ACTA ARITHMETICA
XXIV (1973)

Über Heckesche Operatoren, Poincarésche Reihen und eine Siegelsche Konstruktion

von

HANS PETERSSON (Münster)

C. L. Siegel aus Anlaß der 75. Wiederkehr seines Geburtstages gewidmet

Einleitung. In den folgenden Darlegungen werden Operatoren Heckescher Art untersucht, die auf die ganzen Modulformen zusammengesetzter Stufe Q anwendbar sind und die sich von den von Hecke eingeführten Operatoren hinsichtlich einer gewissen Kongruenzbedingung unterscheiden. Während bei Hecke den Matrizen V über $\boldsymbol{Z}$ vom Grade 2 und von der Determinante n, die die Operatoren definieren, die Bedingung

$$V \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} \bmod Q$$

auferlegt wird, werden hier Operatoren betrachtet, deren Matrizen V (bei sonst gleichem Ansatz) der Bedingung $V \equiv K \bmod Q$ genügen, wo K eine geeignet zu bestimmende Matrix vom Grade 2 über $\boldsymbol{Z}$ der vorgegebenen Determinante $n > 0$ bedeutet ($\boldsymbol{Z}$ ist der Ring der ganzen Zahlen; für n und Q gilt stets $(n, Q) = 1$).

Es zeigt sich, daß die so entstehenden Operatoren $T_n(K, Q)$ unter bestimmten Voraussetzungen die Schar der ganzen Modulformen $\{\Gamma, -r, v\}$ homomorph abbilden; hier bezeichnet Γ eine (Kongruenz-) Untergruppe der Modulgruppe, die die homogene Hauptkongruenzgruppe $\Gamma[Q]$ der Stufe Q enthält, r eine natürliche Zahl und v einen Charakter auf Γ der gleichen Parität wie r, der auf der inhomogenen Hauptkongruenzgruppe $\Gamma(Q)$ zu 1 wird. Den Übergang von $\Gamma[Q]$ zu Γ vollzieht eine Spurbildung. Der Homomorphismus wird durch eine Vertauschungsrelation ermöglicht, die zwischen Heckeschen und Spur-Operatoren besteht. Die erwähnte Voraussetzung über Γ basagt, daß Γ bei demjenigen Automorphismus der Modulargruppe der Stufe Q in sich übergeht, welcher durch Transformation mit $K \bmod Q$ induziert wird.

Diese im Prinzip einfachen, terminologisch jedoch etwas mühsamen Zusammenhänge werden in § 1 entwickelt. In § 2 wird zunächst gezeigt, wie man K zu wählen hat, um die angedeutete Voraussetzung bei gewissen konkret gegebenen Kongruenzgruppen Γ zu realisieren. Unter diesen befindet sich die technisch interessante Untergruppe $\Gamma = \Gamma_*[q]$ von Primzahlstufe $Q = q > 2$, die in ${}_1\Gamma = \Gamma(1)$ den Index $q(q-1)$ aufweist; für sie wird, auch zur Bildung Poincaréscher Reihen, eine „rationale" Darstellung bestimmt.

Kennt man für teilerfremde natürliche Zahlen Q_1, Q_2 Kongruenzgruppen Γ_1, Γ_2 der Stufe Q_1 bzw. Q_2, die beide die obige Voraussetzung mit dem gleichen K erfüllen, so werden notwendige und hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß diese Voraussetzung für irgendeine Kongruenzgruppe der Stufe Q_1Q_2 zutrifft, die aus Γ_1 und Γ_2 über Kartesische Produkte der betreffenden Modulargruppen abgeleitet werden kann (vgl. [8](1)).

In den § 3, 4 der Abhandlung werden Poincarésche Reihen vom parabolischen Typus untersucht. Sie werden als ganze Spitzenformen einer allgemeinen automorphen Formenklasse $\{\Gamma, -r, v\}$ (r reell > 2, $|v| = 1$) eingeführt. Da Fragen nach den linearen Relationen zwischen solchen Reihen zu behandeln sind und die konkreten Kenntnisse über die betr. Formenscharen für eine direkte Entscheidung nicht entfernt ausreichen, wird eine höchst bemerkenswerte, indirekt wirkende Konstruktion von C. L. Siegel herangezogen. Sie führt, zunächst in der allgemeineren Situation (§ 3), zur Beantwortung gestellter Fragen zwar nicht für die gegebene Formenklasse $\{\Gamma, -r, v\}$, wohl aber für unendlich viele der Formenklassen $\{\Gamma, -r-2k, v\}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.

Am Schluß von § 3 und in § 4 handelt es sich wieder um die Operatorentheorie mit entsprechender Beschränkung für Γ, r, v; insbesondere muß Γ die angedeutete Voraussetzung erfüllen. Für 5 Typen von Kongruenzgruppen Γ der Stufe Q (die bei nur einem Typus eine ungerade Primzahl sein muß) wird die Wirkung von $T_n(K, Q)$ auf die Poincaréschen Reihen (3.1) der Klasse $\{\Gamma, -r, v\}$ durch explizite Formeln beschrieben. Danach kann die entscheidende Frage nach der möglichen Trivialität eines Operators $T_n(K, Q)$ mit Hilfe der Siegelschen Konstruktion angegriffen werden. Diese gestattet, alle Parameter des gesamten Apparats bis auf r festzuhalten, während r durch $r+2k$ $(k = 0, 1, \ldots)$ ersetzt wird. Mit $T_n^{(r)} = T_n$ ergibt sich die Existenz unendlich vieler ganzen Zahlen $k = 0, 1, \ldots$ derart daß $T_n^{(r+2k)}(K, Q)$ nicht trivial ist.

Über Entwicklungen, die mit dieser Theorie in Verbindung stehen, seien noch einige Bemerkungen angefügt.

Die expliziten Formeln, durch die die Wirkung der Operatoren $T_n(K, Q)$ auf die Poincaréschen Reihen (3.1) beschrieben wird, gelten auch nach Anbringung des Faktors $|m_1\tau + m_2|^{-s}$ $(r + \operatorname{Re} s > 2)$ am Reihenglied (3.1) und dann für alle ganzen r. Sie sind also für $r \geqslant 1$ mit den aus der Metrik entspringenden Formeln der Umsetzung der dual zu den Reihen (3.1) zu bildenden Fourier-Koeffizienten äquivalent.

(1) Zu [n] s.d. Literaturverzeichnis am Ende der Abhandl.

Um diese letzteren Formeln zu gewinnen, bedarf man einer Identität im Bereich der Skalarprodukte ganzer Modulformen vom Grade $-r$ zur Gruppe Γ, die (falls Γ die oben mehrfach erwähnte Voraussetzung erfüllt) etwa besagt, daß die Operatoren $T_n(K, Q)$ und $T_n(nK^{-1}, Q)$ zueinander adjungiert sind. Diese Relation wird am Ende von § 2 (ohne Beweis, da dieser bekannt ist) genau zitiert.

In der neueren Literatur existieren bemerkenswerte Entwicklungen zur Operatorentheorie (Rankin [10], A. O. L. Atkin and J. Lehner [1]) die, wie die vorliegende Untersuchung, in gewissen, jedoch andern, Hinsichten von den Heckeschen Tendenzen abweichen. Im Hinblick auf die eingehende Behandlung der Operatorentheorie der Modulformen z. B. der Thetagruppe in [10] werden in der vorliegenden Untersuchung außer der Modulgruppe nur Kongruenzgruppen betrachtet, die nicht numerisch spezialisiert sind.

Äußerungen von Hecke über die Operatorentheorie der ersten Stufe in [2], S. 12, die als verbale Umschreibung seines Ansatzes aufgefaßt werden können, legen den Versuch nahe, Operatoren dieser oder ähnlicher Art wie folgt zu konstruieren: Man transformiere eine Modulform zur vollen Modulgruppe ${}_1\Gamma$ vermöge einer Matrix über $\boldsymbol{Z}$ der Determinante n; von der so zu erhaltenden Modulform der Stufe n bilde man die Spur bezüglich der ${}_1\Gamma$ (vgl. [7] eingangs). Dieser Ansatz wird in einem Anhang nach § 4 kurz diskutiert; damit schließt die vorliegende Abhandlung.

§ 1. Bezeichnungen, Definitionen; die Vertauschungsformel. $\boldsymbol{N}, \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}$ bedeuten die Mengen bzw. der natürlichen, ganzen, reellen, komplexen Zahlen, $\hat{\boldsymbol{C}}$ bedeutet die Riemannsche Zahlenkugel. Ist $\mathfrak{R}$ irgendein (assoziativer) Ring, so sei $\mathfrak{R}^{(m,n)}$ die Menge der Matrizen über $\mathfrak{R}$ mit m Zeilen und n Spalten. Jede der Gleichungen $f: = g$ und $g = :f$ bedeutet, daß f durch g definiert wird. Wir definieren die (rationale) Modulgruppe durch

$$ {}_1\Gamma: = \mathrm{SL}(2, \boldsymbol{Z}). $$

Allgemeine Bezeichnungen für Matrizen aus $\mathfrak{R}^{(2,2)}$ sind

$$ (1.1) \quad S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_0 & a_3 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} m_0 & m_3 \\ m_1 & m_2 \end{pmatrix}; $$

Die zweite Zeile von S wird durch $\boldsymbol{S} = \{c, d\}$ ausgedrückt. Spezielle Matrizen aus ${}_1\Gamma$ (Modulmatrizen) sind

$$ (1.2) \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad -I = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. $$

Für ein $Q \in \boldsymbol{N}$ werden folgende Untergruppen von endlichem Index in ${}_1\Gamma$ eingeführt:

$$\Gamma(Q) := \{S \in {}_1\Gamma \mid S \equiv I \bmod Q\}, \quad \Gamma[Q] := \{S \in {}_1\Gamma \mid S \equiv \pm I \bmod Q\},$$

$$\Gamma_0[Q] := \{S \in {}_1\Gamma \mid c \equiv 0 \bmod Q\}, \quad \Gamma^0[Q] := \{S \in {}_1\Gamma \mid b \equiv 0 \bmod Q\},$$

(1.3)

$$\Gamma_0^0[Q] := \Gamma_0[Q] \cap \Gamma^0[Q], \quad \Gamma_U[Q] := \{S \in {}_1\Gamma \mid \exists k \in \boldsymbol{Z} \wedge S \equiv \pm U^k (Q)\}.$$

Mit Ausnahme der $\Gamma(Q)$ für $Q > 2$ enthalten alle diese Gruppen die Matrix $-I$; für $Q = 1$ fallen alle diese Gruppen mit ${}_1\Gamma$ zusammen. Ferner gilt $\Gamma_U[Q] \subset \Gamma_0[Q]$ für alle Q, $\Gamma_U[Q] = \Gamma_0[Q]$ für $Q = 2, 3, 4$ und $\Gamma^0[Q] = T^{-1}\Gamma_0[Q]T$ für alle Q.

Es bezeichne P_Q den Ring der rationalen, für Q ganzen Zahlen, ϱ_Q den Restklassen-Homomorphismus von P_Q in $\boldsymbol{Z}/Q\boldsymbol{Z}$, $\Re(Q) = \Re_Q$ den entstehenden Restklassenring; P_1 ist der Körper der rationalen Zahlen. Für die beiden Modulargruppen

(1.4) $$\mathfrak{M}(Q) := {}_1\Gamma/\Gamma(Q), \qquad \mathfrak{M}[Q] := {}_1\Gamma/\Gamma[Q]$$

der Stufe Q gilt

(1.5) $$\mathfrak{M}(Q) \cong \mathrm{SL}(2, \Re(Q)); \qquad \mathfrak{M}[Q] \cong \mathrm{SL}(2, \Re(Q))/\langle -I \rangle;$$

spitze Klammern deuten Erzeugung an. Wir definieren

(1.6) $$G_Q := \{W \in \mathrm{P}_Q^{(2,2)} \mid |W| \neq 0, \ |W| \equiv 1 \bmod Q\}$$

und fassen G_Q als multiplikative Matrizengruppe auf. Zu jedem W aus $\mathrm{P}_Q^{(2,2)}$ mit $|W| \equiv 1 \bmod Q$ gibt es X aus ${}_1\Gamma$ mit $X \equiv W \bmod Q$. Daraus folgt, daß $X\Gamma(Q)$ durch die W enthaltende Restklasse $\bmod Q$ eindeutig bestimmt ist. Wir schreiben $[W]_Q$ für jedes solche X, das in einem Ausdruck auftritt, der bei gegebenem W von X nicht abhängt, also z.B.

(1.7) $$[W]_Q\Gamma(Q) := X\Gamma(Q) \qquad (W \in \mathrm{P}_Q^{(2,2)}, \ |W| \equiv 1 \bmod Q)$$

und bemerken, daß hierdurch ein Homomorphismus gemäß

(1.8) $$\Phi_Q\colon G_Q \to \mathfrak{M}(Q), \qquad \Phi_Q(W) = [W]_Q\Gamma(Q) \qquad (W \in G_Q)$$

erklärt wird.

Die Heckeschen Operatoren der Transformationsordnung $n \in \boldsymbol{N}$ $((n, Q) = 1)$ beruhen auf den Eigenschaften des Systems

(1.9) $$\mathfrak{O}_n := \{S \in \boldsymbol{Z}^{(2,2)} \mid |S| = n\} \qquad (\mathfrak{O}_1 = {}_1\Gamma).$$

Da zu jedem $K \in \mathfrak{O}_n$ in jeder linksseitigen Klasse ${}_1\Gamma R \subset \mathfrak{O}_n$ von $\mathfrak{O}_n$ nach ${}_1\Gamma$ eine Matrix $\equiv K \bmod Q$ existiert, kann für die $\sigma_1(n)$ linksseitigen Klassen, in die $\mathfrak{O}_n$ nach ${}_1\Gamma$ disjunkt zerfällt, ein Vertretersystem $\mathfrak{B}_n(K, Q)$ bestimmt werden, dessen Matrizen $\equiv K \bmod Q$ sind; dabei hat man $\sigma_\alpha(n) := \sum_{d \mid n,\, d>0} d^\alpha$ $(\alpha \in \boldsymbol{R})$ zu setzen.

Es sei Γ eine Untergruppe von endlichem Index der ${}_1\Gamma$, für die $-I \in \Gamma$ zutrifft. Wenn $r \in \boldsymbol{N}$ und v einen Charakter des Betrages 1 auf Γ angibt, der die gleiche Parität hat wie r, d.h. bei geradem r gerade, bei ungeradem r ungerade ist, betrachten wir die lineare Schar $\{\Gamma, -r, v\}^0$ der ganzen Modulformen zur Gruppe Γ, vom Gewicht r (d.h. von der Dimension $-r$) und zum Charakter (Multiplikatorsystem) v. — An die einschlägigen Definitionen und Grundeigenschaften sei kurz erinnert.

Es bezeichne $\mathfrak{H}$ die obere Halbebene der komplexen Variablen $\tau = x + iy$ $(x := \operatorname{Re}\tau)$. Ist $S \in \boldsymbol{R}^{(2,2)}$, $|S| > 0$, $f(\tau)$ in $\mathfrak{H}$ erklärt, $r \in \boldsymbol{Z}$ fest gegeben, so setze man

(1.10) $$f|S = f(\tau)|S = f(\tau)\underset{r}{|}S := f(S\tau)(c\tau + d)^{-r} \qquad (|S| > 0),$$

wo (vgl. (1.1)) $S\tau = S(\tau) := \dfrac{a\tau + b}{c\tau + d}$ für $\tau \in \hat{C}$. Wenn $S_1, S_2 \in \boldsymbol{R}^{(2,2)}$, $|S_1| > 0$, $|S_2| > 0$, so gilt $f|S_1|S_2 = f|S_1S_2$.

Im folgenden werden Bezeichnungen, die für lineare Abbildungen $\tau \to S\tau$ oder für Mengen von solchen erklärt sind, auf die zugehörigen Matrizen bzw. deren Mengen übertragen. Die parabolischen Fixpunkte einer Gruppe Γ der obigen Art heißen Spitzen. Alle diese Γ besitzen die gleiche Spitzenmenge $\hat{\mathrm{P}}_1 := \mathrm{P}_1 \cup \{\infty\}$; wir schreiben $\mathfrak{H}' := \mathfrak{H} \cup \hat{\mathrm{P}}_1$. Zu jeder Spitze ζ von Γ gibt es eine Matrix $A \in {}_1\Gamma$, für die $\zeta = A^{-1}\infty$ gilt, und eine natürliche Zahl

$$N := \min\{k \in \boldsymbol{N} \mid A^{-1}U^kA \in \Gamma\};$$

sie heißt die Breite, $A^{-1}U^NA$ die Grundmatrix der Spitze ζ in Γ; $\exp\dfrac{2\pi i}{N}A\tau$ stellt einen ortsuniformisierenden Parameter des Punktes ζ bezüglich Γ dar.

Eine in $\mathfrak{H}$ holomorphe Funktion $f(\tau)$ gehört zur Schar $\{\Gamma, -r, v\}^0$, wenn sie (mit diesem r) die sämtlichen Relationen

(1.11) $$f(\tau)|L = v(L)f(\tau) \qquad (\text{für alle } L \in \Gamma)$$

erfüllt und bezüglich der sämtlichen Spitzen ζ von Γ die folgende Eigenschaft hat: Mit der obigen Bedeutung von A und N gestattet $f(\tau)$ eine Darstellung der Gestalt

(1.12) $$f(\tau) = f_A(\tau)|A, \qquad f_A(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{n+\varkappa}(A, f)\exp\frac{2\pi i}{N}(n + \varkappa)\tau,$$

wo $b_{n+\varkappa}(A, f)$ von τ nicht abhängt und $\varkappa$ durch

$$v(A^{-1}U^NA) = e^{2\pi i\varkappa} \qquad (0 \leqslant \varkappa < 1)$$

erklärt ist (vgl. hierzu [7], § 1 und [9], Satz 1). Man nennt ein solches f auch eine ganze Modulform (der Klasse) $\{\Gamma, -r, v\}$.

Die Entwicklung (1.12) ermöglicht eine invariante Definition der Ordnung von $f(\tau)$ bezüglich Γ in ζ und in den Spitzen der Kongruenzklasse von $\zeta \bmod \Gamma$ als minimalen Wert von $n+\varkappa$ derart daß $b_{n+\varkappa}(A,f) \neq 0$ (wofern $f \not\equiv 0$). Den Kongruenzklassen $\bmod \Gamma$ entspricht die Kongruenz $\mathfrak{M}_2 \equiv \mathfrak{M}_1 \bmod \Gamma$ zweier Mengen $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$, die besagt, daß $\mathfrak{M}_2 = L\mathfrak{M}_1$ für ein L aus Γ zutrifft. — Im folgenden bezeichnen wir die lineare Schar der ganzen Spitzenformen $\{\Gamma, -r, v\}$, d.h. der ganzen Formen $\{\Gamma, -r, v\}$, die in allen Spitzen positive Ordnungen haben (zuzüglich der Nullform), mit $\{\Gamma, -r, v\}^+$.

Zur Definition der Heckeschen Operatoren wird über Γ vorausgesetzt, daß Γ Kongruenzgruppe sei, was $\Gamma[Q_1] \subset \Gamma \subset {}_1\Gamma$ für ein $Q_1 \in \boldsymbol{N}$ bedeute. Über v wird vorausgesetzt, daß v ein Kongruenzcharakter sei, was bedeutet, daß es ein Multiplum Q von Q_1 derart gebe, daß v auf $\Gamma(Q)$ zu 1 wird. Für $f \in \{\Gamma, -r, v\}^0$ gilt dann $f \in \{\Gamma[Q], -r, v_1\}^0$, wo $v_1(L) = \varepsilon^r$, wenn $L \equiv \varepsilon I \bmod Q$ $(\varepsilon^2 = 1)$.

Es sei $f \in \{\Gamma[Q], -r, v\}^0$; wir verbinden die Definition des Heckeschen Operators $T_n(K,Q)$ mit der Formulierung seiner ersten wichtigen Eigenschaft: Für $n \in \boldsymbol{N}$, $(n,Q) = 1$ gilt

$$(1.13)\qquad f\,|\,T_n(K,Q) := n^{r-1} \sum_{V \in \mathfrak{B}_n(K,Q)} f\,|\,V \in \{\Gamma[Q], -r, v_1\}^0.$$

Der Beweis der Invarianzeigenschaft (1.11) (für $\Gamma = \Gamma[Q]$) ist bekannt. Zum Beweis dafür, daß (1.13) eine ganze Modulform darstellt, verwendet man neben

$$S^{-1}\Gamma[g]S \supset \Gamma[gn] \qquad (S \in \mathfrak{O}_n,\ g \in \boldsymbol{N})$$

die einfachsten Sätze über automorphe Formen ganzer Dimension.

Für den durch (1.13) erklärten Operator $T_n(K,Q)$ bestehen zwei einfache Rechenregeln, die wie bei Hecke so formuliert werden sollen, daß Matrizen aus $\boldsymbol{R}^{(2,2)}$ gemäß (1.10) als Operatoren erscheinen, die, ihrer Wirkung auf Modulformen entsprechend, linear-distributiv zu verknüpfen sind. Für $W \in {}_1\Gamma$ gilt (vgl. (1.7))

$$(1.14)\qquad \begin{aligned} WT_n(K,Q) &= T_n(WK,Q), \\ T_n(K,Q)W &= T_n(KW,Q) = [KWK^{-1}]_Q T_n(K,Q). \end{aligned}$$

Die eingangs erwähnte Vertauschungsformel beruht einerseits darauf, daß die gegebene Matrix $K \in \mathfrak{O}_n$ auf der Modulargruppe (1.4) $\mathfrak{M}(Q)$ einen Homomorphismus $h_K = h_{K,Q}$ gemäß

$$(1.15)\qquad h_K(W\Gamma(Q)) = [KWK^{-1}]_Q\Gamma(Q) \qquad (W\Gamma(Q) \in \mathfrak{M}(Q))$$

induziert. Um andrerseits die Wirkung des Spur-Operators zu beschreiben, nehme man an, es seien Γ, Δ Untergruppen von endlichem Index in ${}_1\Gamma$ mit $-I \in \Delta \subset \Gamma$; es sei r eine ganze Zahl, v ein Charakter des Betrages 1 auf Γ von der gleichen Parität wie r. Wenn nun

$$\Gamma = \bigcup_{\nu=1}^{\mu} \Delta R_\nu, \qquad \mu = [\Gamma : \Delta], \qquad \varphi \in \{\Delta, -r, v\}^0$$

zutrifft, so stellt

$$(1.16)\qquad \mathrm{Sp}_{\Delta/\Gamma}\,\varphi := \sum_{\nu=1}^{\mu} v^{-1}(R_\nu)\,\varphi\,|\,R_\nu$$

eine ganze Modulform $\{\Gamma, -r, v\}$ dar. Diese hat in allen Spitzen positive Ordnungen oder sie verschwindet identisch, wenn φ eine ganze Spitzenform ist. (Hier genügt es, positive r zu betrachten. — Es ist wesentlich, daß v nicht nur auf Δ, sondern auf Γ definiert ist. Gibt es verschiedene solche v, die auf Δ übereinstimmen, so ergeben sich aus ihnen i.a. verschiedene Spuren.)

Jetzt sei $f(\tau) \in \{\Gamma[Q], -r, v_1\}^0$, $(n,Q) = 1$. Da $f\,|\,T_n(K,Q)$ in $\{\Gamma[Q], -r, v_1\}^0$ liegt, kann hiervon die Spur bezüglich der Obergruppe Γ von $\Gamma[Q]$ und des Kongruenzcharakters v gebildet werden. Mit $\Gamma[Q]$ anstelle von Δ entsteht nach (1.13, 14, 16)

$$(1.17)\qquad \mathrm{Sp}_{\Gamma[Q]/\Gamma}\big(f\,|\,T_n(K,Q)\big) = \sum_{j=1}^{\mu} v^{-1}(R_j)\,f\,|\,X_jT_n(K,Q),$$

wo $X_j \in {}_1\Gamma$ und $X_j \equiv KR_jK^{-1} \bmod Q$.

Im Bereich der Kongruenzgruppen der Stufe Q entspricht der Gruppe Γ die Untergruppe $\mathfrak{G} := \Gamma/\Gamma(Q)$ der $\mathfrak{M}(Q)$ bijektiv; dieser Zusammenhang definiert auch die Kongruenzgruppe $\psi_K(\Gamma) \supset \Gamma[Q]$ nach (1.15) durch

$$(1.18)\qquad \psi_K(\Gamma)/\Gamma(Q) = h_K(\mathfrak{G}).$$

Ihre Zerlegung in Nebenklassen $\bmod \Gamma(Q)$ nimmt wegen

$$\Gamma = \bigcup_{j=1}^{\mu}\big(R_j\Gamma(Q) \cup (-R_j)\Gamma(Q)\big) \quad \text{und} \quad h_K\big(R_j\Gamma(Q)\big) = X_j\Gamma(Q)$$

die Gestalt an (vgl. (1.15)):

$$(1.19)\qquad \psi_K(\Gamma) = \bigcup_{j=1}^{\mu}\big(X_j\Gamma(Q) \cup (-X_j)\Gamma(Q)\big) = \bigcup_{j=1}^{\mu} X_j\Gamma[Q].$$

Überdies gewinnt man einen Kongruenzcharakter v_K^* der Parität von r auf $\psi_K(\Gamma)$ durch die folgende Vorschrift: Auf der Nebenklasse $[KBK^{-1}]_Q\Gamma(Q)$ von $\psi_K(\Gamma)$ (für die also $B \in \Gamma$) habe v_K^* den Wert $v(B)$.

Nach (1.17, 19) und den Definitionen (1.18) von $\psi_K(\Gamma)$ und von v_K^* ergibt sich die angekündigte Vertauschungsrelation in der Gestalt

Satz 1. *Es seien r, Q, n natürliche Zahlen mit $(n,Q) = 1$, es sei Γ eine Untergruppe von ${}_1\Gamma$ mit $\Gamma \supset \Gamma[Q]$, v ein Charakter des Betrages 1 und der Parität von r auf Γ, der auf $\Gamma(Q)$ zu 1 wird, $K \in \mathfrak{O}_n$, $f(\tau) \in \{\Gamma[Q], -r, v_1\}^0$.*

Dann gilt mit der soeben erklärten Bedeutung von $\psi_K(\Gamma)$ *und* v_K^*:

$$\mathrm{Sp}_{\Gamma[Q]/\Gamma}(f\,|\,T_n(K,Q)) = (\mathrm{Sp}_{\Gamma[Q]/\psi_K(\Gamma)}f)\,|\,T_n(K,Q).$$

Auf der linken Seite dieser Relation ist die Spur mit dem Charakter v, *auf der rechten Seite mit dem Charakter* v_K^* *zu bilden.*

§ 2. Ergänzungen, Beispiele. Die Formel von Satz 1 hat, wenn K so bestimmt werden kann, daß

$$\text{(2.1)} \qquad \psi_K(\Gamma) = \Gamma, \qquad v_K^* = v$$

zutrifft, die Konsequenz, daß die beiden Scharen $\{\Gamma, -r, v\}^{0,+}$ durch $T_n(K,Q)$ homomorph in sich abgebildet werden. Die Beispiele betreffen sämtlich Fälle mit $\psi_K(\Gamma) = \Gamma$. Dann bildet $T_n(K,Q)$ die Scharen $\{\Gamma, -r, v_K^*\}^{0,+}$ bzw. in die Scharen $\{\Gamma, -r, v\}^{0,+}$ ab. Ersetzt man hier v_K^* durch v, so erfolgt die Abbildung bzw. in $\{\Gamma, -r, v_{*K}\}^{0,+}$, wo

$$\text{(2.2)} \qquad v_{*K} := v_{nK^{-1}}^*, \qquad \text{so daß} \qquad (v_K^*)_{*K} = (v_{*K})_K^* = v.$$

Als erste Ergänzungen sollen zwei Formelpaare notiert werden, die das Verhalten von $\psi_K(\Gamma)$ und v_K^* bei gewissen Abänderungen von K betreffen. Hierzu wird die folgende (triviale) Transformation von v benötigt: Ist Γ eine $-I$ enthaltende Untergruppe von endlichem Index in ${}_1\Gamma$, v ein Charakter auf Γ, $W \in {}_1\Gamma$, so wird durch

$$v'_W(W^{-1}LW) = v(L) \qquad (L \in \Gamma)$$

ein Charakter v'_W auf $W^{-1}\Gamma W$ definiert. Damit gilt unter den Voraussetzungen von Satz 1 und für $W \in {}_1\Gamma$:

$$\text{(2.3)} \qquad \begin{aligned} &\psi_{KW}(W^{-1}\Gamma W) = \psi_K(\Gamma), \qquad (v'_W)_{KW}^* = v_K^*,\\ &\psi_{WK}(\Gamma) = W\psi_K(\Gamma)W^{-1}, \qquad v_{WK}^* = (v_K^*)'_{W^{-1}}. \end{aligned}$$

Die Relationen (2.1) bestehen zunächst, wie nach (1.15, 18) unmittelbar ersichtlich, für

$$\Gamma = \Gamma^0[Q], \Gamma_0[Q], \Gamma_0^0[Q]; \qquad v(L) = \chi(\delta) \qquad (L \in \Gamma, \text{ vgl. } (1.1))$$

wenn K Diagonalgestalt $\begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$ aufweist; χ bedeutet einen Restcharakter mod$Q$ von der gleichen Parität wie r.

Im Falle $\Gamma = \Gamma_U[Q]$ wird bei festem $g \in \boldsymbol{Z}$ durch

$$\text{(2.4)} \qquad v(L) = \varepsilon^r \exp\frac{2\pi i}{Q}gj, \qquad \text{wenn} \qquad L \equiv \varepsilon U^j \bmod Q,\ j \in \boldsymbol{Z},\ \varepsilon^2 = 1$$

ein Charakter der Parität von r definiert ($Q > 2$). Hat K die obige Diagonalgestalt, so gilt $\psi_K(\Gamma_U[Q]) = \Gamma_U[Q]$. Dagegen wird

$$\text{(2.5)} \qquad v_K^*(L) = \varepsilon^r \exp\frac{2\pi i}{Q}gk_1'k_2 j \qquad (L \in \Gamma_U[Q])$$

wenn $k_1' \in \boldsymbol{Z}$ gemäß $k_1'k_1 \equiv 1 \bmod Q$ bestimmt wird; zur Abbildung der Formenscharen vgl. die Bemerkung bei (2.2).

Für eine Primzahl $q > 2$ bezeichne $\Gamma_*[q]$ die Kongruenzgruppe der Stufe q, welche dem Prototyp einer Untergruppe der Ordnung $\frac{1}{2}(q+1)$ der $\mathfrak{M}[q]$ entspricht. Von dieser Gruppe, die mit Hilfe einer quadratischen Erweiterung von $\mathfrak{R}_q$ erklärt ist, wird zunächst eine „rationale" Beschreibung gegeben.

Im Primkörper $\mathfrak{R}_q$ sei u ein Element, das kein Quadrat ist. Wir bilden den Erweiterungskörper $\Lambda_q := \mathfrak{R}_q(\lambda)$ $(\lambda^2 = u)$; er besteht aus den q^2 Elementen $\xi = x_2 + x_1\lambda$ $(x_1, x_2 \in \mathfrak{R}_q)$ und jedes quadratische Polynom über $\mathfrak{R}_q$ ist in ihm reduzibel. Es sei η eine Erzeugende seiner multiplikativen Gruppe $\Lambda_q^\times$. Die Elemente von $\Lambda_q^\times$, deren Ordnungen in $q+1$ aufgehen, haben die Gestalt $\eta^{k(q-1)}$ $(k \in \boldsymbol{Z},\ k \bmod q+1)$. Setzt man in der obigen Schreibweise

$$\bar{\xi} := x_2 - x_1\lambda, \qquad \mathrm{N}\xi = \xi\bar{\xi} = x_2^2 - ux_1^2 \qquad (\mathrm{N} = \text{Norm}),$$

so gilt $\bar{\xi} = \xi^q$; $\operatorname{ord}\xi\,|\,(q+1)$ bedeutet also $\mathrm{N}\xi = 1$.

Man nenne α, β assoziiert, wenn $\beta = \alpha\vartheta$ mit $\mathrm{N}\vartheta = 1$ (d.h. $\mathrm{N}\beta = \mathrm{N}\alpha$) zutrifft. Unter den Klassen dieses Äquivalenzbegriffs ist $\{0\}$ eine Klasse für sich. Alle anderen Klassen bestehen aus genau $q+1$ Elementen, woraus hervorgeht, daß jedes Element aus $\mathfrak{R}_q$ als Norm auftritt.

Mit R: $\begin{pmatrix} -\lambda^{-1} & 1 \\ \lambda^{-1} & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \Lambda_q)$, $S \in \mathfrak{R}_q^{(2,2)}$ gilt

$$\text{(2.6)} \qquad RSR^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\beta} \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \qquad \text{wo} \qquad \begin{Bmatrix} 2\alpha = a + d + (u^{-1}b + c)\lambda \\ 2\beta = -a + d + (u^{-1}b - c)\lambda \end{Bmatrix}.$$

Wir schreiben

$$\mathrm{SE}(2, \Lambda_q) := \left\{\begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\beta} \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \in \Lambda_q^{(2,2)} \,\middle|\, \alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta} = 1\right\}$$

und betrachten die Untergruppe $\mathfrak{D}_q$ der Diagonalmatrizen von $\mathrm{SE}(2, \Lambda_q)$. Nach (26) bedeutet $S \in \mathfrak{G} = \mathfrak{J}_q := R^{-1}\mathfrak{D}_q R$, daß $S = \begin{pmatrix} d & uc \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{R}_q^{(2,2)}$. Dies liefert die rationale Definition von $\Gamma_*[q]$ als Gruppe der Modulmatrizen L, die der Bedingung genügen

$$\text{(2.7)} \qquad \varrho_q(L) := \begin{pmatrix} x_2 & ux_1 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathfrak{R}_q).$$

Die Matrizen $X = \begin{pmatrix} x_2 & ux_1 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathfrak{R}_q)$ bilden eine zu $\Lambda_q^\times$ gemäß $X \to \xi = x_2 + x_1\lambda$ isomorphe Gruppe. Es sei $n \in \boldsymbol{N}$, $(n, q) = 1$; wie dargelegt existiert eine Matrix

$$H = \begin{pmatrix} h_2 & uh_1 \\ h_1 & h_2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{R}_q^{(2,2)} \qquad \text{mit} \qquad \det H = h := \varrho_q(n),$$

und nun werde $K \in \mathfrak{O}_n$ derart bestimmt, daß $\varrho_q(K) = H$ zutrifft (hierzu s.w.u.). Dann folgt unmittelbar

$$\varrho_q([KBK^{-1}]_q\Gamma(q)) = H\varrho_q(B)H^{-1} = \varrho_q(B), \tag{2.8}$$

wenn $B \in \Gamma_*[q]$, und damit (2.1) für $\Gamma = \Gamma_*[q]$ und jedes v; h_K induziert hier den identischen Automorphismus auf $\mathfrak{G} = \mathfrak{J}_q$.

Oben wurde der folgende leicht zu beweisende Hilfssatz angewendet: Für $n, Q \in N$ mit $(n, Q) = 1$ sei $S \in \boldsymbol{Z}^{(2,2)}$, $|S| \equiv n \bmod Q$. Dann gibt es ein $W \in \mathfrak{O}_n$ mit $W \equiv S \bmod Q$. —

Einen Charakter v der Parität von r auf $\Gamma_*[q]$ erhält man aufgrund der obigen Beziehung zwischen

$$\xi = x_2 + x_1\lambda \ (\xi\bar{\xi} = 1) \quad \text{und} \quad X = \begin{pmatrix} x_2 & ux_1 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix} = \varrho_q(L) \in \mathfrak{J}_q$$

bei gegebenem $g \in \boldsymbol{Z}$ mit $g \equiv r \bmod 2$ in der Gestalt

$$v(L) = \exp\frac{2\pi i}{q+1}kg, \quad \text{wenn} \quad \xi = \eta^{k(q-1)}.$$

Aus dieser Beziehung ergibt sich ferner, daß $\Gamma_*[q]$ durch Transformation mit $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ auf sich abgebildet wird. Die Anwendung der entsprechenden Transformation auf ein $X \in \mathfrak{J}_q$ bedeutet, daß ξ in $\bar{\xi}$ übergeht.

Eine weiterreichende Möglichkeit, Kongruenzgruppen der Stufe Q zu bilden, die bei geeigneten $K \in \mathfrak{O}_n$ $((n, Q) = 1)$ durch ψ_K in sich übergeführt werden, ergibt sich durch eine Zerlegung von Q in zwei Faktoren aus entsprechenden Invarianzen geeigneter Kongruenzgruppen zu diesen Faktoren als Stufen. Hierüber soll jetzt referiert werden.

Es sei $Q' \in \boldsymbol{Z}$, $Q' > 1$, $(n, Q'Q) = 1$, Γ eine Kongruenzgruppe der Stufe Q und $K \in \mathfrak{O}_n$. ψ_K habe die oben erklärte Bedeutung, ψ_K^* die analoge bezüglich $Q^* := Q'Q$ anstelle von Q. Man erhält zunächst

$$\psi_K^*(\Gamma[Q]) = \Gamma[Q], \qquad \psi_K^*(\Gamma) = \psi_K(\Gamma). \tag{2.9}$$

Die erste Formel ist ein Spezialfall der zweiten, wird aber zum Beweis der zweiten benutzt.

Liegen zwei Kongruenzgruppen Γ_1, Γ_2 der Stufen Q_1 bzw. Q_2 vor, so setzen wir $Q^* := \mathrm{kgV}[Q_1, Q_2]$ und verstehen unter $\psi_K^{(j)}$ bzw. ψ_K^* die durch (1.15, 18) erklärten Abbildungen im Bereich der Kongruenzgruppen der Stufen Q_j bzw. Q^* $(j = 1, 2)$, wobei $K \in \mathfrak{O}_n$ fest gegeben ist und $(n, Q^*) = 1$ gilt. Man erhält dann sehr einfach für $\Delta := \Gamma_1 \cap \Gamma_2$:

$$\psi_K^*(\Delta) = \Delta, \quad \text{falls} \quad \psi_K^{(j)}(\Gamma_j) = \Gamma_j \ (j = 1, 2). \tag{2.10}$$

Ist weiter $(Q_1, Q_2) = 1$, so kann die genannte Aufgabe nach dem in [8] entwickelten Verfahren zur Konstruktion von Kongruenzgruppen Γ der Stufe $Q^* = Q_1Q_2$ behandelt werden. Dies soll in der Terminologie von [8], § 6 geschehen. Danach hat man zu setzen

$$\mathfrak{G}_j := \mathfrak{M}(Q_j), \qquad \mathfrak{P}_j := \Gamma_j/\Gamma(Q_j) \qquad (j = 1, 2);$$

Γ entspreche der Untergruppe $\mathfrak{U}^*$ von $\mathfrak{M}(Q^*)$ und daher vermöge des Isomorphismus [8] (1.2) einer Untergruppe $\mathfrak{U}$ von $(\mathfrak{M}(Q_1), \mathfrak{M}(Q_2))$ mit den Elementen $(B_1\Gamma(Q_1), B_2\Gamma(Q_2))$ $(B_j \in \Gamma_j)$, die wir kurz auch mit (u_1, u_2) bezeichnen wollen. Jedes $K \in \mathfrak{O}_n$ $((n, Q) = 1)$ induziert nach (1.15) in $\mathfrak{M}(Q_j)$, $\mathfrak{M}(Q^*)$ und in $(\mathfrak{M}(Q_1), \mathfrak{M}(Q_2))$ die Automorphismen bzw. $h_K^{(j)}$, h_K^* und $(h_K^{(1)}, h_K^{(2)})$, den letzteren gemäß

$$(s_1, s_2) \to (h_K^{(1)}, h_K^{(2)})(s_1, s_2) := (h_K^{(1)}s_1, h_K^{(2)}s_2) \qquad (s_j \in \mathfrak{M}(Q_j)).$$

Wenn $s^* \in \mathfrak{M}(Q^*)$ nach [8] (1.2) einem solchen Paar (s_1, s_2) entspricht, so $h_K^*(s^*)$ dem Paar $(h_K^{(1)}s_1, h_K^{(2)}s_2)$. Daraus folgt zunächst, daß $h_K^{(j)}(\mathfrak{P}_j)$, $h_K^{(j)}(\mathfrak{N}_j)$ bei $h_K^*(\mathfrak{U}^*)$ an die Stelle der $\mathfrak{P}_j$ bzw. $\mathfrak{N}_j$ bei $\mathfrak{U}^*$ treten. Bezeichnet jetzt $g_K^{(j)}$ die durch $h_K^{(j)}$ auf $\mathfrak{P}_j/\mathfrak{N}_j$ induzierte Abbildung, so ergibt sich der zu [8] (6.1) analoge, in der Konstruktion von $(h_K^{(1)}, h_K^{(2)})\,\mathfrak{U}$ zu verwendende Struktur-Isomorphismus σ' in der Gestalt

$$\sigma' = g_K^{(2)} \circ \sigma \circ (g_K^{(1)})^{-1}. \tag{2.11}$$

Damit ist die Zerlegung der Gruppe $h_K^*(\mathfrak{U}^*)$ in Komponenten bezüglich Q_1, Q_2 vollzogen. Wir fragen nach notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß für die durch $\Gamma/\Gamma(Q^*) = \mathfrak{U}^*$ definierte Kongruenzgruppe Γ die Invarianzrelation $\psi_K^*(\Gamma) = \Gamma$ gelte. Man erhält für diese — abgesehen von $h_K^{(j)}\mathfrak{P}_j = \mathfrak{P}_j$ — die Relationen (vgl. (2.11))

$$h_K^{(j)}\mathfrak{N}_j = \mathfrak{N}_j \ (j = 1, 2), \qquad \sigma \circ g_K^{(1)} = g_K^{(2)} \circ \sigma. \tag{2.12}$$

Dieses Resultat läßt sich in den oben und in [8] erklärten Bezeichnungen wie folgt ausdrücken:

Satz 2. *Es entstehe die Kongruenzgruppe Γ der Stufe $Q^* := Q_1Q_2$ $((Q_1, Q_2) = 1)$ durch den Zerlegungs-Formalismus von [8], § 6 aus den Kongruenzgruppen Γ_j der Stufen Q_j $(j = 1, 2)$. Für diese beiden Gruppen gelte $\psi_K^{(j)}(\Gamma_j) = \Gamma_j$. Die Invarianzrelation $\psi_K(\Gamma) = \Gamma$ trifft genau dann zu, wenn (2.12) erfüllt ist. Hier bedeutet σ den Struktur-Isomorphismus [8] (6.1) von $\mathfrak{U}$ und $g_K^{(j)}$ den durch $h_K^{(j)}$ auf $\mathfrak{P}_j/\mathfrak{N}_j$ induzierten Automorphismus.*

(2.11) und die zweite Relation (2.12) besagen natürlich, daß ein rechteckiges Diagramm kommutativ ist. —

Die eingangs angekündigte Symmetrieregel über die Wirkung der Operatoren $T_n(K, Q)$ im Zusammenhang mit Skalarprodukten besagt in einer Bezeichnung der Skalarprodukte, die auch die betr. Gruppe hervorhebt, folgendes:

Es sei Γ eine Untergruppe der Modulgruppe und es gelte $\Gamma \supset \Gamma[Q]$ für eine natürliche Zahl Q; es seien r, n natürliche Zahlen, es sei v ein Charakter der Parität von r auf Γ, der auf $\Gamma(Q)$ zu 1 wird, $(n, Q) = 1$, $K \in \mathfrak{O}_n$, $\psi_K(\Gamma) = \Gamma$. Es seien $f(\tau)$, $g(\tau)$ ganze Modulformen mit

$$f(\tau) \in \{\Gamma, -r, v_K^*\}, \qquad g(\tau) \in \{\Gamma, -r, v\};$$

$f(\tau)$ oder $g(\tau)$ verschwinde in allen Spitzen. Dann gilt

$$(f \mid T_n(K, Q), g; \Gamma) = (f, g \mid T_n(nK^{-1}, Q); \Gamma). \tag{2.13}$$

§ 3. Poincarésche Reihen. Die Siegelsche Konstruktion. Diese Gegenstände sollen für Grenzkreisgruppen Γ von erster Art, reellen Grad $-r < -2$ und Multiplikatorsysteme v des Betrages 1 zu Γ und $-r$ entwickelt werden. Γ wird (vgl. (1.10)) als Untergruppe von ${}_1\mathrm{B} := SL(2, \boldsymbol{R})$ aufgefasst, die $-I$ und parabolische Matrizen enthält; insbesondere sei ∞ eine Spitze von Γ. Im übrigen werden die Bezeichnungen und Definitionen von [7] § 1 verwendet.

Es sei $A^{-1}\infty$ $(A \in {}_1\mathrm{B})$ eine Spitze von Γ, $P := A^{-1} U^N A$ ihre Grundmatrix in Γ, $v(P) = e^{2\pi i \varkappa}$, $0 \leqslant \varkappa < 1$. Wir schreiben

$$\mathrm{K} := \{\Gamma, -r, v\}, \qquad \mathrm{K}^0 := \{\Gamma, -r, v\}^0, \qquad \mathrm{K}^+ := \{\Gamma, -r, v\}^+;$$

K^0 und K^+ sind die Scharen der ganzen Formen bzw. der ganzen Spitzenformen der Klasse K. Unter $\mathfrak{S}(A, \Gamma)$ verstehen wir ein volles System von Matrizen aus $A\Gamma$ mit verschiedenen zweiten Zeilen. Für $M = AL \in A\Gamma$ setzen wir

$$v(M) = v(A)\sigma(A, L)v(L) \qquad (\sigma := \sigma^{(r)})$$

wo $v(A)$, falls $A \notin \Gamma$, willkürlich mit dem Betrag 1 bestimmt wird.

Die mit $\nu \in \boldsymbol{Z}$ zu bildende Reihe

$$G(\tau, \mathrm{K}, A, \nu+\varkappa) := \sum_{M \in \mathfrak{S}(A, \Gamma)} v^{-1}(M) \exp \frac{2\pi i}{N}(\nu+\varkappa)\tau \mid M \tag{3.1}$$

stellt, falls $\nu+\varkappa > 0$, eine Funktion aus K^+, falls $\nu = \varkappa = 0$, eine Funktion aus K^0 dar. Im ersten Fall kann sie identisch verschwinden, im zweiten nicht; im ersten Fall erhält man Aussagen dieser Art nur aus genauerer Kenntnis der Schar K^+ mit Hilfe der Metrisierung. Im folgenden wird $\nu+\varkappa > 0$ angenommen.

Die Siegelschen Funktionen sind mit $\boldsymbol{M} = \{m_1, m_2\}$ und $m \in \boldsymbol{N}$ durch

$$\Phi(u, \tau, m; \mathrm{K}, A, \nu+\varkappa) := \sum_{M \in \mathfrak{S}(A, \Gamma)} v^{-1}(M) \exp \frac{2\pi i}{N}(\nu+\varkappa) M\tau \times \times (m_1\tau+m_2)^{2m-r}\big((m_1\tau+m_2)^2 - u^2\big)^{-m} \tag{3.2}$$

als Funktionen der komplexen Variablen u definiert. Zum Konvergenzbeweis wird vorausgesetzt, es liege τ auf einem abgeschlossenen Vertikalhalbstreifen $\mathfrak{V}$ $(|x| \leqslant \xi, y > \beta$ bei festen $\xi > 1$, $\beta > 0)$. Dort gilt

$$|m_1\tau + m_2|^2 \geqslant C_1 |m_1 i + m_2|^2 \qquad (m_1, m_2 \in \boldsymbol{R}) \tag{3.3}$$

mit einem höchstens von ξ und β abhängigen $C_1 > 0$. Ist $|u| \leqslant R$ $(R > 1)$ und $|m_1 i + m_2|^2 \geqslant 2C_1^{-1}R^2$, so erhält man für die betr. Teilreihe nach (3.3) die Majorante mit den Gliedern $2^m |m_1\tau + m_2|^{-r}$, die für festes $r > 2$ auf $\mathfrak{V}$ gleichmäßig konvergiert. Dies erweist (3.2) Φ als meromorphe Funktion von u mit den diskret liegenden Polen $u = m_1\tau + m_2$ $(\{m_1, m_2\} = \boldsymbol{M}$ für $M \in A\Gamma)$, die alle die Ordnung m haben.

Daß die formalen Pole in (3.2) real sind, erkennt man am einfachsten, indem man dort über ein Halbsystem $\mathfrak{S}(A, \Gamma)$ in $A\Gamma$ summiert. Dies ist ein Vertretersystem des folgenden Äquivalenzbegriffs auf $A\Gamma$: Man nennt $M, M' \in A\Gamma$ äquivalent, wenn $M' = \varepsilon U^{jN} M$ mit $j \in \boldsymbol{Z}$, $\varepsilon^2 = 1$; diese Relation bedeutet für $L := A^{-1}M \in \Gamma$, $L' := A^{-1}M' \in \Gamma$, daß $L' = \varepsilon P^j L$ zutrifft. Die Reihenglieder in (3.1, 2) stimmen für äquivalente Matrizen M, M' überein.

Da $|m_1\tau + m_2|$ für $\tau \in \mathfrak{V}$, $M \in A\Gamma$ eine positive untere Schranke besitzt, verhält sich $\Phi(u, \tau, m; \ldots)$ bei $u = 0$ holomorph und gestattet die Entwicklung

$$\Phi(u, \tau, m; \mathrm{K}, A, \nu+\varkappa) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m+k-1}{k} G(\tau, \mathrm{K}^{(r+2k)}, A, \nu+\varkappa) u^{2k} \tag{3.4}$$

wo $\mathrm{K}^{(r+2k)} := \{\Gamma, -r-2k, v\}$. Daraus folgt das Siegelsche Resultat:

Es gibt unendlich viele ganze $k \geqslant 0$ derart, daß (bei fest gegebenen Γ, r, v, A, ν) $G(\tau, \mathrm{K}^{(r+2k)}, A, \nu+\varkappa)$ nicht identisch verschwindet.

Eine leicht zu beweisende Verallgemeinerung dieses Satzes besagt:

Bei vorgegebenen Γ, r, v, A, ν $(\nu+\varkappa > 0)$, m, h $(m, h \in \boldsymbol{Z}, m \geqslant 2)$ gibt es unendlich viele ganze $k \geqslant 0$ derart, daß zugleich $k \equiv h \bmod m$ gilt und $G(\tau, \mathrm{K}^{(r+2k)}, A, \nu+\varkappa)$ nicht identisch verschwindet.

Bei den Übergängen

$$\{u, \tau\} \to \left\{\frac{u}{\gamma\tau+\delta}, L\tau\right\} \ (L \in \Gamma), \qquad \{u, \tau\} \to \left\{\frac{u}{c\tau+d}, S\tau\right\} \ (S \in {}_1\mathrm{B})$$

(vgl. (1.1)) erfahren die Funktionen (3.2) einfache Umsetzungen; diese werden im folgenden nicht gebraucht und sollen daher nicht zitiert werden. Dagegen soll ein Sachverhalt zitiert werden, der eine Verallgemeinerung des obigen Resultats von Siegel darstellt und mit einer Verallgemeinerung seiner (mit $m = 1$ gebildeten) Funktion (3.2) bewiesen wird.

Für $j = 1, 2, \ldots, n$ $(n > 1)$ sei

$$\tau_j \in \mathfrak{H}, \quad \nu_j \in \mathbf{Z}, \quad \nu_n > \nu_{n-1} > \ldots > \nu_2 > \nu_1 > -\varkappa;$$

$(M) \in \mathfrak{S}^n(A, \Gamma)$ bedeute (simultan) $M_j \in \mathfrak{S}(A, \Gamma)$. Wir schreiben $M_j = (\overset{*}{m}_{j1}\ \overset{*}{m}_{j2})$ und bilden als Verallgemeinerung von (3.2)

$$\text{(3.5)} \quad \Phi_n\big(u, (\tau); \mathrm{K}, A, (\nu)\big) := \sum_{(M)\in\mathfrak{S}^n(A,\Gamma)} \det_{j,l}\left(\exp\frac{2\pi i}{N}(\nu_l + \varkappa) M_j\tau_j\right) \times$$
$$\times \prod_{j=1}^{r} v^{-1}(M_j)(m_{j1}\tau_j + m_{j2})^{2-r}\big((m_{j1}\tau_j + m_{j2})^2 - u^2\big)^{-1}.$$

Die genauere Betrachtung dieser Funktion liefert den folgenden

Satz 3. *Es gibt unendlich viele ganze $k \geqslant 0$ derart, daß (bei fest gegebenen $\Gamma, r, v, A, (\nu)$) die Funktionen $G(\tau, \mathrm{K}^{(r+2k)}, A, \nu_j + \varkappa)$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ linear-unabhängig sind.*

Die vorgesehene Anwendung der Siegelschen Konstruktion auf die Operatorentheorie beruht auf dem Verhalten Poincaréscher Reihen bei Ausübung Heckescher Operatoren. Wir beginnen mit den Formenklassen ${}_1\mathrm{K}: = \{{}_1\Gamma, -r, 1\}$ $(r \geqslant 4, r \equiv 0 \bmod 2)$ der ersten Stufe; hierzu sei bemerkt, daß in der Beweisskizze in [6] der wichtigste Schritt nicht ausgeführt ist.

Man gewinnt für die betr. Funktion (3.1), d.h. hier für

$$G_r(\tau, \nu) := \sum_{M\in\mathfrak{S}_1} e^{2\pi i\nu\tau}|M \qquad (\nu \in \mathbf{N}, \mathfrak{S}_1 := \mathfrak{S}(I, {}_1\Gamma))$$

die Darstellung (vgl. (1.13))

$$G_r(\tau, \nu)|T_n = n^{r-1}\sum_{M'\in\mathfrak{S}_1\mathfrak{B}_n} e^{2\pi i\nu\tau}|M' \qquad (n \in \mathbf{N})$$

wo $\mathfrak{B}_n$ ein beliebiges Vertretersystem der Klassen ${}_1\Gamma S \subset \mathfrak{O}_n$ angibt.

In den nächsten Zeilen und an den entsprechenden Stellen in § 4 wird bezüglich der Parameter, die die zu vereinigenden Mengen kennzeichnen, wie folgt verfahren: Alle unter dem Zeichen $\bigcup$ erscheinenden Buchstaben bedeuten „laufende" Parameter mit lauter ganzzahligen Werten, welche evt. angegebene Zusatzbedingungen erfüllen. Hinsichtlich dieser letzten Vorschrift wird überdies verabredet, daß, wenn a und d unter $\bigcup$ erscheinen, die stets zu erfüllenden Bedingungen $ad = n$, $a > 0$ nicht angegeben werden; es wird dann $\bigcup^*$ anstelle von $\bigcup$ geschrieben.

In diesem Sinne erhält man nach der Definition von $\mathfrak{S}_1$:

$${}_1\Gamma\mathfrak{B}_n = \bigcup_{\substack{a,b,d\\ b \bmod a}}^* \begin{pmatrix} a & b\\ 0 & d\end{pmatrix} {}_1\Gamma = \bigcup_{\substack{a,b,d,k\\ b \bmod a}}^* \begin{pmatrix} a & b+ka\\ 0 & d\end{pmatrix} \mathfrak{S}_1$$

und aus dem gleichen Grunde

$$\mathfrak{S}_1\mathfrak{B}_n = \bigcup_{a,d,h,k}^* \begin{pmatrix} a & h-kd\\ 0 & d\end{pmatrix} \mathfrak{S}_1 = \bigcup_{\substack{a,b,d\\ b \bmod d}}^* \begin{pmatrix} a & b\\ 0 & d\end{pmatrix} \mathfrak{S}_1$$

mit durch $\mathfrak{S}_1$ eindeutig bestimmten Vertretern $b \bmod d$. Daraus folgt (vgl. [6] (23))

$$\text{(3.6)} \qquad G_r(\tau, \nu)|T_n = n^{r-1}\sum_{d|(n,\nu),\, d>0} d^{1-r} G_r\left(\tau, \frac{n\nu}{d^2}\right).$$

Wir schreiben $T_n = : T_n^{(r)}$ und für die Siegelsche Funktion:

$$\Phi_r(u, \tau, \nu) := \sum_{M\in\mathfrak{S}_1} e^{2\pi i\nu M\tau}(m_1\tau + m_2)^{2-r}\big((m_1\tau + m_2)^2 - u^2\big)^{-1}$$

und erhalten nach leichten Umformungen, entsprechend (3.4):

$$n^{1-r}\sum_{k=0}^{\infty}\big(G_{r+2k}(\tau, \nu)|T_n^{(r+2k)}\big)\left(\frac{u}{n}\right)^{2k} = \sum_{d|(n,\nu),\, d>0} d^{1-r}\Phi_r\left(\frac{u}{d}, \tau, \frac{n\nu}{d^2}\right)$$
$$= \sum_{\substack{d|(n,\nu)\\ d>0}} d^{3-r}\sum_{M\in\mathfrak{S}_1}\left(\exp 2\pi i\frac{n\nu}{d^2}M\tau\right)(m_1\tau + m_2)^{2-r}\big(d^2(m_1\tau + m_2)^2 - u^2\big)^{-1}.$$

Auf der rechten Seite erscheinen als formale Pole die Punkte $u = dm_1\tau + dm_2$. Bei Summation über ein Halbsystem $\mathfrak{S}(I, \Gamma)$ ist, da $(dm_1, dm_2) = d$, zu sehen, daß diese formalen Pole real sind. Daher gilt

Satz 4. *Für beliebig gegebene $\tau \in \mathfrak{H}$; $r, \nu, n \in \mathbf{N}$ $(r \geqslant 4$, $r \equiv 0 \bmod 2)$ existieren unendlich viele ganze $k \geqslant 0$ derart, daß*

$$G_{r+2k}(\tau, \nu)|T_n^{(r+2k)} \neq 0.$$

§ 4. Fünf Beispiele höherer Stufe. Die ersten beiden Beispiele $\Gamma = \Gamma^0[Q]$ und $\Gamma = \Gamma_0[Q]$ können gemeinsam behandelt werden. Wir setzen $\mathrm{K}: = \{\Gamma, -r, v\}$ mit ganzem $r \geqslant 3$ und $v(L) = \chi(\delta)$ für $L \in \Gamma$ (vgl. (1.1) und § 2), wo χ einen Restcharakter $\bmod Q$ der gleichen Parität wie r bezeichnet. Der zu $A = I$ gehörige Wert $\varkappa$ verschwindet. Wir schreiben mit $\nu \in \mathbf{N}$, $A = I$:

$$\text{(4.1)} \qquad G(\tau, \mathrm{K}, \nu) := \sum_{M\in\mathfrak{S}(\Gamma)} \chi^{-1}(m_2)\exp\frac{2\pi i}{Q^\eta}\nu\tau|M, \ \mathrm{K}^{(r)} := \mathrm{K},$$

wo $\eta: = 1, 0$ für $\Gamma = \Gamma^0[Q]$ bzw. $\Gamma_0[Q]$, $\mathfrak{S}(\Gamma) := \mathfrak{S}(I, \Gamma)$ und $M = \{m_1, m_2\}$; die Summationsbedingungen besagen für m_1, m_2:

$$(m_1, m_2) = 1 \quad \text{und} \quad \begin{Bmatrix} (m_2, Q) = 1, \text{ wenn } \Gamma = \Gamma^0[Q]\\ m_1 \equiv 0 \bmod Q, \text{ wenn } \Gamma = \Gamma_0[Q]\end{Bmatrix}.$$

Die Anwendung des Operators $T_n(K, Q) =: T_n^{(r)}(K, Q)$ mit $K = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$ $(k_1, k_2 \in N, k_1 k_2 = n, (n, Q) = 1)$ auf die Reihen (4.1) liefert

$$n^{1-r} G(\tau, \mathrm{K}, \nu) | T_n(K, Q) = \chi(k_2) \sum_{M^* \in \mathfrak{S}(\Gamma)\mathfrak{B}_n(K, Q)} \chi^{-1}(m_2^*) \exp \frac{2\pi i}{Q^\eta} \nu\tau | M^*,$$

wo $M^* = \{m_1^*, m_2^*\}$. Da die Kongruenzbedingung für Γ sich auf die M^* überträgt, findet man nach dem in § 3 angewendeten Verfahren

$$\mathfrak{S}(\Gamma)\mathfrak{B}_n(K, Q) = \bigcup_{\substack{a, b, d \\ b \bmod d}}^* \begin{pmatrix} a & bQ^\eta \\ 0 & d \end{pmatrix} \mathfrak{S}(\Gamma)$$

und demgemäß

$$G(\tau, \mathrm{K}, \nu) | T_n(K, Q) = n^{r-1} \chi(k_2) \sum_{\substack{d | (n, \nu) \\ d > 0}} \chi^{-1}(d) d^{1-r} G\left(\tau, \mathrm{K}, \frac{n\nu}{d^2}\right). \tag{4.2}$$

Dies führt auf die Identität

(4.3)

$$\bar{\chi}(k_2) \sum_{k=0}^{\infty} n^{1-r-2k} \left(G(\tau, \mathrm{K}^{(r+2k)}, \nu) | T_n^{(r+2k)}(K, Q)\right) u^{2k} = \sum_{d | (n, \nu), d > 0} \chi^{-1}(d) d^{3-r} \times$$

$$\times \sum_{M \in \mathfrak{S}(\Gamma)} \left(\exp \frac{2\pi i}{Q^\eta} \frac{n\nu}{d^2} M\tau\right) \chi^{-1}(m_2)(m_1\tau + m_2)^{2-r} \left(d^2(m_1\tau + m_2)^2 - u^2\right)^{-1},$$

aus der sich wie am Ende von § 3 die gesuchte Aussage ergibt:

Satz 5. *Man gebe vor: $\tau \in \mathfrak{H}$, die ganzen Zahlen Q, r, n, ν, k_1, k_2 mit $Q \geqslant 2$, $r \geqslant 3$, $n \geqslant 1$, $(n, Q) = 1$, $\nu \geqslant 1$, $k_1 k_2 = n$ und einen Restcharakter $\chi \bmod Q$ der gleichen Parität wie r. Man setze $K = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$ und $v(L) = \chi(\delta)$ für $L = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \Gamma = \Gamma^0[Q]$ oder $\Gamma_0[Q]$. Dann gibt es unendlich viele ganze $k \geqslant 0$ und unendlich viele ganze $l \geqslant 0$ derart, daß*

$$G(\tau, \{\Gamma^0[Q], -r-2k, v\}, \nu) | T_n^{(r+2k)}(Q, K) \neq 0,$$

$$G(\tau, \{\Gamma_0[Q], -r-2l, v\}, \nu) | T_n^{(r+2l)}(Q, K) \neq 0.$$

(Die Bedingung $r \geqslant 3$ ist offenbar entbehrlich.)

Drittes Beispiel: $\Gamma = \Gamma_U[Q]$ (vgl. (1.3)); es wird alsbald $Q > 2$ vorausgesetzt. Jedem $f \in \boldsymbol{Z}$ mit $(f, Q) = 1$, $1 \leqslant f < \frac{1}{2}Q$ werde (genau) ein $A = A_f^*$ zugeordnet mit

$$A_f^* \in {}_1\Gamma, \quad A_f^* \equiv \begin{pmatrix} f' & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix} \bmod Q, \quad f' \in \boldsymbol{Z}.$$

Ist $(m, Q) = 1$ $(m \in \boldsymbol{Z})$, so bestimme man ein solches f derart, daß $m \equiv \varepsilon f \bmod Q$ $(\varepsilon = \pm 1)$ und setze $A_m^* := \varepsilon A_f^*$. Dadurch entstehen $\frac{1}{2}\varphi(Q)$ ($\varphi :=$ Eulersche Funktion) Nebenklassen $A_f^*\Gamma$ in ${}_1\Gamma$ mit disjunkten Systemen der zweiten Zeilen und also genau $\frac{1}{2}\varphi(Q)$ verschiedene Spitzenklassen $\bmod \Gamma$; sie haben alle die Breite 1. Die Matrizen $M \in A_f^*\Gamma$ sind durch $M \equiv \pm \begin{pmatrix} f' & * \\ 0 & f \end{pmatrix} \bmod Q$ gekennzeichnet.

Der Charakter v auf Γ wird zu vorgegebenem r nach (2.4) erklärt. Zur Bestimmung von v auf $A_m^*\Gamma$ wird für

$$n_1, n_2 \in \boldsymbol{Z}, \quad n_2 \equiv \varepsilon n_1 \bmod Q, \quad \varepsilon^2 = 1, \quad (n_1, Q) = 1$$

definiert $\sigma_r(n_1, n_2) := \varepsilon^r$. Das ergibt gemäß (1.1)

$$v(L) = v_{r,g}(L) := \sigma_r(\delta, 1) \exp \frac{2\pi i}{Q} g\beta\delta \quad (L \in \Gamma).$$

Der zu $A = A_f^*$ gehörige Wert $\varkappa = \varkappa_f$ ist durch $\varkappa_f \equiv Q^{-1} g f^2 \bmod 1$ bestimmt. Wir setzen $\nu_Q^* := \nu Q + g f^2$ und wählen ν (möglicherweise abweichend von (3.1)) als ganze Zahl derart, daß $\nu_Q^* > 0$ ausfällt.

Für $M = A_f^* L \in A_f^*\Gamma$ soll dementsprechend

$$v_{r,g}(M) := \sigma_r(m_2, f) \exp \frac{2\pi i}{Q} g m_2 m_3 \quad \left(M = \begin{pmatrix} m_0 & m_3 \\ m_1 & m_2 \end{pmatrix}\right)$$

gesetzt werden. Mit

$$\mathrm{K} = \mathrm{K}_g^{(r)} := \{\Gamma_U[Q], -r, v_{r,g}\}, \quad \mathfrak{S}_f^* := \mathfrak{S}(A_f^*, \Gamma_U[Q])$$

sind dann die Poincaréschen Reihen vom Typus (3.1) in der Gestalt

$$G(\tau, \mathrm{K}_g^{(r)}, A_f^*, Q^{-1}\nu_Q^*) := \sum_{M \in \mathfrak{S}_f^*} \sigma_r(m_2, f) \exp \frac{2\pi i}{Q} (\nu_Q^* \tau - g m_2 m_3) | M \tag{4.4}$$

zu bilden. Bei formaler Analogisierung dieses Ansatzes für εA_f^* anstelle von A_f $(\varepsilon^2 = 1)$ erhält man

$$G(\tau, \mathrm{K}_g^{(r)}, \varepsilon A_f^*, Q^{-1}\nu_Q^*) = \varepsilon^r G(\tau, \mathrm{K}_g^{(r)}, A_f^*, Q^{-1}\nu_Q^*).$$

Wir nehmen $K := \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$ und finden zunächst

$$n^{1-r} G(\tau, \mathrm{K}_g^{(r)}, A_f^*, Q^{-1}\nu_Q^*) | T_n(K, Q)$$

$$= \sum_{M^* \in \mathfrak{S}_f^* \mathfrak{B}_n(K, Q)} \sigma_r(m_2^*, k_2 f) \exp \frac{2\pi i}{Q} (\nu_Q^* \tau - g k_2'^2 m_2^* m_3^*) | M^*$$

wo

$$k_2' \in \boldsymbol{Z}, \quad k_2' k_2 \equiv 1 \bmod Q, \quad M^* = \begin{pmatrix} m_0^* & m_3^* \\ m_1^* & m_2^* \end{pmatrix}.$$

Die nun erforderliche Umformung von $\mathfrak{S}_f^* \mathfrak{B}_n(K, Q)$ geht aus von

$$A_f^* \Gamma \mathfrak{B}_n(K, Q) = \bigcup_{\substack{a, b, d \\ b \bmod a}}^* \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} A_{d'k_2f}^* \Gamma,$$

wo $d' \in \boldsymbol{Z}$, $dd' \equiv 1 \bmod Q$, und liefert wie in § 3

$$\mathfrak{S}_f^* \mathfrak{B}_n(K, Q) = \bigcup_{\substack{a, b, d \\ b \bmod d}}^* \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mathfrak{S}_{d'k_2f}^*.$$

Die Systeme $\mathfrak{S}_{d'k_2f}^*$ sind so zu wählen, daß sie von b nicht abhängen; über dies kann b durch bQ ersetzt werden. Damit und wegen

$$\sigma_r(dm_2, k_2f) = \sigma_r(m_2, d'k_2f)$$

entsteht

$$(4.5) \quad n^{1-r} G(\tau, \mathrm{K}_g^{(r)}, A_f^*, Q^{-1}\nu_Q^*) | T_n(K, Q) = \sum_{d|(n, \nu_Q^*), d>0} d^{1-r} G(\tau, \mathrm{K}_{gk_1k_2'}^{(r)}, A_{d'k_2f}^*, Q^{-1} d^{-2} n\nu_Q^*)$$

und nun läßt sich wie gegen Ende des 3 die folgende Schlußformel ableiten:

$$(4.6) \quad \sum_{k=0}^{\infty} n^{1-r-2k} \big(G(\tau, \mathrm{K}_g^{(r+2k)}, A_f^*, Q^{-1}\nu_Q^*) | T_n^{(r+2k)}(K, Q)\big) u^{2k}$$
$$= \sum_{d|(n,\nu_Q^*), d>0} d^{3-r} \sum_{M \in \mathfrak{S}_{d'k_2f}^*} \exp \frac{2\pi i}{Q} \left(\frac{n\nu_Q^*}{d^2} M\tau - gk_1k_2'm_2m_3 \right) \times$$
$$\times \sigma_r(m_2, d'k_2f)(m_1\tau + m_2)^{2-r} \big(d^2(m_1\tau + m_2)^2 - u^2\big)^{-1}.$$

Es ist zu beachten, daß für die in (4.5, 6) rechts auftretenden Summen über M diejenige Kongruenz gilt, welche $\nu_Q^* \equiv gf^2 \bmod Q$ entspricht: $d^{-2}n\nu_Q^* \equiv gk_1k_2'd'^2k_2^2f^2 \bmod Q$. — Nach (4.6) erhält man

Satz 6. *Man gebe vor:* $\tau \in \mathfrak{H}$ *und die ganzen Zahlen* $Q, r, n, k_1, k_2, g, f, \nu$ *mit* $Q > 2$, $r > 2$, $n \geqslant 1$, $(n, Q) = 1$, $k_1k_2 = n$, $1 \leqslant f < \frac{1}{2}Q$, $(f, Q) = 1$, $\nu_Q^* := \nu Q + gf^2 > 0$. *Es gibt unendlich viele ganze* $k \geqslant 0$ *derart, daß mit dem obigen* A_f^* *und*

$$\mathrm{K}_g^{(r)} := \{\Gamma_U[Q], -r, v_{r,g}\}, \quad K = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}, \quad T_n^{(r)} := T_n$$

gilt

$$G(\tau, \mathrm{K}_g^{(r+2k)}, A_f^*, Q^{-1}\nu_Q^*) | T_n^{(r+2k)}(K, Q) \neq 0.$$

Es sei bemerkt, daß $\Gamma_U[Q]$ für Primzahlstufe $Q = q \geqslant 5$ insgesamt genau $q-1$ Spitzenklassen aufweist. Die Hälfte wird durch die $A^{-1}\infty$ mit $A = A_f^*$ $(1 \leqslant f \leqslant \frac{1}{2}(q-1))$ vertreten, die restliche Hälfte durch die $A^{-1}\infty$ mit $A \in {}_1\Gamma$, $A \equiv \{f, 0\} \bmod q$; die letzteren haben die Breite q.

Das *vierte Beispiel* für diese Art der Anwendung der Siegelschen Konstruktion betrifft die Formenklassen

$$\mathrm{K} = \mathrm{K}_* = \mathrm{K}_*^{(r)} = \{\Gamma_*[q], -r, v\} \quad (r \in \boldsymbol{Z}, r \geqslant 3),$$

wo q eine Primzahl > 2 angibt und v wie in § 2 definiert ist.

Um zunächst die Spitzenklassen mod $\Gamma_*[q]$ zu bestimmen, gebe man zwei Spitzenklassen mod $\Gamma[q]$ (Hauptkongruenzgruppe) durch ihre Vertreter $A^{-1}\infty$, $B^{-1}\infty$ $(A, B \in {}_1\Gamma)$ vor. Die Zugehörigkeit der Spitze $A^{-1}\infty$ (bzw. $B^{-1}\infty$) zu ihrer Kongruenzklasse mod $\Gamma[q]$ besagt für $\boldsymbol{A} = \{a_1, a_2\}$ $(\boldsymbol{B} = \{b_1, b_2\})$, daß

$$(4.7) \quad \varrho_q(\{a_1, a_2\}) = \pm\{s_1, s_2\} \in \mathfrak{R}_q^{(1,2)} \big(\varrho_q(\{b_1, b_2\}) = \pm\{t_1, t_2\} \in \mathfrak{R}_q^{(1,2)}\big)$$

mit fest vorgegebenen s_1, s_2 $(t_1, t_2) \in \mathfrak{R}_q$ zutrifft. Diese Spitzenklassen von $A^{-1}\infty$, $B^{-1}\infty$ mod $\Gamma[q]$ liegen nun offenbar genau dann in der gleichen Spitzenklasse mod $\Gamma_*[q]$, wenn

$$\{t_1, t_2\} = \{s_1, s_2\} X \quad \text{mit einem } X = \begin{pmatrix} x_2 & ux_1 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{J}_q$$

zutrifft. Das bedeutet, daß eine Spitzenklasse mod $\Gamma_*[q]$ aus genau denjenigen Spitzen $A^{-1}\infty$ $(A \in {}_1\Gamma)$ besteht, für die in der obigen Bezeichnung $a_2^2 - u_* a_1^2$ $(u_* \in \boldsymbol{Z}, \varrho_q(u_*) = u)$ einer festen (teilerfremden) Restklasse mod q angehört. Da diese alle als Normen der Elemente von $\Lambda_q^\times$ auftreten, beträgt die Anzahl der Spitzenklassen mod $\Gamma_*[q]$ $q-1$; und da es keine anderen Spitzenbreiten als 1 oder q gibt, haben alle Spitzen in $\Gamma_*[q]$ die Breite q (was sich im übrigen leicht explizit bestätigen läßt). Die Bruchteile $\varkappa$ $(0 \leqslant \varkappa < 1)$ jedes der obigen v verschwinden infolgedessen in sämtlichen Spitzen.

Für ein $A \in {}_1\Gamma$ werde $\mathfrak{S}_*(A) := \mathfrak{S}(A, \Gamma_*[q])$ geschrieben; $M \in \mathfrak{S}_*(A)$ bedeutet für $\{m_1, m_2\} = \boldsymbol{M}$ genau, daß $m_2^2 - u_* m_1^2 \equiv a_2^2 - u_* a_1^2 \bmod q$ zutrifft. Die zu untersuchenden Poincaréschen Reihen erscheinen in der Gestalt

$$G(\tau, \mathrm{K}_*, A, \nu) := \sum_{M \in \mathfrak{S}_*(A)} v^{-1}(M) \exp \frac{2\pi i}{q} \nu\tau | M \quad (\nu \in \boldsymbol{N}),$$

wo $v(M) := v(A^{-1}M)$ für $M \in A\Gamma_*[q]$. Daraus folgt

$$(4.8) \quad n^{1-r} G(\tau, \mathrm{K}_*, A, \nu) | T_n(K, q) = \sum_{M \in \mathfrak{S}_*(A), V \in \mathfrak{B}_n(K, Q)} v^{-1}(M) \exp \frac{2\pi i}{q} \nu\tau | MV.$$

Zur Umformung von $\mathfrak{S}_*(A)\mathfrak{B}_n$ $(\mathfrak{B}_n := \mathfrak{B}_n(K, q))$ wird zunächst

$$(4.9) \quad W \in A\Gamma_*\mathfrak{B}_n \quad \text{durch} \quad W \in \mathfrak{D}_n, \quad \varrho_q(W) \in \varrho_q(A)\mathfrak{J}_q H$$

interpretiert $(\Gamma_*: = \Gamma_*[q])$. Die Darstellung

$$(4.10)\qquad W = \begin{pmatrix} a & bq \\ 0 & d \end{pmatrix} M \quad \text{mit} \quad a, b, d \in \boldsymbol{Z},\ ad = n,\ a > 0,\ b \bmod a$$

und $M \in {}_1\Gamma$ liefert als Äquivalent für $W \in A\,\Gamma_* \mathfrak{V}_n$ die Relation

$$(4.11)\qquad M \in B\Gamma_* \quad \text{mit} \quad B \in {}_1\Gamma, \quad B \equiv \begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & d' \end{pmatrix} AK \bmod q,$$

wo $a', d' \in \boldsymbol{Z}$, $a'a \equiv d'd \equiv 1 \bmod q$; $B: = B[A; a, d] = B_{K,q}[A; a, d]$ ist unabhängig von b zu bestimmen. Jetzt folgt auf dem in § 3 angedeuteten Wege

$$\mathfrak{S}_*(A)\mathfrak{V}_n = \bigcup_{\substack{a,b,d \\ b \bmod d}}^{*} \begin{pmatrix} a & bq \\ 0 & d \end{pmatrix} \mathfrak{S}_*(B[A; a, d]).$$

Die Ermittlung der Werte von v_K^* ergibt sich aus der nach (4.9, 10, 11) gültigen Beziehung

$$ALV = \begin{pmatrix} a & bq \\ 0 & d \end{pmatrix} BL^* \quad (L, L^* \in \Gamma_*,\ V \in \mathfrak{V}_n;\ a, b, d \text{ wie oben}),$$

die unmittelbar auf $\varrho_q(L)H = H\varrho_q(L^*)$ oder (vgl. (2.8))

$$L\Gamma(q) = [KLK^{-1}]_q \Gamma(q) = L^*\Gamma(q)$$

und damit auf $v_K^*(L) = v(L) = v(L^*)$ führt. Hieraus gewinnt man nach (4.8) zunächst, wenn wieder $T_n^{(r)}: = T_n$ gesetzt wird:

$$(4.12)\qquad n^{1-r} G(\tau, \mathrm{K}_*, A, v) | T_n^{(r)}(K, q)$$
$$= \sum_{d|(n,\nu),\, d>0} d^{1-r} G\left(\tau, \mathrm{K}_*, B\left[A; \frac{n}{d}, d\right], \frac{n\nu}{d^2}\right)$$

und weiter wie am Ende von § 3

$$\sum_{k=0}^{\infty} n^{1-r-2k} \left(G(\tau, \mathrm{K}_*^{(r+2k)}, A, \nu) | T_n^{(r+2k)}(K, q)\right) u^{2k}$$
$$= \sum_{d|(n,\nu),\, d>0} d^{3-r} \sum_{M \in \mathfrak{S}_*\left(B\left[A; \frac{n}{d}, d\right]\right)}' \left(\exp \frac{2\pi i}{q} \frac{n\nu}{d^2} M\tau\right) \times$$
$$\times v^{-1}(M)(m_1\tau + m_2)^{2-r}\left(d^2(m_1\tau + m_2)^2 - u^2\right)^{-1},$$

also den folgenden

Satz 7. *Man gebe vor: $\tau \in \mathfrak{H}$, $A \in {}_1\Gamma$, die ganzen Zahlen q, r, n, g, ν mit den Eigenschaften: q Primzahl > 2, $r \geqslant 3$, $n \geqslant 1$, $(n, q) = 1$, $g \equiv r$ mod 2, $\nu > 0$, schließlich eine Matrix $K \in \mathfrak{O}_n$ derart daß $K \equiv \begin{pmatrix} k_2 & u_* k_1 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix}$ mod q für irgendwelche $k_1, k_2 \in \boldsymbol{Z}$ mit $k_2^2 - u_* k_1^2 \equiv n \bmod q$. Werden $\mathrm{K}_*^{(r)}$ und v wie oben erklärt, so gilt: Es gibt unendlich viele ganze $k \geqslant 0$ derart daß*

$$G(\tau, \mathrm{K}_*^{(r+2k)}, A, \nu) | T_n^{(r+2k)}(K, q) \neq 0.$$

Eine Kennzeichnung der Spitzenklasse von $B^{-1}\infty \bmod \Gamma_*[q]$, wo $B = B_{K,q}\left[A; \frac{n}{d}, d\right]$ drückt sich in $\boldsymbol{B} = : \{b_1, b_2\}$ aus durch

$$(b_2^2 - u_* b_1^2) d^2 \equiv (a_2^2 - u_* a_1^2) n \bmod q.$$

Das *letzte Beispiel* betrifft Hauptkongruenzgruppen: Es seien N, Q, n, r natürliche Zahlen mit $N|Q$, $(n, Q) = 1$, $r \geqslant 3$; wir betrachten den Fall $\Gamma: = \Gamma[N]$, verstehen also unter v einen Charakter der Parität von r auf $\Gamma[N]$ derart, daß $v(L) = 1$ für $L \equiv I \bmod Q$ zutrifft. Mit $A \in {}_1\Gamma$ und

$$\mathrm{K}[N]: = \{\Gamma[N], -r, v\}, \qquad \mathfrak{S}(A, N): = \mathfrak{S}(A, \Gamma[N])$$

wird, weil $e^{2\pi i\varkappa} = v(A^{-1}U^N A)$ durch ein rationales

$$\varkappa = Q_1^{-1}k \qquad (k \in \boldsymbol{Z},\ 0 \leqslant k \leqslant Q_1 - 1,\ Q_1 N = Q)$$

gelöst wird, $N^{-1}(\nu + \varkappa) = Q^{-1}\nu^*$, wo $\nu^*: = Q_1\nu + k$, und daher

$$(4.13)\qquad G(\tau, \mathrm{K}[N], A, \nu + \varkappa): = \sum_{M \in \mathfrak{S}(A,N)}' v^{-1}(M) \exp \frac{2\pi i}{Q} \nu^* \tau | M \qquad (\nu^* > 0).$$

Bei beliebigem $K \in \mathfrak{O}_n$ gilt $\psi_K(\Gamma[N]) = \Gamma[N]$; K soll nicht spezialisiert werden, so daß $T_n(K, Q)$ die ganzen Formen der Klasse $\{\Gamma[N], -r, v\}$ in solche der Klasse $\{\Gamma[N], -r, v_{*K}\}$ überführt. Um die Wirkung von $T_n(K, Q)$ auf die Funktionen (4.13) zu beschreiben, hat man das Komplexprodukt $A\Gamma[N]\mathfrak{V}_n(K, Q)$ umzuformen. Man findet

$$(4.14)\qquad A\Gamma[N]\mathfrak{V}_n(K, Q) = \bigcup_{a,b,d;\, b \bmod a}^{*} \begin{pmatrix} a & bQ \\ 0 & d \end{pmatrix} B[A; a, d]\Gamma[N],$$

wo $B[A; a, d] = : B_{K,Q}[A; a, d] \in {}_1\Gamma$ unabhängig von b gemäß

$$B[A; a, d] \equiv \begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & d' \end{pmatrix} AK \bmod Q \qquad (a'a \equiv d'd \equiv 1 \bmod Q)$$

zu bestimmen ist. Die Reduktion auf $\mathfrak{S}(A, N)$ links und ebenso auf $\mathfrak{S}(B[A; a, d], N)$ rechts läßt sich bei geeigneter Wahl der Restklassenvertreter explizit ausführen und liefert

$$\mathfrak{S}(A, N)\mathfrak{V}_n(K, Q) = \bigcup_{a,b,d;\, b \bmod d}^{*} \begin{pmatrix} a & bQ \\ 0 & d \end{pmatrix} \mathfrak{S}(B[A; a, d], N).$$

Daß dabei eine Spezialisierung dieser Systeme $\mathfrak{S}$ stattfindet, hat keinen Einfluß auf das Resultat, das nun in der Gestalt

$$(4.15)\qquad n^{1-r}G(\tau, \mathrm{K}[N], A, Q_1^{-1}v^*)|T_n(K, Q) = \sum_{d|(n,v^*),\, d>0} d^{1-r}G\left(\tau, \mathrm{K}_*[N], B\left[A; \frac{n}{d}, d\right], Q_1^{-1}d^{-2}nv^*\right)$$

mit $\mathrm{K}_*[N] := \{\Gamma[N], -r, v_{*K}\}$ erscheint. Die Umformung der Multiplikatoren ergibt sich aus der Relation

$$ALV = \begin{pmatrix} a & bQ \\ 0 & d \end{pmatrix} B[A; a, d]L^* \qquad (L^*, L\in\Gamma[N], V\in\mathfrak{B}_n(K, Q))$$

in der a, b, d die Bedeutung von (4.14) haben. Der in (4.13) gültigen Bedingung $v^* \equiv k \bmod Q_1$ entspricht im einzelnen Glied der Summe auf der rechten Seite von (4.15) (also bei festem d) die Relation

$$d^{-2}nv^* \equiv k_* \bmod Q_1, \qquad \text{wo} \qquad e^{2\pi i\varkappa_*} = v_{*K}(B^{-1}U^N B),$$
$$B := B\left[A; \frac{n}{d}, d\right], \qquad Q_1\varkappa_* =: k_* \qquad (0 \leqslant k_* \leqslant Q_1 - 1).$$

Diese läßt sich nach den Definitionen von B und v_{*K} direkt bestätigen. Als Anwendung der Siegelschen Konstruktion erhält man

SATZ 8. *Man gebe vor:* $\tau\in\mathfrak{H}$, $A\in{}_1\Gamma$; *die natürlichen Zahlen* N, Q, r, n *mit* $N|Q$, $r > 2$, $(n, Q) = 1$; *eine Matrix* $K\in\mathfrak{O}_n$; *einen Charakter* v *der Parität von* r *auf* $\Gamma[N]$, *der auf* $\Gamma(Q)$ *zu* 1 *wird; eine ganze Zahl* ν *mit* $\nu + \varkappa > 0$ (vgl. (4.13)). *Es gibt unendlich viele ganze* $g \geqslant 0$ *derart, daß mit* $\mathrm{K}^{(r)}[N] := \mathrm{K}[N]$, $T_n^{(r)} := T_n$ *gilt*

$$G(\tau, \mathrm{K}^{(r+2g)}[N], A, \nu+\varkappa)|T_n^{(r+2g)} \neq 0.$$

Es sei bemerkt, daß der obige Ansatz stets dann relativ viele Realisierungsmöglichkeiten bietet, wenn die Gruppe $\Gamma(N)/\Gamma(Q)$ „nahezu" abelsch ist. $\Gamma[N]/\Gamma[Q]$ ist eine abelsche Gruppe z.B. falls

$$N = q^g > 2, \qquad Q = q^h \qquad (q \text{ Primzahl};\ g, h\in\boldsymbol{N}) \qquad \text{mit} \qquad 2g \geqslant h$$

zutrifft und daher auch bei zusammengesetzter Stufe Q, falls diese Relationen für die verschiedenen Primteiler von Q gelten.

Anhang. Zum Abschluß soll der eingangs angedeutete Ansatz, der sich auf die Genesis der Operatorentheorie bezieht, kurz entwickelt werden. Wir nehmen r reell und verstehen unter v eines der 6 Multiplikatorsysteme auf ${}_1\Gamma$ vom Grade $-r$; sie haben sämtlich den Betrag 1. Vermöge der Primzahl q ordnen wir der ganzen Modulform $f(\tau)\in\{{}_1\Gamma, -r, v\}$ $(r > 0)$ die ganze Modulform zu, die durch

$$f_q(\tau) := f(q\tau)\in\{\Gamma_0[q], -r, v_q^*\}$$

definiert ist; v_q^* berechnet sich aus v, q gemäß

$$(5.1)\qquad v_q^*(L) = v\left(\begin{pmatrix} a & q\beta \\ q^{-1}\gamma & \delta \end{pmatrix}\right) \qquad \text{für} \qquad L = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\in\Gamma_0[q].$$

Um nun die Spur von f_q bezüglich ${}_1\Gamma$ bilden zu können, bedarf man eines Multiplikatorsystems v^* vom Grade $-r$ auf ${}_1\Gamma$, das auf $\Gamma_0[q]$ mit v_q^* übereinstimmt. Liegt ein solches vor, so gewinnt man aus der explizit bekannten Zerlegung von ${}_1\Gamma$ in Nebenklassen $\Gamma_0[q]S$ in ${}_1\Gamma$:

$$(5.2)\qquad \mathrm{Sp}^{\Gamma_0[q]/{}_1\Gamma}f_q(\tau) = f(q\tau) + \varepsilon_T \sum_{0\leqslant\nu\leqslant q-1} e^{-2\pi i\nu\varkappa^*} f\left(\frac{\tau+\nu}{q}\right)q^{-r},$$

wo $v^*(U) = e^{2\pi i\varkappa^*}$ $(0 \leqslant \varkappa^* < 1)$ und $\varepsilon_T := v^{-1}(T)v^*(T)$.

Mit dem analogen Ansatz, bei dem $f(\tau/q)$ und $\Gamma^0[q]$ an die Stelle von $f(q\tau)$ und $\Gamma_0[q]$ treten, ergibt sich bis auf eine multiplikative Konstante die gleiche Darstellung.

Diese Formel (5.2) hat die Gestalt, auf die der Heckesche Operator T_q führt, wenn $\varepsilon_T = +1$ und $\varkappa^* = 0$ ist, was natürlich für $r \equiv 0 \bmod 2$ und $v = 1$ eintritt. Eine geringe Verallgemeinerung entsteht wie folgt: Bezeichnet λ das Multiplikatorsystem der Dedekindschen Modulform

$$\eta(\tau) = \left(\exp\frac{\pi i}{12}\tau\right)\prod_{m=1}^{\infty}(1 - e^{2\pi i m\tau})\in\{{}_1\Gamma, -\tfrac{1}{2}, \lambda\}^+,$$

so findet man für $q > 3$ aufgrund der expliziten Darstellung von λ:

$$(5.3)\qquad \lambda\left(\begin{pmatrix} a & q\beta \\ q^{-1}\gamma & \delta \end{pmatrix}\right) = \left(\frac{\delta}{q}\right)\lambda^q(L) \qquad \text{für} \qquad L\in\Gamma_0[q].$$

Unter der Voraussetzung $r = \frac{1}{2}k$ $(k\in\boldsymbol{N})$ entstehen alle 6 Multiplikatorsysteme v vom Grade $-r$ auf ${}_1\Gamma$ in der Gestalt $v = \lambda^{k+4j}$ $(j\in\boldsymbol{Z}, 0\leqslant j\leqslant 5)$. Nach (5.3) kann bei geradem k und auf ${}_1\Gamma$

$$(5.4)\qquad v^* := \lambda^{k+4j'} \qquad (j'\in\boldsymbol{Z}, 0\leqslant j'\leqslant 5) \qquad \text{mit} \qquad j' \equiv \tfrac{1}{4}k(q-1) + jq \bmod 6$$

gesetzt werden, was die obige Konstruktion realisiert.

Um den Operator (5.2) dahin zu verallgemeinern, daß q durch eine beliebige natürliche Zahl n ersetzt wird, hat man ein Linearkompositum der $f(n\tau)|L$ zu bilden, wo $\Gamma_0[n]L$ die verschiedenen Nebenklassen in ${}_1\Gamma \bmod \Gamma_0[n]$ durchläuft. Andrerseits erfüllen die primitiven Matrizen aus $\mathfrak{O}_n$ eine einzige zweiseitige Klasse bezüglich ${}_1\Gamma$, die durch $R_n := \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ vertreten wird. R_nL_1 und R_nL_2 $(L_1, L_2\in{}_1\Gamma)$ liegen genau dann in der gleichen linksseitigen Klasse von $\mathfrak{O}_n$, wenn $L_2\in\Gamma_0[n]L_1$. Beides zusammen besagt also, daß der eingangs angedeutete Operator, falls er realisiert werden kann, bis auf einen konstanten skalaren Faktor mit dem "primitiven Analogon" von T_n übereinstimmt. — Hierzu und zu den Operatoren bei nicht-ganzem r vgl. [12].

Literatur

[1] A. O. L. Atkin and J. Lehner, *Hecke Operators on $\Gamma_0(m)$*, Math. Ann. 185 (1970), S. 134.

[2][3] E. Hecke, *Über Modulfunktionen und die Dirichletschen Reihen mit Eulerscher Produktentwicklung I, II*, Math. Ann. 114 (1937), S. 1 und 316.

[4] Klein-Fricke, *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen*, Bd. I, Leipzig (1890); s. Abschn. II, Kap. 8.

[5] H. Petersson, *Konstruktion der sämtlichen Lösungen einer Riemannschen Funktionalgleichung durch Dirichlet-Reihen mit Eulerscher Produktentwicklung II*, Math. Ann. 117 (1939), S. 39.

[6] — *Über eine Metrisierung der ganzen Modulformen*, Jber. Deutsch. Math. Vereinigung 49 (1939), S. 49.

[7] — *Über eine Spurbildung bei automorphen Formen*, Math. Zeitschr. 96 (1967), S. 296.

[8] — *Über die Konstruktion zykloider Kongruenzgruppen in der rationalen Modulgruppe*, J. Reine Angew. Math. 250 (1971), S. 182.

[9] — *Über Thetareihen zu grossen Untergruppen der rationalen Modulgruppe*, Sitz. Ber. Akad. Wiss. Heidelberg 1972, 1. Abhandl.

[10] R. A. Rankin, *Hecke Operators on Congruence Subgroups of the Modular Group*, Math. Ann. 168 (1967), S. 40.

[11] C. L. Siegel, Ges. Abhandl., Berlin–Heidelberg–New York 1966.

[12] K. Wohlfahrt, *Über Operatoren Heckescher Art bei Modulformen reeller Dimension*, Math. Nachr. 235 (1957), S. 235.

Eingegangen 17. 12. 1972 (360)

ERRATA

Page, line	For	Read
362^6	die Elemente u	die Elemente $\hat{u}$
363^{16}	$\psi(\hat{s}_1(X)\mathfrak{Y}^{n-1}+\ldots+s_n(X))$	$\psi(\hat{s}_1(X)\hat{\mathfrak{Y}}^{n-1}+\ldots+\hat{s}_n(X))$
363_{10}	$\mathrm{Min}(\nu(\mathfrak{U}), \nu(\mathfrak{U}'))$	$\mathrm{Min}(\nu(\hat{\mathfrak{U}}), \nu(\hat{\mathfrak{U}}'))$
363_{10}	$\nu(\mathfrak{U}\hat{\mathfrak{U}}')$	$\nu(\hat{\mathfrak{U}}\hat{\mathfrak{U}}')$
363_3	$D^l\hat{\mathfrak{U}}$	$\hat{D}^l\hat{\mathfrak{U}}$
364_6	$\ldots\hat{E}^{(u_i)}(\mathfrak{Y})$	$\ldots\hat{E}^{(u_i)}(\hat{\mathfrak{Y}})$
365^{16}	für $\mathfrak{U}_\epsilon$	für $\hat{\mathfrak{U}}_\epsilon$
365^{17}	$(g/u)E^{(u-1)}$	$(g/u)\hat{E}^{(u-1)}$
366^3	$K(X, \mathfrak{Y})_0$	$K(X, \hat{\mathfrak{Y}})_0$