ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXIV (1971)

Fonctions analytiques et fonctions plurisousharmoniques dans les espaces vectoriels topologiques*

par PIERRE LELONG (Paris)

L'analyse complexe aborde aujourd'hui un champ nouveau: l'étude des fonctions analytiques et celle des fonctions plurisousharmoniques en dimension infinie, en particulier dans les espaces vectoriels topologiques. Le lecteur trouvera une bibliographie assez complète dans [2]. On notera que les travaux actuels n'ont été rendu possibles que grâce à la théorie des espaces fonctionnels, à laquelle l'école polonaise a contribué plus que toute autre. La notion de fonction analytique peut être définie de deux manières différentes, équivalentes. Une application $f: E \to F$, où E et F sont des espaces vectoriels topologiques sur C sera dite analytique en x_0 si elle est développable sous la forme $f = \sum P_m(x-x_0)$, où P_m est une application polynomiale homogène continue de degré m et si la série converge uniformément pour $x-x_0 \in V$, où V appartient au filtre $\mathscr{F}_E$ des voisinages de l'origine dans E. On rappelle qu'une application polynomiale homogène $P_m: E \to F$ est définie comme la restriction à la diagonale du produit E^m d'une application m-linéaire symétrique de E^m dans F, cf. [1]. Une autre définition consiste à supposer f continue et G-analytique c'est-à-dire analytique sur les droites complexes. En fait si E et F sont des espaces de Fréchet et si f est G-analytique dans un domaine $D \subset E$, la continuité de f en un point $x_0 \in D$ entraîne que f est analytique dans D.

En dimension $n = 1$, l'étude des fonctions sousharmoniques dans le plan complexe donne un instrument utile pour l'étude des fonctions analytiques. En dimension $n, 2 \leqslant n < \infty$, cette classe est remplacée par la classe des fonctions plurisousharmoniques que j'ai introduites en 1942 (cf. les livres [4a], [4b] et le mémoire [3]): cette classe permet d'exprimer la pseudo-convexité des domaines d'holomorphie dans C^n; celle-ci n'est autre que la convexité du domaine par rapport aux fonctions plurisousharmoniques. Il en est de même pour les propriétés caractéristiques des

---

* Conférence donnée le 23 octobre 1969 à la Section de Kraków de la Société Polonaise de Mathématique.

indicatrices de croissance des fonctions entières dans C^n comme l'ont montré des travaux récents, de Lelong, Kiselman, Martineau.

Je me placerai maintenant sur un espace vectoriel topologique complexe séparé complet E. Une fonction $x \in D \subset E \to f(x)$, $-\infty \leqslant f(x) < +\infty$, $f(x)$ réel, sera dite plurisousharmonique si : (a) elle est semi-continue supérieurement, (b) elle vérifie l'inégalité de la moyenne

$$f(x) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x + ye^{i\theta})\, d\theta$$

pour tout disque $\Delta_{x,y} \subset D : \Delta_{x,y} = [z \in E;\ z = x + uy,\ x \in E,\ y \in E,\ u \in C,\ |u| \leqslant 1]$. Si f est une fonction analytique $E \to C$, au sens indiqué plus haut, $\log|f|$ est plurisousharmonique. Désignons par $P(D)$ la classe des fonctions plurisousharmoniques dans un domaine $D \subset E$: si $\{f_n\} \in P(D)$ est une suite localement bornée supérieurement, $g = \sup. f_n$ a sa plus petite majorante semi-continue supérieurement $g^*(x) = \limsup_{x' \to 0} g(x + x')$ — appelée *régularisée supérieure* — qui est encore plurisousharmonique. De même $h = \lim.\sup. f_n$ (cf. [4a]). De même si $f(x, t) \in P(G)$, $t \in T$, est localement bornée supérieurement (indépendamment de $t \in T$), $F(x) = \int f(x, t)\, d\mu_t$, μ mesure positive, et $f(x, t)$ μ-sommable, est encore plurisousharmonique.

Notons encore le résultat suivant qui généralise à la dimension infinie un énoncé que j'avais établi en 1945 en dimension finie : si $f : D \subset E \to F$ est une application analytique, si V est une fonction plurisousharmonique définie sur un voisinage $f(D) + W$, $W \in \mathscr{F}_F$, de l'image de D dans F, alors $V \circ f$ est plurisousharmonique dans D.

Les fonctions plurisousharmoniques permettent d'introduire deux classes d'ensembles; ces classes sont celles des ensembles *polaires* et des ensembles *négligeables* dans un domaine $D \subset E$. En dimension n ces classes s'introduisent dans l'étude fine de problèmes sur les fonctions analytiques et plurisousharmoniques. De tels ensembles sont de mesure nulle dans l'espace R^{2n} sous-jacent. En dimension infinie et en l'absence de bonnes notions de „mesure", ils donnent des classes indispensables de „petits ensembles".

Une partie A d'un domaine $D \subset E$ est dite *polaire dans* D si A appartient aux infinis négatifs d'une fonction plurisousharmonique $V \not\equiv -\infty$ définie dans D; si de plus on a $V \leqslant 0$, A est dit *strictement polaire dans* D. Un ensemble polaire est d'intérieur vide.

Une réunion dénombrable $A_q \subset A'_q = [x \in D;\ V_q(x) = -\infty]$ de A_q strictement polaires dans D est de même nature ou bien D lui-même est réunion dénombrable des ensembles strictement polaires A'_q. Ce dernier cas n'a jamais lieu si l'espace E est de Baire.

Une partie η d'un domaine $D \subset E$ est dite *négligeable* dans D s'il existe une suite $V_q \in P(D)$ localement bornée supérieurement et si l'on a

$$\eta \subset [x \in D;\ g(x) = \sup V_q(x) < g^*(x)]$$

où g^* est la régularisée supérieure de $g(x)$.

L'extension de la théorie des fonctions plurisousharmoniques à la dimension infinie est importante parce qu'elle nous permet de formuler des problèmes sur les espaces de fonctions. Je veux en donner un exemple qu'on trouvera développé dans les exposés [2]. Soit $A(\Omega)$ l'algèbre des fonctions analytiques dans un domaine Ω d'un espace de dimension finie C^m. Soit η le sous-ensemble des fonctions de $A(\Omega)$ qui peuvent être prolongées analytiquement dans un domaine Ω' strictement plus grand que Ω. Une certaine intuition nous dit que η est de „mesure" nulle, ou comme le disait E. Borel en 1896 pour les séries de Taylor d'une variable et comme l'a démontré Steinhaus en 1929 (cf [6]) η est de „probabilité nulle" par rapport au choix des coefficients de Taylor en un point. Ces résultats de type probabiliste sont peu précis et s'étendent mal à l'algèbre $A(\Omega)$. Je veux donner ici trois énoncés récents dont le lecteur trouvera des démonstrations dans mes articles des Séminaires [2], Lecture Notes Springer N° 71 et N° 116.

Faisons de $A(\Omega)$ un espace de Fréchet sur C en construisant une suite exhaustive $K_q \nearrow \Omega$ de compacts: un compact donné $K \subset \Omega$ appartient aux K_q à partir d'un certain rang q_0. Les semi-normes $p_q(f) = \sup|f(z_1 \ldots z_n)|,\ z \in K_q$, déterminent sur $A(\Omega)$ une topologie d'espace de Fréchet. Dans C^m considérons les boules dont les rayons et les coordonnées du centre sont rationnels; ne retenons que la famille (dénombrable) B_p de ces boules ouvertes qui coupent le complémentaire de Ω; enfin soit $F_{p,m}$ l'ensemble des $f \in A(\Omega)$ qui sont analytiques dans $\Omega \cap B_p$ et vérifient $|f(z)| \leqslant m$ dans B_p, m entier. Alors on a $\eta = \bigcup\limits_{p,m} F_{p,m}$. De plus $F_{p,m} \subset A(\Omega)$ est fermé dans $A(\Omega)$. Si $\eta \neq A(\Omega)$ il en résulte que l'intérieur $\mathring{F}_{p,m}$ de $F_{p,m}$ est vide et η est maigre dans $A(\Omega)$. Mais les notions d'ensembles polaires et d'ensembles négligeables sur $A(\Omega)$, espace de dimension infinie, permettent de donner des résultats d'un type tout à fait nouveau qu'on peut résumer par les trois énoncés qui suivent:

THÉORÈME 1. *Si $\eta \neq A(\Omega)$, c'est-a-dire s'il existe une fonction non prolongeable, alors η est réunion dénombrable d'ensembles $F_{p,m}$ disqués, fermés, d'intérieurs vides qui sont des ensembles négligeables dans l'algèbre $A(\Omega)$.*

THÉORÈME 2. *A une partie bornée $B \subset A(\Omega)$, correspond une fonction plurisousharmonique $U_B(f)$ définie sur $A(\Omega)$, telle que $(\eta \cap B) \subset [f \in A(\Omega);\ U_B(f) = -\infty]$; ainsi $\eta \cap U_B$ est polaire dans $A(\Omega)$.*

THÉORÈME 3. *Soit M un sous-espace de $A(\Omega)$, muni d'une topologie T_M d'espace de Banach, plus fine que celle induite par $A(\Omega)$. Alors $\eta \cap M$ est soit M, soit un cône maigre et polaire dans M, dont la trace sur la boule unité de M est un ensemble strictement polaire.*

Ainsi l'étude de l'analyse complexe en dimension infinie donne des méthodes nouvelles pour étudier des problèmes de l'analyse classique.

Travaux cités

[1] N. Bourbaki, *Variétés différentiables et analytiques*, No. 1333, Fascicule de résultats. Hermann, Paris.

[2] P. Lelong, *Séminaire publié par Springer*, Lecture-Notes No. 75 (cf. exposé 17, p. 167-189), 1968, et No. 116 (exposé 1), 1969.

[3] — *Les fonctions plurisousharmoniques*, Annales E.N.S., t. 62, (1945), p. 301-338.

[4a] — *Fonctionnelles analytiques et fonctions entières*, Presses universitaires de Montréal, 1968.

[4b] — *Fonctions plurisousharmoniques et formes différentielles possitives*, Dunod, Paris.

[5] — *Petits ensembles dans les espaces vectoriels topologiques et les algèbres complexes et probabilité nulle*, Colloque international du C.N.R.S., *Probabilités sur les structures algébriques*, Clermont-Ferrand 1969.

[6] H. Steinhaus, *Ueber die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Konvergenzkreis einer Potenzreihe ihre natürliche Grenze ist*, Math. Zeitschrift, t. 31 (1930), p. 408-416.

Reçu par la Rédaction le 28. 11. 1969