$A_1^\omega = D_1(bv)$. Since (e_i, E_i) is a basis for E it follows that E is bv-invariant [3] and so $\mathscr{S}(cs, E) = S(A_2A_1^\omega) = S(A_2) = E$. In this situation one may have $DN(cs, E) \subsetneqq E$. For example let $E = c_0$ then the condition that D map $L(cs^\delta, c_0^\delta)$ into $L(cs^\delta, c_0^\delta)$ is not satisfied [to see this consider the natural isomorphism of $cs^\delta = bv$ into $c_0^\delta = l_1$ given by $Tx = (x_1, x_2-x_1, x_3-x_2, \ldots)$] and so by Corollary 4.2 $DN(cs, c_0) \subsetneqq c_0$.

References

[1] L. Crone, D. J. Fleming and P. Jessup, *Fundamental biorthogonal sequences and K-norms on φ*, to appear in Can J. M.

[2] A. Grothendieck, *Products tensoriels topologiques et espaces nucleaires*, Mem. Amer. Math. Soc., 16 (1955).

[3] R. J. McGivney and W. H. Ruckle *Multiplier algebras of biorthogonal systems*, Pacific J. Math. 29 (1969), pp. 375–387.

[4] W. H. Ruckle, *Representation and series summability of complete biorthogonal sequences*, Pacific J. Math., 34 (1970), pp. 509–526.

[5] — *Diagonals of operators*, Studia Math. 38 (1970), pp. 43–49.

[6] A. Tong, *Diagonal nuclear operators on lp spaces*, Trans. A.M.S., 143 (1969), pp. 235–247.

[7] — *Diagonal submatrices of matrix maps*, Pacific J. Math. (to appear).

CLARKSON COLLEGE OF TECHNOLOGY
POTSDAM, N. Y.

Received April 25, 1971 (333)

STUDIA MATHEMATICA, T. XLIII. (1972)

Helson sets and simultaneous extensions to Fourier transforms

by

COLIN C. GRAHAM* (Evanston, Ill.)

Abstract. A tensor algebra proof of this result is given: if K is an infinite Helson subset of an LCA group G, then there does not exist a continuous linear map $E: C(K) = A(K) \to A(G)$ such that $Ef(k) = f(k)$, for all $k \in K$.

1. A compact subset K of a LCA group G is a *Helson* set [5] if every $f \in C(K)$ may be extended to a Fourier transform $F \in A(G)$. We have this result:

THEOREM. *Let K be an infinite Helson subset of a LCA group G. Then there does not exist a continuous linear map E: $C(K) \to A(G)$ such that $Ef(k) = f(k)$ for all $k \in K$.*

More general results of this form have been proved: see [2], [8], [10], [11]. The fact that the existence of the map E of the theorem implies that $EC(K)$ is complemented in $A(G)$ implies (when G is the circle group and $A(G) \cong l^1$) that weak sequential convergence and norm convergence in $C(K)$ are equivalent (see [7], p. 431]). In this note we give a simple proof of the theorem, using tensor algebras. It is not too hard to see that a technique of Katznelson and McGehee [6] may be used, along with our proof, to show that if $K \subseteq \boldsymbol{R}$ is a convergent sequence, then there is no continuous linear map E: $A(K) \to A(\boldsymbol{R})$.

A Helson subset K of the circle group has the property that every $f \in C(K)$ has an extension to an absolutely convergent Taylor series (this was due to Wik; (see [5], p. 145])). The theorem shows immediately that a result [9] of Pełczyński for the disc algebra fails for absolutely convergent Taylor series.

We shall write $PM(G)$ for $A(G)^*$, and $M(X)$ for the set of regular Borel measures on a locally compact space X.

DEFINITION. If R and S are Banach spaces, $R \hat{\otimes} S$ will denote the closure of $R \times S$ in the projective norm (see [3], [13]). If $R = C(X)$ and $S = C(Y)$, we set $V(X \times Y) = R \hat{\otimes} S = C(X) \hat{\otimes} C(Y)$.

* Partially supported by the National Science Foundation (USA).

Lemma 1. *If K_j is a compact subset of a LCA group G_j, $j = 1, 2$, then*

$$A(K_1)\hat{\otimes} A(K_2) = A(K_1 \times K_2).$$

Lemma 2. ([4], 42.6). *If $R \subseteq C(X)$ and $S \subseteq C(Y)$ are regular commutative Banach algebras with maximal ideal spaces X, and Y respectively, then $R \hat{\otimes} S$ is a regular commutative Banach algebra with maximal ideal space $X \times Y$.*

Lemma 3. i) *If $E\colon A(K) \to A(G)$ is any continuous linear map, then*

$$E \hat{\otimes} E\colon A(K)\hat{\otimes} A(K) \to A(G\times G) = A(G)\hat{\otimes} A(G)$$

is a continuous linear map with $\|E \hat{\otimes} E\| \leqslant \|E\|^2$.

ii) *If K is a Helson set and $\mu, \nu \in M(G)$, then $(E\hat{\otimes} E)^*(\mu\times\nu) \in M(K\times K)$ and*

$$\|(E\hat{\otimes} E)^*(\mu\times\nu)\|_{M(K\times K)} \leqslant \|E^*\|^2 \|\mu\|_{M(G)} \|\nu\|_{M(G)}.$$

Proof. i) is exactly formula (2) of page 37 in [3]. ii) is a simple computation:

$$\begin{aligned}(E\hat{\otimes} E)^*(\mu\times\nu) &= (E^*)\hat{\otimes}(E^*)\,(\mu\otimes\nu) = (E^*\mu)\otimes(E^*\nu)\\ &= (E^*\mu)\times(E^*\nu) \in M(K\times K),\end{aligned}$$

and

$$\|E^*\mu\|_{M(K)} \leqslant \|E^*\|\,\|\mu\|_{PM} \leqslant \|E^*\|\,\|\mu\|_{M(G)}.$$

Now ii) follows.

(The first equality results from evaluation of both sides on elements $f\otimes g$.) ■

Corollary. *If $f\in V(K\times K) = C(K)\hat{\otimes} C(K)$, and K is Helson, and E is a continuous linear map, then*

$$\|E\hat{\otimes} Ef\|_\infty \leqslant \|E^*\|^2\|f\|_\infty,$$

where $\|\cdot\|_\infty$ denotes supremum norm.

Proof. If $(x, y)\in G\times G$, let $\mu = \delta_x$ and $\nu = \delta_y$ be unit point masses at x and y respectively and apply ii) of Lemma 3:

$$\begin{aligned}|E\hat{\otimes} Ef(x, y)| &= |\langle E\hat{\otimes} Ef, \mu\times\nu\rangle| = |\langle f, (E\hat{\otimes} E)^*(\mu\times\nu)\rangle|\\ &\leqslant \|f\|_\infty \|E^*\|^2 \|\mu\|_M \|\nu\|_M = \|E^*\|^2\|f\|_\infty. \ ■\end{aligned}$$

Proof of theorem. If $B \subseteq C(X)$ is any commutative Banach algebra with maximal ideal space X, we denote by $\tilde{B}$ the set of functions $f\in C(X)$ such that there exists $f_n \in B$ with $\sup\|f_n\|_B < \infty$ and $f_n \to f$ uniformly on X. We define, for $f\in\tilde{B}$,

$$\|f\|_{\tilde{B}} = \inf\{\{\sup\|f_n\|_B\colon f_n\to f \text{ uniformly}\}\}.$$

It is easy to see that $\tilde{B}$ is a commutative Banach algebra and B is a (possibly not closed) subalgebra of $\tilde{B}$.

We reduce to the case, K is metrizable.

Let $g\in C(K)$ be any function such that $g(K)$ is infinite, and $0\notin g(K)$. Let R be the uniformly closed self-adjoint subalgebra of $C(K)$ generated by g. Then, for some compact Hausdorff space L, $R \cong C(L)$, and there is a continuous map $\pi\colon K\to L$ such that $\hat{f}\circ\pi(k) = f(k)$, $f\in R\subseteq C(K)$, where $\hat{f}$ is the Gelfand transform of f evaluated at $\pi(k)\in L$. Note that L is metrizable and that π induces linear maps $(\pi\times\pi)^V\colon V(L\times L)\to V(K\times K)$ and $(\pi\times\pi)^\sim\colon V^\sim(L\times L)\to V^\sim(K\times K)$; note that $(\pi\times\pi)^\sim(f)(x, y) = f(\pi(x), \pi(y))$ so $\|(\pi\times\pi)^\sim(f)\|_\infty = \|f\|_\infty$. These maps are isometries (this follows from [12]).

Because L is metrizable there exist ([1], [14]) $f_n\in V(L\times L)$ such that $f_n\to f\in C(L\times L)$ uniformly $\|f_n\|_\infty \leqslant \frac{1}{3}$, $\|f_n\|_V \leqslant 1$, and $\|f^k\|_{V^\sim(L+L)} = 1$, $k = 1, 2, \ldots$

Since (Lemma 2) the maximal ideal space of $V(K\times K)$ is $K\times K$, we see that $(\pi\times\pi)^\sim f\notin V(K\times K)$. On the other hand

$$F_n = E\hat{\otimes} E(\pi\times\pi)^V f_n \in A(G\times G)$$

converge uniformly to F, say, by the Corollary to Lemma 3. It is obvious that $(E\times E)(\pi\times\pi)^V f_n(k_1, k_2) = f_n(k_1, k_2)$, $(k_1 k_2)\in K\times K$. So

$$(*)\qquad \lim_{n\to\infty} F_n(k_1, k_2) = f(k_1, k_2), \quad \text{uniformly for } (k_1, k_2)\in K\times K.$$

Since $f\notin V(K\times K) = A(K\times K)$ (Lemma 1), we see that $\lim_{n\to\infty} F_n \notin A(G\times G)$. But Katznelson and McGehee [6], (*) and $\sup\|F_n\|_{A(G\times G)} < \infty$ imply $F\in A(G\times G)$. This contradiction shows there do not exist maps E having the assumed properties.

References

[1] C. C. Graham, *On a Banach algebra of Varopoulos*, J. Func. Anal. 4 (1969), pp. 317–328.

[2] J. E. Gilbert, *On a strong form of spectral synthesis*, Ark. Mat. 7 (1969), pp. 571–575.

[3] A. Grothendieck, *Produits tensorielles topologiques*, Mem. Amer. Math. Soc., 16 (1955).

[4] E. Hewitt, D. Ross, *Abstract Harmonic Analysis*, I, New York 1963.

[5] J. P. Kahane, R. Salem, *Ensembles Parfaits et Séries Trigonométriques*, Paris 1963.

[6] Y. Katznelson, O. C. McGehee, *Measures and pseudomeasures on compact subsets of the line*, Math. Scand. 23 (1968), pp. 57–88.

[7] O. Köthe, *Topologische lineare Räume*, Berlin 1960.

[8] T. S. Lie et al., *Projecteurs et unités approchées pour des ideaux dans* $L^1(G)$, C. R. Acad. Sci. Paris, 272 (A), (1971), p. 473.

[9] A. Pełczyński, *On simultaneous extensions of continuous functions*, Studia Math. 24 (1964), pp. 285–304.

[10] H. Rosenthal, *Projections onto translation-invariant subspaces of* $L^p(G)$, Mem. Amer. Math. Soc. 63 (1966).

[11] B. M. Schreiber, *On the coset ring and strong Ditkin sets*, Pacific J. Math. 32 (1970), pp. 805–812.

[12] J. D. Stegeman, *A criterion for V-interpolations*, J. Func. Anal., 8 (1971), pp. 189–196.

[13] N. Th. Varopoulos, *Tensor algebras and Harmonic Analysis*, Acta. Math. 119 (1968), pp. 51–111.

[14] — *On a problem of A. Beurling*, J. Func. Anal. 2 (1968), pp. 24–30.

Received May 14, 1971 (338)

STUDIA MATHEMATICA, T. XLIII. (1972)

Оператор суперпозиции в модулярных функциональных пространствах

И. В. ШРАГИН (Тамбов)

Резюме. Исследуются условия вложения некоторых классов измеримых функций. Как следствия этих условий получены различные предложения о действии и ограниченности оператора суперпозиции в пространствах, являющихся широкими обобщениями пространств Орлича. Установлены также некоторые свойства таких пространств.

Эта статья содержит подробное изложение части результатов, анонсированных в [9] (мы не затрагиваем здесь вопросов, касающихся непрерывности оператора суперпозиции). Точнее говоря, здесь излагаются более общие предложения, чем в [9]. Дело в том, что под влиянием работы Л. Древновского и В. Орлича [4] мы ослабили ограничения на функцию, порождающую оператор суперпозиции. Влияние работы [4] сказалось и в том, что, в отличие от [9], предложения об операторе суперпозиции получаются здесь как следствия нескольких общих фактов, относящихся к вложению некоторых классов функций.

Работа состоит из пяти параграфов. В § 1 доказываются две вспомогательные леммы из теории меры и интеграла. В § 2 устанавливаются необходимые и достаточные условия вложения некоторых классов измеримых функций. В § 3 содержатся предложения о действии оператора суперпозиции в модулярных пространствах, порожденных так называемыми предгенфункциями и генфункциями. Кроме того, приводятся некоторые факты о вложении таких пространств. § 4 посвящен свойству ограниченности оператора суперпозиции. В § 5 устанавливаются необходимые и достаточные условия открытости и замкнутости класса Орлича в модулярном F-пространстве, порожденном генфункцией.

Эти довольно разнородные факты связаны между собой способом получения: почти все они выводятся из Леммы 2.2. Применяемый в этой работе метод исследования оператора суперпозиции (этот метод впервые использован в [2] и [3]) несколько отличен от методов других авторов (см. библиографию в [4]). Отметим еще, что здесь существенно используется неатомичность меры. Для случая атомической меры аналогичные результаты анонсированы в [11].