$

$$\langle T_{\Psi_{\omega_0}}, \hat{f}\rangle = \sum_{\gamma'\in\Gamma} \Psi_{\omega_0}(-\gamma')f(\gamma') \neq 0.$$

Par conséquent, $\hat{f}$ n'est pas dans l'idéal fermé de $A_p(G)$ engendré par $\bar{\hat{f}}$.

II. Théorème. *Si G est un groupe abélien localement compact non discret, la conclusion du théorème précédent est encore valable.*

Démonstration. D'après le théorème de structure, ([5], 2.4.1), $\Gamma = \mathbf{R}^n \times \Gamma_0$ ($n \geqslant 0, \Gamma_0$ contenant un sous-groupe compact et ouvert).

(a) Si $n > 0$ alors Γ contient un sous-groupe discret Γ_1. Désignons par Ψ_1 et $\hat{f}_1$ les fonctions associées à Γ_1 par le théorème I. Soit W un voisinage compact, symétrique de l'élément neutre $\hat{0}$ de Γ tel que $2W \cap \Gamma_1 = \hat{0}$.Soient X_w la fonction caractéristique de W, $d\Psi_1$ la mesure associée à Ψ_1, df_1 la mesure associée à f_1. Posons $f = df * X_w$, $\Psi = d\Psi_1 * X_w$. On vérifie facilement que $\Psi \in L^s(\Gamma), \forall s > 2$ et que $f \in L^1(\Gamma)$. Par ailleurs si $\tilde{f}(\gamma) = \bar{f}(-\gamma)$ on voit aisément, d'après le choix de Ψ_1 et f_1 que $\Psi * \tilde{f} \equiv 0$ et que $\Psi * f(\hat{0}) \neq 0$.

Il existe par conséquent une fonction continue à support compact h telle que $\Psi * f * h(\hat{0}) \neq 0$ et $\Psi * \tilde{f} * h \equiv 0$.

Comme $h \in L^r(\Gamma), \forall r \geqslant 1$, d'après V, $\Psi * h$ est un multiplicateur de $\mathscr{F}L^p(G)$ pour tout $p > 1$.

Par ailleurs $\hat{\tilde{f}} = \bar{\hat{f}}$; $\hat{f}$ n'est donc pas dans l'idéal fermé de $A_p(G)$ engendré par $\bar{\hat{f}}$.

(b) Si $n = 0$, alors Γ contient un sous-groupe compact et ouvert Γ_2, dont la mesure $m(\Gamma_2)$ est par conséquent finie, non nulle.

Soient k l'application naturelle de Γ dans Γ/Γ_2, $\Psi_2, \hat{f}_2$ les fonctions appartenant l'une à $L^s(\Gamma/\Gamma_2)$ l'autre à $A_2(G)$ obtenues par le théorème I.

Posons $\Psi = \Psi_2 \circ k$; $f = f_2 \circ k$.

D'après [5], 2.7.3, on voit immédiatement que, d'une part $\Psi \in L^s(\Gamma)$, $f \in L^1(\Gamma)$ et d'autre part,

$$\Psi * f(\hat{0}) = \operatorname{mes}(\Gamma_2) \times (\Psi_2 * f_2)(k(\hat{0})) \neq 0,$$

$$\Psi * \tilde{f}(\gamma) = \operatorname{mes}(\Gamma_2) \times (\Psi_2 * \tilde{f}_2)(k(\gamma)) = 0.$$

Un raisonnement analogue à celui fait à la fin de (a) montre que $\hat{f}$ n'est pas dans l'idéal fermé de $A_p(G)$ engendré par $\bar{\hat{f}}$.

III. Corollaire. *Tout groupe G contient un sous-ensemble fermé qui n'est de synthèse pour aucune algèbre $A_p(G)$ ($p \neq 1$).*

Il suffit de prendre $\hat{f}^{-1}(0)$, $\hat{f}$ étant donnée par le théorème II. $\hat{f}^{-1}(0)$ ne sera de synthèse pour aucune algèbre $A_p(G)$ puisque $\hat{f}$ n'est pas dans l'idéal fermé de $A_p(G)$ engendré par $\bar{\hat{f}}$.

Les ensembles de synthèse uniforme E, sont étroitement liés aux éléments f de $A_2(G)$ tel que $f^{-1}(0) = E$, plus précisément on a le résultat suivant:

IV. Théorème. *Si E est un fermé G_δ et si E est de synthèse uniforme, il existe une fonction h de $A_2(G)$ telle que $h^{-1}(0) = E$ et que pour tout p l'idéal de $A_p(G)$ constitué des fonctions qui s'annulent sur E est engendré par h.*

Démonstration. E étant de synthèse uniforme il suffit de construire une fonction h de $A_2(G)$ telle que $h^{-1}(0) = E$. Comme E est G_δ, son complémentaire E' est un ouvert F_σ: $E' = \bigcup K_n$, K_n compact et $K_n \subset E'$. Comme $K_n \cap E$ est vide il existe un voisinage W_n de K_n et un voisinage V_n de E tel que $W_n \cap V_n = \emptyset$; alors d'après [5], 2.6.2, il existe une fonction h_n de $A_2(G)$ telle que $h_n \equiv 1$ sur K_n, $h_n \equiv 0$ en dehors de W_n et $0 \leqslant h_n \leqslant 1$.

Soit

$$x_m = \sum_1^m 2^{-n} \frac{h_n}{\|h_n\|_{A_2(G)}};$$

x_m converge vers un élément h de $A_2(G)$.

D'après le choix des h_n, $E \subset h^{-1}(0)$.

Soit par ailleurs $a \notin E$, alors il existe n_0 tel que $a \in K_n$, par le choix des h_n, $h_{n_0}(a) = 1$ et comme $0 \leqslant h_n \leqslant 1$ on a $h(a) \neq 0$ et par conséquent $h^{-1}(0) = E$.

Remarque. On peut utiliser la construction ci-dessus conjointement avec la courbe de Eymard [1] pour mettre en évidence une fonction h' telle que

$$\|h'\|_{A_p(\mathbf{R}^n)} < \|h'\|_{A_{p_1}(\mathbf{R}^n)} \quad \text{si } n \geqslant 3 \text{ et } p < p_1 \leqslant 2.$$

Travaux cités

[1] P. Eymard, *Séminaire sur les convoluteurs*, Nancy 1968-69.
[2] A. Figa-Talamanca, *On multipliers of p-integrable functions*, Bull. A. M. S. 70 1964.
[3] N. Lohoue, *Analyse harmonique dans les espaces de multiplicateurs*, Thèse de 3e Cycle, Grenoble 1969.
[4] P. Malliavin, *Sur l'impossibilité de la synthèse spectrale dans les groupes abéliens localement compacts*, Publications I. H. E. S. 1959.
[5] W. Rudin, *Fourier analysis on groups*, New York — London 1962.
[6] V. L. Shin-Hann, *On multipliers of p-integrable functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 128 (1967), p. 321-329.

Reçu par la Rédaction le 25. 5. 1969