STUDIA MATHEMATICA T. XLV. (1973)

Sur les rapports de convexité des topologies et bornologies dans les espaces nucléaires

par

JEAN PIERRE LIGAUD (Talence, France)

Sommaire. On démontre que, pour un espace vectoriel topologique localement pseudoconvexe, la propriété d'être nucléaire (au sens des différentes définitions possibles en termes de dimension diamétrale) implique la locale convexité. Des résultats analogues sont obtenus dans le cadre des espaces vectoriels bornologiques nucléaires.

Introduction. Divers auteurs ont introduit la notion d'espace nucléaire non localement convexe, espace défini par la propriété suivante: pour tout voisinage U de 0, il existe un voisinage V de 0 avec $d_n(V, U) \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ dans lequel $d_n(V, U)$ représente la $n$ième épaisseur de V par rapport à U.

On connaît des exemples de tels espaces non localement convexes ([12], [3]), mais ils sont tous non localement pseudo-convexes (pour la terminologie et les notations voir [4] et [6]). Ceci a conduit S. Rolewicz à poser le problème suivant: est-ce que tout espace vectoriel topologique localement pseudo-convexe métrisable complet et nucléaire est localement convexe? ([12], Problème 45). Nous donnons une réponse positive à cette question. Les résultats concernant cette réponse ont déjà été exposés succintement dans [7]. L'objet du présent travail est, principalement, d'en donner les démonstrations.

Je tiens à remercier ici M. H. Hogbe-Nlend pour les fructueuses discussions que nous avons eues ensemble à ce sujet, et qui m'ont permis d'en améliorer la forme et la rédaction.

§ 1. Rappels de terminologie et notations. Une partie A d'un espace vectoriel est dite p-disquée $(0 < p \leqslant 1)$ si $x, y \in A$ et $|\lambda|^p + |\mu|^p \leqslant 1$ impliquent $\lambda x + \mu y \in A$. L'enveloppe p-disquée d'une partie B d'un espace vectoriel est notée $\Gamma_p(B)$.

$$\Gamma_p(B) = \Big\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i;\ \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^p \leqslant 1,\ n \geqslant 1,\ x_i \in B\Big\}.$$

L'enveloppe 1-disquée est dite enveloppe disquée et notée $\Gamma(B)$. Si E est un espace vectoriel topologique (evt), l'ensemble des bornés de E définit sur l'espace vectoriel sous-jacent à E une structure d'espace vectoriel bornologique (voir [4]) (evb). La bornologie ainsi définie est appelée *bornologie de von Neumann* de E.

Un evt (resp. un evb) est dit *localement pseudo-convexe* (resp. *pseudo-convexe*) s'il possède une base (V_i) de voisinages de 0 (resp. une base (B_i) de bornologie), V_i (resp. B_i) étant p_i-disqué ($0 < p_i \leqslant 1$, p_i variant *à priori* avec l'indice i).

Si, dans la définition précédente, on peut prendre $p_i = p$ pour tout i, on dira que l'evt (resp. l'evb) correspondant est *localement p-convexe* (resp. *p-convexe*).

Si A et B sont deux parties d'un espace vectoriel E, on appelle nième épaisseur de A par rapport à B le nombre $d_n(A, B)$ borne inférieure des $\lambda > 0$ pour lequel il existe un sous-espace vectoriel L de E, de dimension $\leqslant n$ avec $A \subset \lambda B + L$.

On appelle *suite diamétrale* d'un evt E toute suite réelle (ξ_n) telle que pour tout voisinage U de 0, il existe un voisinage V de 0 avec $d_n(V, U) \leqslant \xi_n$. Pour que E soit nucléaire il est suffisant qu'il existe un $\alpha > 0$ tel que $\left((n+1)^{-\alpha}\right)$ soit une suite diamétrale et il est nécessaire que pour tout nombre $\beta > 0$, $\left((n+1)^{-\beta}\right)$ soit une suite diamétrale (pour plus de détails, voir [10]).

§ 2. Un lemme fondamental.

LEMME. *Soit E un espace p-normé dont la boule unité est U et soit A un borné équilibré de E. Si la suite $\left(d_n(A, U)\right)$ est à décroissance rapide, alors A est contenu dans l'enveloppe disquée fermée d'une suite à décroissance rapide de E.* (La réciproque de ce lemme est immédiate.)

Dans le cas des espaces normés, il est possible de donner une autre démonstration de ce lemme à partir de résultats connus, faisant intervenir la dualité de manière essentielle.

La ligne générale de la démonstration que nous allons donner ici est à rapprocher de celle de Robertson ([11], p. 133).

On va avoir besoin d'un certain nombre de remarques techniques préliminaires.

REMARQUE 1. *Soit E un evt séparé de dimension n, K une partie de E et $0 < p \leqslant 1$, alors*

$$\Gamma(K) \subset (n+1)^{\frac{1}{p}} \Gamma_p(K).$$

Si $C(K')$ désigne l'enveloppe convexe de $K' = K \cup (-K)$, d'après le théorème de Carathéodory ([2], p. 35 ou [1], p. 123, ex. 9) un point x de $C(K') = \Gamma(K)$ s'écrit

$$x = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i x_i \quad \text{avec } s \leqslant n+1,\ \lambda_i \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{s} \lambda_i = 1 \text{ et } x_i \in K'.$$

Alors $x \in \lambda \Gamma_p(K') = \lambda \Gamma_p(K)$ avec $\lambda = \left(\sum_{i=1}^{s} \lambda_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant (n+1)^{\frac{1}{p}}$ d'où le résultat.

On a alors:

REMARQUE 2. *Soit E un evt séparé de dimension n, A un p-disque fermé borné de E et $B = \overline{\Gamma(A)}$, alors*

$$B \subset (n+1)^{\frac{1}{p}} A.$$

REMARQUE 3. *Soit E un evt séparé de dimension n, B un disque fermé borné et absorbant de E, alors il existe n points $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de B tels que $B \subset n\Gamma\{x_1, \ldots, x_n\}$.*

Si on applique le résultat de H. Auerbach, (v. [1], p. 35, ex. 15) à la norme $\|\ \|$ jauge de B, il existe une base $x_1, \ldots, x_n$ de E et des formes linéaires $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ sur E telles que $\|x_i\| = \|\varphi_i\| = 1$ et $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$. Alors, si $x \in B$,

$$\frac{x}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi_i(x)}{n} x_i \in \Gamma\{x_1, \ldots, x_n\}.$$

REMARQUE 4. *Si E est un evt séparé de dimension n et si A est un p-disque absorbant compact de E, il existe n points $x_1, \ldots, x_n$ de A tels que*

$$A \subset n(n+1)^{\frac{2}{p}} \Gamma_p\{x_1, \ldots, x_n\}.$$

D'après les Remarques 2 et 3, $B = \overline{\Gamma(A)} \subset n\Gamma\{y_1, \ldots, y_n\}$ avec $y_1, \ldots, y_n \in B \subset (n+1)^{\frac{1}{p}} A$. Alors il est facile de voir à l'aide de la Remarque 1 que les points $x_i = \dfrac{1}{(n+1)^{\frac{1}{p}}} y_i$ répondent à la question.

REMARQUE 5. *Soit A une partie équilibrée d'un evt séparé E, U un voisinage de 0 p-disqué de E tel que $A \subset \lambda U$ pour un certain $\lambda > 0$ et $A \subset \delta U + L$ où L est un sous-espace vectoriel de dimension $\leqslant n$ et δ un nombre > 0. Alors, pour tout $\delta' > \delta$, il existe n points $x_1, \ldots, x_n \in \Gamma_p(A) + \delta' U$ tels que*

$$A \subset \delta' U + n(n+1)^{\frac{2}{p}} \Gamma_p\{x_1, \ldots, x_n\}.$$

Soit $N = \bigcap_{\lambda > 0} \lambda U$ et G un sous-espace vectoriel de L tel que $L = (N \cap L) \oplus G$, alors $\dim G = k \leqslant n$ et $A \subset \delta U + N + G$. Choisissons $\varepsilon > 0$ tel que $\delta < (\delta^p + \varepsilon^{\frac{1}{p}})^p < \delta'$, alors $A \subset \delta U + \varepsilon U + G \subset (\delta^p + \varepsilon^{\frac{1}{p}})^p U + G$ car U est p-disqué et si on pose

$$B = \overline{[\Gamma_p(A) + (\delta^p + \varepsilon^p)^{\frac{1}{p}} U] \cap G},$$

B est un p-disque fermé borné et absorbant dans G. Pour un point x de A on a $x = (\delta^p+\varepsilon^p)^{\frac{1}{p}} y + z$ avec $y \in U$ et $z \in G$ donc $z \in A + (\delta^p+\varepsilon^p)^{\frac{1}{p}} U \subset B$.

D'après la Remarque 4, puisque G est de dimension $k \leqslant n$, on a $B \subset k(k+1)^{\frac{2}{p}} \Gamma_p\{x_1, \ldots, x_n\}$ avec $x_1, \ldots, x_n \in B$ (en rajoutant au besoin des x_i nuls); et finalement

$$x \in \delta' U + n(n+1)^{\frac{2}{p}} \Gamma_p\{x_1, \ldots, x_n\}.$$

Remarque 6. *Si on est dans les mêmes hypothèses que celles de la Remarque 5 alors, en posant* $\frac{2}{p}+1 = q$, *pour tout* $\delta' > \delta$ *il existe* n *points* $x_1, \ldots, x_n \in \Gamma_p(A)$ *tels que*

$$A \subset \delta' 2^{\frac{1}{p}} (n+1)^q U + (n+1)^q \Gamma_p\{x_1, \ldots, x_n\}.$$

D'après la Remarque 5, $A \subset \delta' U + n(n+1)^{\frac{2}{p}} \Gamma_p\{y_1, \ldots, y_n\}$ avec $y_1, \ldots, y_n \in \Gamma_p(A) + \delta' U$. Alors $y_i = x_i + z_i$ avec $x_i \in \Gamma_p(A)$ et $z_i \in \delta' U$ donc

$$\begin{aligned} A &\subset \delta' U + n(n+1)^{\frac{2}{p}} \delta' U + n(n+1)^{\frac{2}{p}} \Gamma_p\{x_1, \ldots, x_n\} \\ &\subset \delta'[1+n^p(n+1)^2]^{\frac{1}{p}} U + n(n+1)^{\frac{2}{p}} \Gamma_p\{x_1, \ldots, x_n\} \\ &\subset \delta' 2^{\frac{1}{p}} (n+1)^q U + (n+1)^q \Gamma_p\{x_1, \ldots, x_n\}. \end{aligned}$$

Remarque 7. Nous aurons également besoin des propriétés bien connues suivantes concernant l'approximation:

a) si $A \subset \lambda A'$ pour un certain $\lambda > 0$ alors $d_n(A, B) \leqslant \lambda d_n(A', B)$,

b) si B est p-disqué $d_n(\Gamma_p(A), B) = d_n(A, B)$.

Démonstration du lemme fondamental. a) Soit (s_n) une suite de nombres > 0, à décroissance rapide, fixée une fois pour toutes. Pour toute partie P de E, on pose $\delta_n(P, U) = d_n(P, U) + s_n$. La suite $(\delta_n(A, U))$ est alors aussi à décroissance rapide.

Pour tout $n \geqslant 1$ soit $m_n = 2^{(2^n)}$ et $m_0 = 0$.

Soit α_1 un nombre tel que $d_{m_1}(A, U) < \alpha_1 < \delta_{m_1}(A, U)$ il existe un sous-espace L_1 de E, de dimension $\leqslant m_1$ tel que $A \subset \alpha_1 U + L_1$ et d'après la Remarque 6

$$(\Lambda_1) \quad A \subset \delta_{m_1}(A, U) 2^{\frac{1}{p}} (m_1+1)^q U + (m_1+1)^q \Gamma_p\{x_{1,1}, \ldots, x_{1,m_1}\}$$
$$\text{avec} \quad x_{1,1}, \ldots, x_{1,m_1} \in \Gamma_p(A).$$

Posons $B_1 = A$ et soit

$$(\Lambda_2') \quad B_2 = [B_1 - (m_1+1)^q \Gamma_p\{x_{1,1}, \ldots, x_{1,m_1}\}] \cap 2^{\frac{1}{p}} \delta_{m_1}(B_1, U)(m_1+1)^q U,$$

B_2 est encore un borné de E et

$$B_2 \subset B_1 + (m_1+1)^q \Gamma_p(B_1) \subset 2^{\frac{1}{p}} (m_1+1)^q \Gamma_p(B_1).$$

D'après la Remarque 7 on a donc pour tout entier k

$$(\Lambda_2'') \qquad d_k(B_2, U) \leqslant 2^{\frac{1}{p}} (m_1+1)^q d_k(A, U).$$

On recommence alors avec B_2. On construit ainsi par itération une suite $(B_n)_{n\geqslant 1}$ de bornés de E telle que $A = B_1$, pour $n \geqslant 1$

$$(\Lambda_n) \quad B_n \subset 2^{\frac{1}{p}} \delta_{m_n}(B_n, U)(m_n+1)^q U + (m_n+1)^q \Gamma_p\{x_{n,1}, \ldots, x_{n,m_n}\}$$

avec $x_{n,1}, \ldots, x_{n,m_n} \in \Gamma_p(B_n)$

$$(\Lambda_{n+1}') \quad B_{n+1} = [B_n - (m_n+1)^q \Gamma_p\{x_{n,1}, \ldots, x_{n,m_n}\}] \cap 2^{\frac{1}{p}} \delta_{m_n}(B_n, U)(m_n+1)^q U$$

et pour $n \geqslant 2$ et pour tout entier $k \geqslant 0$

$$(\Lambda_n'') \qquad d_k(B_n, U) \leqslant 2^{\frac{n-1}{p}} \prod_{i=1}^{n-1} (m_i+1)^q d_k(A, U).$$

b) Il est facile de voir que $\delta_k(B_n, U)$ est lié à $\delta_k(A, U)$ par une inégalité (Λ_n''') identique à l'inégalité (Λ_n'').

Soit r un entier $\geqslant 1$ donné, il existe deux entiers n et i uniques tels que $r = m_0 + \ldots + m_{n-1} + i$ avec $n \geqslant 1$ et $1 \leqslant i \leqslant m_n$.

On pose alors $z_r = 2^n (m_n+1)^q x_{n,i}$.

Soit x un point de A, on va montrer que x appartient à l'enveloppe disquée fermée de la suite (z_r).

D'après (Λ_n'), $x = y_n + \frac{1}{2} t_1 + \ldots + \frac{1}{2^n} t_n$ avec $y_n \in B_{n+1}$ et $t_i \in 2^i (m_i+1)^q \times \Gamma_p\{x_{i,1}, \ldots, x_{i,m_i}\}$.

Alors $\frac{1}{2} t_1 + \ldots + \frac{1}{2^n} t_n \in \Gamma(\{z_r\})$ et $y_n \in 2^{\frac{1}{p}} (m_n+1)^q \delta_{m_n}(B_n, U) U$. D'après l'inégalité (Λ_n''') pour $k = m_n$ on a donc $y_n \in 2^{\frac{n}{p}} \prod_{i=1}^{n} (m_i+1)^q \delta_{m_n}(A, U) U$.

Compte tenu de la forme de la suite (m_n), une majoration simple permet de voir que $y_n \in (m_n)^{\frac{1}{p}+3q} \delta_{m_n}(A, U) U$ et, comme la suite $(\delta_n(A, U))$ est à décroissance rapide, $y_n \to 0$ dans E.

c) Reste à montrer que la suite (z_r) est à décroissance rapide.

Pour $r = m_0 + \ldots + m_{n-1} + i$, $1 \leqslant i \leqslant m_n$ on a

$$r^a z_r = (m_0 + \ldots + m_{n-1} + i)^a 2^n (m_n + 1)^a x_{n,i}$$

donc $r^a z_r \in (m_0 + \ldots + m_{n-1} + i)^a 2^n (m_n + 1)^a \Gamma_p(B_n)$.

D'après les formules (Λ_n') et (Λ_{n-1}'') pour $k = m_{n-1}$, il vient

$$r^a z_r \in n^a m_n^a 2^n 2^{\frac{n-1}{p}} \prod_{i=1}^{n} (m_i + 1)^a \delta_{m_{n-1}}(A, U)\, U.$$

Là encore, compte tenu de la forme de la suite (m_n), il est facile de voir que

$$r^a z_r \in (m_{n-1})^{2(3q+2a+1)+\frac{1}{p}} \delta_{m_{n-1}}(A, U)\, U.$$

La conclusion résulte du fait que la suite $\big(\delta_n(A, U)\big)$ est à décroissance rapide.

§ 3. Conséquences du lemme fondamental.

THÉORÈME 1. *La bornologie de von Neumann d'un evt localement pseudo-convexe nucléaire est convexe.*

Preuve. Si B est un borné de cet evt E et U un voisinage de 0 de E, qu'on peut prendre p-disqué pour un certain p, la suite $\big(d_n(B, U)\big)$ est à décroissance rapide. Si $N = \bigcap_{\lambda > 0} \lambda U$, si E_U désigne l'espace vectoriel sous-jacent à E, muni de la p-semi-norme jauge de U et $\varphi\colon E_U \to \frac{E_U}{N}$ alors $\frac{E_U}{N}$ est p-normé, sa boule unité est $\varphi(U)$ et $\Big(d_n\big(\varphi(B), \varphi(U)\big)\Big)$ est à décroissance rapide. D'après le lemme fondamental, la partie bornée $\varphi(B)$ est à décroissance rapide dans l'espace localement p-convexe $\frac{E_U}{N}$. Son enveloppe disquée est alors bornée ([14]). Il existe donc un $\lambda > 0$ tel que $\Gamma\big(\varphi(B)\big) = \varphi\big(\Gamma(B)\big) \subset \lambda\varphi(U)$ donc

$$\Gamma(B) \subset \lambda U + N \subset \lambda U + \lambda U \subset 2^{1/p} \lambda U.$$

Comme un evt métrisable dont la bornologie de von Neumann est convexe est localement convexe ([9]) on a le

COROLLAIRE 1 (réponse à la question de S. Rolewicz). *Tout evt localement pseudo-convexe métrisable et nucléaire est localement convexe.*

Et comme tout evt localement pseudo-convexe nucléaire est limite projective d'une famille d'evt localement pseudo-convexes métrisables nucléaires, on a le

COROLLAIRE 2. *Tout evt localement pseudo-convexe nucléaire est localement convexe.*

On peut donner les définitions suivantes, généralisant celles de [4] et de [5]. Une suite (ξ_n) est diamétrale dans un evb E si, pour tout borné A, il existe un borné B avec $d_n(A, B) \leqslant \xi_n$.

Un evb complet est *nucléaire* s'il existe un $\alpha > 0$ tel que la suite $\big((n+1)^{-\alpha}\big)$ soit diamétrale. Alors pour tout $\beta > 0$, la suite $\big((n+1)^{-\beta}\big)$ est diamétrale.

Un evb complet est dit *ultranucléaire* s'il admet une suite diamétrale à décroissance rapide.

Enfin, un evt est *co-nucléaire* si sa bornologie de von Neumann est nucléaire.

COROLLAIRE 3. *La bornologie de von Neumann d'un evt localement pseudo-convexe co-nucléaire est convexe.*

En effet si B est un borné et U un voisinage de 0, il est facile de voir que la suite $\big(d_n(B, U)\big)$ est à décroissance rapide. Le résultat est alors fourni par la preuve du Théorème 1.

En particulier tout evt localement pseudo-convexe co-nucléaire métrisable est localement convexe.

THÉORÈME 2. *Tout evb séparé pseudo-convexe ultranucléaire est convexe.*

Preuve. Pour tout borné A il existe un borné B, qu'on peut prendre p-disqué pour un certain p, tel que la suite $\big(d_n(A, B)\big)$ soit à décroissance rapide. Il suffit alors d'appliquer le lemme fondamental dans l'espace p-normé E_B.

THÉORÈME 3. *Tout evb séparé p-convexe nucléaire est convexe.*

Preuve. Un tel evb est limite inductive bornologique d'une famille d'evb p-convexes nucléaires à base dénombrable. Chacun de ces evb est "p-Silva", et l'evt "p-Silva" qui lui est associé est localement p-convexe, conucléaire. La conclusion résulte alors du Corollaire 3.

§ 4. Cas des evt de Schwartz.

Les résultats précédents ne sont plus vrais dès qu'on prend des espaces plus généraux tels que les evt de Schwartz localement pseudo-convexes (même métrisables) ou des evb de Schwartz (et même de Silva) pseudo-convexes.

On trouvera dans [8] un exemple d'evb de Silva pseudo-convexe non p-convexe quelquesoit p $(0 < p \leqslant 1)$. Voici un exemple d'evt de Schwartz métrisable localement pseudo-convexe non localement p-convexe quelquesoit p $(0 < p \leqslant 1)$.

On prend une suite (p_n) de nombres décroissant vers 0, $0 < p_n \leqslant 1$. Soit $u_n = l_{p_{n+1}} \to l_{p_n}$ telle que $u_n\big((\xi_i)\big) = \left(\frac{\xi_i}{i^{\varepsilon_n}}\right)$ où $\varepsilon_n > 0$ est donné. Il est facile de voir que u_n est compacte. On pose alors

$$E_1 = \{(x, n),\ x \in l_{p_n},\ n \in \mathbf{N}^*\} \quad \text{avec } (x, n) = (x', n')$$

si $n' \geqslant n$ implique $x = u_n \dots u_{n'-1}(x')$. On identifie les couples égaux et on met sur E_1 les opérations algébriques suivantes, qui en font un espace vectoriel si $\xi = (x, n)$, $\eta = (y, m)$, $\lambda \in \boldsymbol{R}$ et $n \geqslant m$

$$\begin{aligned}\xi+\eta = (x, n)+(y, m) &= \big(u_m \dots u_{n-1}(x), m\big)+(y, m)\\ &= \big(u_m \dots u_{n-1}(x)+y, m\big)\end{aligned}$$

et $\lambda\xi = (\lambda x, n)$.

Si on pose $E_n = \{(x, n) \in E_1\}$ pour $n \geqslant 2$, la suite (E_n) est une suite décroissante de sous-espaces vectoriels de E_1, E_n étant vectoriellement isomorphe à l_{p_n}. Sur E_n on introduit par transport la p_n-norme

$$\|(x, n)\|_n = \|x\|_{p_n}.$$

E_n est alors un espace p_n-normé complet dont le module de convexité est p_n et les injections canoniques $i_n = E_{n+1} \to E_n$ sont compactes. Si $E = \bigcap_{n\geqslant 1} E_n$ est muni de la topologie limite projective, E est un espace de Schwartz localement pseudo-convexe métrisable complet, non réduit à (0). E n'est localement p-convexe pour aucun p si on choisit les ε_n tels que $\sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n < +\infty$.

En effet, on peut voir facilement que le module de convexité de $E_n \cap E$ muni de la topologie induite par E_n est p_n. D'autre part si on choisit n_0 tel que $\sum_{i=n_0}^{+\infty} \varepsilon_i < 1$ et que $p_{n_0}\left(\frac{1}{p}+1\right) < 1$, pour $n \leqslant n_0$ il n'existe pas de $\lambda > 0$ tel que $\Gamma_p(\lambda S_n \cap E) \subset S_{n_0} \cap E$, S_n représentant la boule unité de E_n, sinon le module de convexité de $E_{n_0} \cap E$ serait $\geqslant p$ ce qui contredit les inégalités $p_{n_0} < \dfrac{1}{\dfrac{1}{p}+1} < p$. Pour $n > n_0$, si $e_k = (\xi_{k,j})$ avec $\xi_{k,j} = 1$ si $k = j$, $\xi_{k,j} = 0$ si $k \neq j$. $(e_k, n) \in S_n \cap E$ pour tout entier k et si on pose $y_K = \sum_{k=1}^{K} \dfrac{1}{K^{\frac{1}{p}}} e_k$, on a $(y_K, n) \in \Gamma_p(S_n \cap E)$ mais

$$\|(y_K, n)\|_{n_0} = \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{K^{\frac{p_{n_0}}{p}} k^{(\varepsilon_{n_0}+\dots+\varepsilon_{n-1})p_{n_0}}} \geqslant K^{1-p_{n_0}\left(\frac{1}{p}+\varepsilon_{n_0}+\dots+\varepsilon_{n-1}\right)}.$$

Dans le dernier terme de cette inégalité, l'exposant est positif donc $\lim_{K\to+\infty} \|(y_K, n)\|_{n_0} = +\infty$ et pour tout $\lambda > 0$ et tout entier n on a $\Gamma_p(S_n \cap E) \not\subset \lambda S_{n_0} \cap E$. Comme $(\lambda S_n \cap E)_{\lambda>0, n\in N^*}$ est une base de voisinages de 0 de E, E ne peut être localement p-convexe.

§ 5. Autres caractérisations des evt nucléaires non localement convexes. B. S. Mityagin a donné dans [10] plusieurs définitions possibles d'un espace localement convexe nucléaire et a montré qu'elles étaient toutes équivalentes. Ces définitions peuvent être facilement généralisées à des evt quelconques. Le problème se pose de savoir si leur équivalence est encore vraie.

En suivant pas à pas les démonstrations de ([10], § 2 et § 3), on peut démontrer les résultats suivants:

Pour deux parties A et B d'un espace vectoriel, posons $N(A, B)$ la borne inférieure des nombres N tels qu'il existe $x_1, \dots, x_N \in E$ avec

$$\bigcup_{k=1}^{N} (x_k+B) \supset A.$$

Soit $\varrho(A, B) = \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \dfrac{\log\log N(A, \varepsilon B)}{\log \dfrac{1}{\varepsilon}}$ et $|x|_A = \inf\{t > 0, x \in tA\}$.

Si E est un evt localement p-convexe, les assertions suivantes sont équivalentes:

a) *E est nucléaire.*

b) *Il existe une constante C $(0 < C < +\infty)$ telle que pour tout voisinage U de 0 il existe un voisinage V de 0 avec $\varrho(V, U) \leqslant C$.*

c) *Pour tout voisinage U de 0, il existe un voisinage V de 0 et une suite (x_n) de E tels que $\sum_n |x_n|_U < +\infty$ et V soit contenu dans l'enveloppe l_p-disquée de la suite (x_n).*

Si, de plus, E est métrisable, les assertions précédentes sont équivalentes aux suivantes:

d) *Il existe une constante C $(0 < C < +\infty)$ telle que pour tout compact K et tout voisinage U de 0 on ait $\varrho(K, U) \leqslant C$.*

e) *Il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout compact K et tout voisinage U de 0 on ait $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha d_n(K, U) = 0$.*

Un evt localement p-convexe vérifiant une des conditions précédentes est alors localement convexe.

Soit E un evt métrisable et $0 < p \leqslant 1$. S'il existe une constante C $(0 < C < +\infty)$ telle que pour tout compact K de E et tout voisinage U de 0 on ait $\varrho(\Gamma_p(K), \Gamma_p(U)) \leqslant C$, alors pour tout voisinage U de 0, il en existe un autre V tel que $\varrho(\Gamma_p(V), \Gamma_p(U)) \leqslant 2C$.

La conjonction de ces résultats et du lemme fondamental fournit la réponse à un deuxième problème posé par S. Rolewicz au Colloque d'Analyse Fonctionnelle de Bordeaux 1971 (voir [13], Problème 8), à savoir: il n'existe pas d'espace métrisable localement pseudo-convexe et non localement convexe qui vérifie la propriété e).

Bibliographie

[1] N. Bourbaki, *Espaces vectoriels topologiques*, Chap. I et II, Paris.
[2] H. G. Eggleston, *Convexity*, Cambridge Tracts in Math. and Math. Phys. 47.
[3] C. Fenske, E. Schock, *Nuklearität und lokale Konvexität von Folgenraümen*, Math. Nach. 45 (1970), p. 327–335.
[4] H. Hogbe-Nlend, *Théorie des Bornologies et Applications*, Lectures Notes 213 (1971).
[5] — *Ultranucléarité et bornologie à décroissance très rapide*, Séminaire Schwartz, Ecole Polytechnique (1970–71).
[6] J. P. Ligaud, *Sur les rapports entre topologies et bornologies pseudo-convexes*, C. R. Acad. Sc. Sér. A T. 271, (1970), p. 1058–1060.
[7] — *Solution d'un problème de S. Rolewicz sur les espaces nucléaires*, C. R. Acad. Sc. Sér. A T. 273, (1971), p. 113–114.
[8] — *Sur les limites inductives de suites d'espaces localement pseudo-convexes*, Colloque d'Analyse Fonctionnelle Bordeaux (1971). Bull. Soc. Math. Fr. (à paraître).
[9] S. Mazur, W. Orlicz, *Sur les espaces métriques linéaires (I)*; Studia Math. 10 (1948), p. 184–208.
[10] B. S. Mityagin, *Approximate dimension and bases in nuclear spaces*, Russian Math. Surveys 16 (1961), p. 59–127.
[11] A. P. Robertson, W. Robertson, *Topological vector spaces*, Cambridge 1966.
[12] S. Rolewicz, Colloquium on Nuclear Spaces and Ideals in Operator Algebras, III. *Unsolved problems*, Studia Math. 38 (1969), p. 477–478.
[13] — *Open problems on linear metric spaces*, Colloque d'Analyse Fonctionnelle Bordeaux (1971). Bull. Soc. Math. Fr. (à paraître).
[14] L. Waelbroeck, *Fonctions différentiables et petite bornologie*, C. R. Acad. Sci. Sér. A T. 267 (1968), p. 220–222.

UNIVERSITÉ BORDEAUX I
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Received November 5, 1971 (444)

STUDIA MATHEMATICA T. XLV. (1973)

Factorization of compact operators and applications to the approximation problem*

by

T. FIGIEL (Warszawa)

Abstract. In the present paper we give necessary and sufficient conditions for a Banach space Z to have one of the following factorization properties: (i) every compact operator, which can be uniformly approximated by finite dimensional operators, admits a factorization through Z, (ii) any compact operator admits a factorization through a subspace of Z.

As a consequence we obtain, for example, that every compact operator admits a compact factorization through a reflexive space. Hence the approximation problem can be reduced to the case of reflexive spaces. (It is a negative answer to one of Grothendieck's conjectures.)

Some related problems concerning L_p spaces and the traces of nuclear operators are also considered.

1. Introduction. Factorization problems for compact operators have recently been treated by Johnson [4]. He discussed, however, only the case of those operators $T: X \to Y$, which admit an approximation by finite dimensional operators in the norm topology of $B(X, Y)$. We recall that if either X^* or Y has the approximation property (abbreviated a.p.), then every compact operator in $B(X, Y)$ admits such an approximation. Since the approximation problem, i.e. the question "Does every Banach space have the a.p.?", is still open, it is not known whether Johnson's restriction is essential (1)

This restriction can, however, be avoided if, instead of factorization through a given space, one considers factorization through its subspaces. Moreover, this approach permits us to obtain some new information concerning the approximation problem. In particular, we obtain the result that the approximation problem and the question "Does every reflexive Banach space have the a.p.?" are equivalent. This shows that not both of the conjectures formulated in [2] (chap. II, p. 135) and [7] can be true.

---

* This paper is a part of the author's Ph. D. thesis prepared under the supervision of Professor A. Pełczyński at the Warsaw University.

(1) Added in proof. The approximation problem has recently been solved (in the negative) by P. Enflo. (His remarkable paper *A counterexample to the approximation problem* will appear in Acta Math.) Some later related results are mentioned at the end of the present paper.