The main result of the paper [5] says that if M is a maximal ideal of a commutative Banach algebra $\mathscr{A}$ belonging to its Shilov boundary $\Gamma(\mathscr{A})$, then M consists of joint topological divisors of zero (for the definition and properties of the Shilov boundary cf e.g. [4], the only property we need here is that $\Gamma(\mathscr{A})$ is never void for a commutative Banach algebra with unit element).

As a corollary to this result we obtain the solution of the mentioned above problem of Dash for an arbitrary complex Banach space X.

THEOREM. *Let X be a complex Banach space and $A_1, \ldots, A_n$ an n-tuple of pairwise commuting elements of $L(X)$. Then the joint approximate point spectrum $\sigma_\pi(A_1, \ldots, A_n)$ is a non-void subset of C^n.*

Proof. Let $\mathscr{A}$ be a commutative closed subalgebra of $L(X)$ containing the elements $A_1, \ldots, A_n$ and the identity operator. Let f be a multiplicative linear functional in $\Gamma(\mathscr{A})$ (we identify the multiplicative linear functionals with their kernels). It is sufficient to show that $(f(A_1), \ldots, f(A_n))$ belongs to the joint approximate point spectrum $\sigma_\pi(A_1, \ldots, A_n)$. We put $z_i = f(A_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, so that $A_i - z_i I$ belong to $M = f^{-1}(0)$ and thus by the main result of [5] there is a sequence of operators $(C_k) \subset \mathscr{A}$, $\|C_k\| = 1$, such that

$$\lim_k (A_i - z_i I) C_k = 0$$

for $i = 1, 2, \ldots, n$. If we had $\sum_{i=1}^{n} B_i(A_i - z_i I) = I$ for some $B_i \in L(X)$, then multiplying both sides by C_k on the right we would obtain

$$C_k = \sum_{i=1}^{n} B_i(A_i - z_i I) C_k;$$

this is impossible since the right hand tends to zero when k increases to infinity, while the norm of the left hand equals to one for every k.

References

[1] J. Bunce, *The joint spectrum of commuting non-normal operators*, Proc. Amer. Math. Soc. 29 (1971), pp. 499–505.

[2] A. T. Dash, *Joint spectra*, Stud. Math., this volume, pp. 225–237.

[3] — *A note on joint approximate point spectrum*, Indiana University and University of Guelph, preprint.

[4] C. E. Rickart, *General theory of Banach algebras*, Princeton 1960.

[5] W. Żelazko, *On a certain class of non-removable ideals in Banach algebras*, Stud. Math. 44 (1972), pp. 87–92.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUTE OF MATHEMATICS, POLISH ACADEMY OF SCIENCES

Received October 15, 1971 (462)

STUDIA MATHEMATICA, T. XLV. (1973)

Über Greensche Funktionen singulärer elliptischer Differentialoperatoren

von

BERND LANGEMANN (Rostock)

Zusammenfassung. Die Arbeit enthält einen Satz über die Einbettung des Raumes $W^{2m}_{2,q(x)}(R_n)$ (Sobolev–Raum mit Gewichtsfunktion) in $L_2(R_n)$ und eine Aussage über die Zugehörigkeit der Greenschen Funktionen von singulären elliptischen Differentialoperatoren zu Räumen $W^{k}_{2,q(x,y)}(R_n \times R_n)$, wobei k nicht notwendig ganzzahlig ist.

0. Einer Bemerkung von H. Triebel [13] zufolge, wird untersucht, unter welchen Voraussetzungen sich die Umkehroperatoren von singulären elliptischen Differentialoperatoren als Integraloperatoren schreiben lassen und welche Eigenschaften die Greenschen Funktionen dieser Operatoren besitzen. Grundlage der Überlegungen ist die Ungleichung

$$c_1 \|u\|_{W^{2m}_{2,q(x)}(R_n)} \leqslant \|Au\| \leqslant c_2 \|u\|_{W^{2m}_{2,q(x)}(R_n)},$$

deren Gültigkeit für die Operatoren $Q^m = (-\Delta + q(x))^m$, $q(x) \geqslant 1$, $m = 1, 2, \ldots$, und $A = \sum_{|\alpha| \leqslant 2m} a_\alpha(x) D^\alpha$, $N(A) = \{0\}$ bewiesen wird. Die Koeffizienten $a_\alpha(x)$ von A unterliegen einer Elliptizitätsbedingung und dürfen zusammen mit ihren partiellen Ableitungen „nicht zu groß" werden. Der Koeffizient $a_0(x)$ stimmt im wesentlichen mit $q(x)^m$ überein. Beide Operatoren werden im Raum $L_2(R_n)$ betrachtet und sind für Funktionen aus $C_0^\infty(R_n)$ definiert. Das Definitionsgebiet kann zu dem Sobolev-Raum mit Gewichtsfunktion $W^{2m}_{2,q(x)}(R_n)$ ausgedehnt werden. Mit Hilfe dieser Ungleichung können bekannte Eigenschaften von Q^m auf A übertragen werden. Als Zwischenergebnis erhält man dabei unter der Annahme, daß sich $q(x)$ für großes $|x|$ wie $|x|^s$, $s > 0$, verhält, eine Aussage über die Zugehörigkeit des Einbettungsoperators von $W^{2m}_{2,q(x)}(R_n)$ in $L_2(R_n)$ zu Klassen von vollstetigen Operatoren $\mathfrak{s}_{q,p}$. Es erweist sich, daß der Umkehroperator A^{-1} genau dann als Integraloperator mit einer Greenschen Funktion $G(x, y) \in L_2(R_n \times R_n)$ (Hilbert-Schmidt-Operator) geschrieben werden kann, wenn die Bedingung $m > \frac{n}{4}\left(1 + \frac{2}{s}\right)$ erfüllt ist. Ist noch

$m > \frac{n}{4(1-\varkappa)}\left(1+\frac{2}{s}\right)$, $0 < \varkappa < 1$, so gehört $G(x, y)$ zu „gebrochenen" Sobolev-Räumen $W^{2m\varkappa}_{2,q(x)+q(y)}(R_n \times R_n)$. Diese Räume sind nach dem Verfahren von Peetre [10] als Interpolationsräume zwischen $L_2(R_n \times R_n)$ und $W^{2m}_{2,q(x)+q(y)}(R_n \times R_n)$ erklärt.

1. Einige Ungleichungen. Der reelle euklidische n-dimensionale Raum wird mit R_n bezeichnet, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ ist ein allgemeiner Punkt dieses Raumes. $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ heißt Multiindex, wenn α_i, $i = 1, \ldots, n$, nichtnegative ganze Zahlen sind. $\beta \leqslant \alpha$ bedeutet $\beta_i \leqslant \alpha_i$ für $i = 1, \ldots, n$, außerdem ist $\alpha+\beta = (\alpha_1+\beta_1, \ldots, \alpha_n+\beta_n)$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$. Wie üblich schreibt man D^α als Ankürzung für die partielle Ableitung $\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1}_{x_1} \ldots \partial^{\alpha_n}_{x_n}}$.

Unter $C_0^\infty(R_n)$ (¹) versteht man die Gesamtheit der komplexwertigen, in R_n beliebig oft differenzierbaren finiten Funktionen. $L_2(R_n)$ (¹) ist der Hilbertraum der in R_n komplex-wertigen, meßbaren Funktionen u mit $\int_{R_n} |u|^2 dx < \infty$. Norm und Skalarprodukt in L_2 werden mit $\| \ \|$ bzw. $(,)$ bezeichnet. Es wird eine in R_n erklärte, reellwertige und beliebig oft differenzierbare Funktion $q(x)$ benötigt, für die folgende Voraussetzungen gemacht werden:

(i) $q(x) \geqslant 1$ für $x \in R_n$,

(ii) $|D^\alpha q(x)| \leqslant K q(x)^{1+\sigma|\alpha|}$, $\sigma < \frac{1}{2}$, K unabhängig von x,

(iii) $q(x) \to \infty$ für $|x| \to \infty$,

(iv) als Verschärfung von (iii): $0 < c_1 < c_2$, $s > 0$,

$$c_1(|x|^s+1) \leqslant q(x) \leqslant c_2(|x|^s+1).$$

Definition 1. Der Raum $W^m_{2,q(x)}(R_n)$ (¹) ist die Vervollständigung von C_0^∞ in der Metrik $\| \ \|_1$

$$\|u\|_1^2 = \int_{R_n} \sum_{|\alpha| \leqslant m} |D^\alpha u|^2 q(x)^{m-|\alpha|} dx, \tag{1}$$

für $q(x)$ wird (i) vorausgesetzt.

Dieser Raum (Sobolev-Raum mit Gewichtsfunktion) ist identisch mit dem bekannten Sobolev-Raum W_2^m, wenn $q(x)$ auch nach oben beschränkt ist. $W^m_{2,q(x)}$ ist wegen $\|u\|_1 > \|u\|$ in L_2 einbettbar.

Für $u \in C_0^\infty$ wird eine zweite Norm betrachtet:

$$\|u\|_2^2 = \int_{R_n} \Big(\sum_{|\alpha| = m} |D^\alpha u|^2 + q(x)^m |u|^2 \Big) dx. \tag{2}$$

(¹) Der Zusatz „R_n" wird im folgenden weggelassen.

Satz 1. *Genügt $q(x)$ den Voraussetzungen* (i) *und* (ii), *so sind die Normen* $\| \ \|_1$ *und* $\| \ \|_2$ *äquivalent.*

Beweis. Es ist das Bestehen der Ungleichung $c_1\|u\|_1 \leqslant \|u\|_2 \leqslant \|u\|_1$, $0 < c_1$, $u \in C_0^\infty$ zu zeigen. Die rechte Seite davon ist klar. Ist $1 \leqslant |\alpha| \leqslant m-1$ und bezeichnet η einen Multiindex mit $|\eta| = 1$, für den $\eta \leqslant \alpha$ gilt, so erhält man durch partielle Integration, da Randintegrale wegen $u \in C_0^\infty$ nicht auftreten

$$\int_{R_n} |D^\alpha u|^2 q(x)^{m-|\alpha|} dx = -\int_{R_n} D^{\alpha-\eta} u \cdot D^{\alpha+\eta} \bar{u}\, q(x)^{\frac{m-(|\alpha|-1)}{2}+\frac{m-(|\alpha|+1)}{2}} dx - \int_{R_n} D^{\alpha-\eta} \bar{u} D^\alpha u D^\eta q(x)^{m-|\alpha|} dx.$$

Benutzt man zur Abschätzung der beiden Integrale auf der rechten Seite die elementare Ungleichung

$$|AB| \leqslant \varepsilon |A|^2 + C_\varepsilon |B|^2, \quad \varepsilon > 0, \ C_\varepsilon \to \infty \text{ für } \varepsilon \to 0, \tag{3}$$

sowie zur Abschätzung des zweiten Integrals die Formel

$$|D^\eta q(x)^{m-|\alpha|}| \leqslant K \cdot q(x)^{m-|\alpha|+\frac{1}{2}},$$

die aus (ii) folgt, so erhält man

$$\int_{R_n} |D^\alpha u|^2 q(x)^{m-|\alpha|} dx \leqslant \varepsilon \int_{R_n} |D^{\alpha+\eta} u|^2 q(x)^{m-(|\alpha|+1)} dx + C_\varepsilon \int_{R_n} |D^{\alpha-\eta} u|^2 q(x)^{m-(|\alpha|-1)} dx.$$

Das mit C_ε multiplizierte Integral wird auf die gleiche Weise weiter abgeschätzt. Summiert man dann alle Ungleichungen für $1 \leqslant |\alpha| \leqslant m-1$, so folgt für genügend kleines ε

$$\int_{R_n} \sum_{1 \leqslant |\alpha| \leqslant m-1} |D^\alpha u|^2 q(x)^{m-|\alpha|} dx \leqslant \varepsilon \int_{R_n} \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|^2 dx + C_\varepsilon \int_{R_n} q(x)^m |u|^2 dx. \tag{4}$$

Daraus ergibt sich die Ungleichung $c_1\|u\|_1 \leqslant \|u\|_2$. Wie aus dem Beweis ersichtlich ist, gilt (4) auch für $q(x) \equiv 1$ ([1], Satz 3,4, S. 25).

Mit $\| \ \|_{W^m_{2,q(x)}}$ soll irgendeine, zu $\| \ \|_1$ äquivalente Norm des Raumes $W^m_{2,q(x)}$ gemeint sein, dabei werden für $q(x)$ die passenden Voraussetzungen gemacht.

Im Raum L_2 wird jetzt der Operator $Q = -\Delta + q(x)$, $D(Q) = C_0^\infty$ (²) betrachtet. Δ bedeutet wie üblich den n-dimensionalen Laplace-Operator $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$.

(²) $D(Q)$: Definitionsgebiet von Q

SATZ 2. *Sind für* $q(x)$ *die Voraussetzungen* (i), (ii), (iii) *erfüllt, so gilt für* $u \in C_0^\infty$, $m = 1, 2, \ldots$ *die Ungleichung*

$$c_1 \|u\|^2_{W^m_{2,q(x)}} \leqslant (Q^m u, u) \leqslant c_2 \|u\|^2_{W^m_{2,q(x)}}, \qquad 0 < c_1. \tag{5}$$

Beweis. Bezeichnen $\pi_\nu^{(k)}\big(-\Delta, q(x)\big)$, $\nu = 1, \ldots, \binom{m}{k}$ alle verschiedenen Permutationen von k Elementen $(-\Delta)$ und $m-k$ Elementen $q(x)$ so erhält man durch formales Ausrechnen

$$(Q^m u, u) = \sum_{k=0}^{m} \sum_{\nu=1}^{\binom{m}{k}} \Big(\pi_\nu^{(k)}\big(-\Delta, q(x)\big) u, u\Big).$$

Die einzelnen Skalarprodukte werden durch partielle Integration und durch Differentiationen in mehreren Schritten umgeformt. Es folgt für das einzelne Skalarprodukt:

$$\int_{R_n} \Big((-\Delta)^{s_1} q(x)^{t_1} \ldots (-\Delta)^{s_m} q(x)^{t_m} u\Big) \bar{u}\, dx = \int_{R_n} \sum_{|\alpha|=k} q(x)^{m-k} |D^\alpha u|^2 dx +$$
$$+ \int_{R_n} \sum_{\substack{|\alpha|, |\beta| \leqslant k \\ |\alpha|+|\beta|+|\gamma|=2k \\ 1 \leqslant |\gamma|}} c_{\alpha,\beta,\gamma} (D^\alpha u)(D^\beta \bar{u}) \prod_{i=1}^{m} \big(D^{\gamma^{(i)}} q(x)^{t_i}\big) dx, \text{ (3)}$$

$s_1 + \ldots + s_m = k$, $t_1 + \ldots + t_m = m-k$, $\gamma = \gamma^{(1)} + \ldots + \gamma^{(m)}$ (Multiindex), $c_{\alpha,\beta,\gamma}$ natürliche Zahlen.

Das zweite Integral (mit $\mathscr{I}_{k,\nu}$ abgekürzt) läßt sich mit Hilfe von $|D^\gamma q(x)^t| \leqslant K q(x)^{t+\sigma|\gamma|} \leqslant \varepsilon q(x)^{t+\frac{1}{2}|\gamma|} + C_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, abschätzen. Die linke Seite dieser Ungleichung folgt aus (ii), die rechte Seite ist wegen $1 \leqslant |\gamma|$, $\sigma < \frac{1}{2}$ und (iii) richtig.

$$|\mathscr{I}_{k,\nu}| \leqslant K \int_{R_n} \sum_{\substack{|\alpha|, |\beta| \leqslant k \\ |\alpha|+|\beta|+|\gamma|=2k \\ 1 \leqslant |\gamma|}} |D^\alpha u|\, |D^\beta u|\, q(x)^{m-k+\sigma|\gamma|} dx$$
$$\leqslant \varepsilon \int_{R_n} \sum_{|\alpha|, |\beta| \leqslant k} |D^\alpha u| q(x)^{\frac{m-|\alpha|}{2}} |D^\beta u| q(x)^{\frac{m-|\beta|}{2}} dx +$$
$$+ C_\varepsilon \int_{R_n} \sum_{|\alpha|, |\beta| \leqslant k} |D^\alpha u|\, |D^\beta u|\, dx \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon \int_{R_n} \sum_{|\alpha| \leqslant k} |D^\alpha u|^2 q(x)^{m-|\alpha|} dx + C_\varepsilon \int_{R_n} |u|^2 dx \text{ (3)}, \qquad \varepsilon > 0.$$

Der letzte Teil dieser Abschätzung folgt nach (3) und (4) (für $q(x) \equiv 1$).

(3) Konstanten werden oft mit gleichen Buchstaben bezeichnet, ohne daß numerische Gleichheit ausgedrückt wird.

Für $\mathscr{I} = \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{\nu=1}^{\binom{m}{k}} \mathscr{I}_{k,\nu}$ erhält man daraus

$$|\mathscr{I}| \leqslant \varepsilon \|u\|^2_{W^m_{2,q(x)}} + C_\varepsilon \|u\|^2_{L_2}, \qquad \varepsilon > 0.$$

Dies führt zusammen mit $(Q^m u, u) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \int_{R_n} \sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha u|^2 q(x)^{m-k} dx + \mathscr{I}$ zum Beweis der linken Seite der Ungleichung (5), wenn ε klein genug gewählt und $(Q^m u, u) \geqslant \|u\|^2$ berücksichtigt wird. Die rechte Seite von (5) ist klar.

Bemerkung. (5) bleibt richtig, wenn statt (iii): $q(x) \leqslant K$ gilt, wie eine entsprechende Abänderung des Beweises zeigt.

Da Q ein symmetrischer Operator ist, kann (5) auch in der Form

$$c_1 \|u\|_{W^{2m}_{2,q(x)}} \leqslant \|Q^m u\| \leqslant c_2 \|u\|_{W^{2m}_{2,q(x)}}, \qquad 0 < c_1 \tag{6}$$

geschrieben werden. Es wird gezeigt, daß für den (elliptischen) Operator

$$A = \sum_{|\alpha| \leqslant 2m} a_\alpha(x) D^\alpha, \qquad D(A) = C_0^\infty$$

eine entsprechende Ungleichung gilt, wenn die $a_\alpha(x)$ gewisse Eigenschaften besitzen.

Die Koeffizienten $a_\alpha(x)$ sind komplexwertige, beliebig oft differenzierbare, in R_n erklärte Funktionen mit folgenden Voraussetzungen:

(v) Für $|\alpha| = 2m$ ist $a_\alpha(x)$ gleichmäßig stetig und mit seinen partiellen Ableitungen bis zur Ordnung $2m$ beschränkt.

(vi) $\operatorname{Re} \sum_{|\alpha|=2m} (-1)^m a_\alpha(x) \xi^\alpha \geqslant c|\xi|^{2m}$, $c > 0$ (4) (Elliptizitätsbedingung, A heißt gleichmäßig stark elliptisch [3], S. 28)

(vii) Für $|\alpha| \leqslant 2m-1$ gilt $|a_\alpha(x)| \leqslant K q(x)^{m-\frac{1}{2}|\alpha|-\tau|\alpha|}$, $\tau > 0$.

(viii) $c\, q(x)^m \leqslant a_0(x)$, $c > 0$.

(ix) Für $|\gamma| \leqslant 4m$ und $|\alpha| \leqslant 2m$ gilt

$$|D^\gamma a_\alpha(x)| \leqslant K q(x)^{m-\frac{|\alpha|}{2}+\sigma|\gamma|}, \qquad \sigma < \tfrac{1}{2}.$$

Für die in (viii) auftretende Funktion $q(x)$ wird (i), (ii), (iii) vorausgesetzt. Man kann $q(x) = \sqrt[m]{a_0(x)}$ wählen.

SATZ 3. *Erfüllen die Koeffizienten von* A *die Voraussetzungen* (v) *bis* (ix), *so gilt für* $u \in C_0^\infty$

$$c_1 \|u\|^2_{W^{2m}_{2,q(x)}} \leqslant \|Au\|^2 + \|u\|^2 \leqslant c_2 \|u\|^2_{W^{2m}_{2,q(x)}}, \qquad 0 < c_1. \tag{7}$$

(4) Re: Realteil, $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \ldots \xi_n^{\alpha_n}$, $|\xi|^2 = \xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2$.

Beweis. Schreibt man $Au = Lu + Ru + a_0(x)u$, wobei L alle Ableitungen der Ordnung $2m$ und R alle Ableitungen niederer Ordnung enthält, so ist

$$\|Au\|^2 = (Au, Au) = \|Lu\|^2 + 2\operatorname{Re}(Lu, a_0(x)u) + $$
$$+ \|a_0(x)u\|^2 + \int_{R_n} \sum_{\substack{|\alpha|,|\beta|\leqslant 2m \\ 1\leqslant|\alpha|+|\beta|\leqslant 4m-1 \\ ||\alpha|-|\beta||<2m}} a_\alpha(x)\overline{a_\beta(x)} D^\alpha u D^\beta \bar{u}\,dx.$$

Die rechte Seite der behaupteten Ungleichung folgt daraus unter Benutzung von (3), (v) und (vii).

Wegen (v) und (vi) gilt nach [3], Satz 2:

$$c_1\|u\|^2_{W_2^{2m}} \leqslant \|Lu\|^2 + \|u\|^2 \leqslant c_2\|u\|^2_{W_2^{2m}}, \quad 0 < c_1. \tag{8}$$

Auf Grund von (v) und (vi) ist die quadratische Form (Lv, v), $v \in C_0^\infty$, gleichmäßig stark elliptisch und es sind alle Voraussetzungen der Gårdingschen Ungleichung erfüllt, [1], Satz 7,6, S. 78:

$$\operatorname{Re}(Lv, v) + c_1\|v\|^2 \geqslant c_2\|v\|^2_{W_2^m}, \quad c_1, c_2 > 0. \tag{9}$$

Das in der Zerlegung $\big(L(\sqrt{a_0(x)}u), \sqrt{a_0(x)}u\big) = \big(Lu, a_0(x)u\big) + \mathscr{I}$ auftretende Restintegral

$$\mathscr{I} = \int_{R_n} \sum_{\substack{|\alpha|=2m \\ \beta<\alpha}} \binom{\alpha}{\beta} a_\alpha(x)\sqrt{a_0(x)}\big(D^{\alpha-\beta}\sqrt{a_0(x)}\big)(D^\beta u)\bar{u}\,dx$$

läßt sich abschätzen, wenn man $|D^{\alpha-\beta}\sqrt{a_0(x)}| \leqslant K q(x)^{\frac{m}{2}+\sigma(|\alpha|-|\beta|)}$, als Folgerung aus (ix), verwendet:

$$|\mathscr{I}| \leqslant K \int_{R_n} \sum_{\substack{|\alpha|=2m \\ \beta<\alpha}} q(x)^{\frac{m}{2}} q(x)^{\frac{m}{2}+\sigma(|\alpha|-|\beta|)} |D^\beta u|\,|u|\,dx$$
$$\leqslant \varepsilon\|u\|^2_{W^{2m}_{2,q(x)}} + C_\varepsilon\|u\|^2.$$

Dabei wurden für die rechte Seite noch die Ungleichungen (3) und (4) sowie $q(x)^{m+\sigma(|\alpha|-|\beta|)} \leqslant \varepsilon q(x)^{m+\frac{|\alpha|-|\beta|}{2}} + C_\varepsilon$ (wegen $|\alpha|-|\beta| > 0$, $\sigma < \frac{1}{2}$ und (iii)) herangezogen. Zusammen mit (9), für $v = \sqrt{a_0(x)}u \in C_0^\infty$ und

$$\|\sqrt{a_0(x)}u\| \leqslant K\int_{R_n} q(x)^m|u|^2dx \leqslant \varepsilon\int_{R_n} q(x)^{2m}|u|^2dx + C_\varepsilon\int_{R_n}|u|^2dx$$

folgt daraus

$$2\operatorname{Re}\big(Lu, a_0(x)u\big) + C_\varepsilon\|u\|^2 \geqslant -\varepsilon\|u\|^2_{W^{2m}_{2,q(x)}}, \quad \varepsilon > 0. \tag{10}$$

Durch ähnliche Rechnungen wie oben erhält man unter Benutzung von (4) für $q(x) \equiv 1$:

$$\Big|\int_{R_n} \sum_{\substack{|\alpha|,|\beta|\leqslant 2m \\ 1\leqslant|\alpha|+|\beta|\leqslant 4m-1 \\ ||\alpha|-|\beta||<2m}} a_\alpha(x)\overline{a_\beta(x)} D^\alpha u D^\beta \bar{u}\,dx\Big| \leqslant \varepsilon\|u\|^2_{W^{2m}_{2,q(x)}} + C_\varepsilon\|u\|^2. \tag{11}$$

Geeignete Zusammenfassung von (8), (10), (11) führt dann zum Beweis der linken Seite der Ungleichung (7).

Satz 4. *Für A, mit den Voraussetzungen von Satz 3, gilt die Koerzitivitätsbedingung*

$$\operatorname{Re}(Au, u) + c_1\|u\|^2 \geqslant c_2\|u\|^2_{W^m_{2,q(x)}}, \quad c_1, c_2 > 0, \ u \in C_0^\infty. \tag{12}$$

Beweis. Für A wird dieselbe Zerlegung wie beim Beweis von Satz 3 benutzt. Aus (9) und den Relationen

$$\big(a_0(x)u, u\big) = c\int_{R_n} q(x)^m|u|^2dx, \ c > 0 \quad \text{und} \quad |(Ru, u)| \leqslant \varepsilon\|u\|^2_{W^m_{2,q(x)}} + C_\varepsilon\|u\|^2$$

folgt die Behauptung.

Bemerkung. Die Sätze 3 und 4 gelten auch für A^*. A^* ist der zu A formal-adjungierte Operator.

$$A^*u = \sum_{|\alpha|\leqslant 2m} a_\alpha^* D^\alpha u = \sum_{|\alpha|\leqslant 2m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha\big(\overline{a_\alpha(x)}u\big), \quad D(A^*) = C_0^\infty.$$

2. Einbettung von $W^{2m}_{2,q(x)}$ in L_2. Der Operator $Q = -\Delta + q(x)$, $D(Q) = C_0^\infty$ ist wesentlich selbstadjungiert, wenn $q(x)$ die Voraussetzung (i) erfüllt, [5], S. 95. Das bedeutet, daß der Operator $\bar{Q}$, die Abschließung von Q, ein selbstadjungierter Operator ist. Nach [7], wenn für $q(x)$ noch (ii) erfüllt ist, sind dann auch die Operatoren Q^m, $m = 2, 3, \ldots$ wesentlich selbstadjungiert. Daraus folgt, daß $\overline{Q^m} = \bar{Q}^m$ selbstadjungierte Operatoren sind. Nach Satz 2, Ungleichung (6), ist dann das Definitionsgebiet $D(\bar{Q}^m)$ von $\bar{Q}^m$ der Raum $W^{2m}_{2,q(x)}$, $\|\bar{Q}^m u\|$, $u \in W^{2m}_{2,q(x)}$ ist als Norm in diesem Raum verwendbar. Erfüllt $q(x)$ außerdem noch (iii), so besitzt $\bar{Q}$, und damit auch $\bar{Q}^m$, ein reines Punktspektrum, [4] oder [5], S. 230, dh. sein Spektrum besteht nur aus Eigenwerten endlicher Vielfachheit, die sich nicht im Endlichen häufen. Da außerdem $\bar{Q}^m$ positiv definit ist und sein Definitionsgebiet im Raum L_2 dicht liegt, denn C_0^∞ liegt in L_2 dicht, [3], Lemma 1, folgt aus dem Satz von Rellich, [9], S. 335, in Verbindung mit (6), daß jede beschränkte Menge aus $W^{2m}_{2,q(x)}$ in L_2 folgenkompakt ist. Der Einbettungsoperator, der jedes Element aus $W^{2m}_{2,q(x)}$ in sich überführt, das aber dann als zu L_2 gehörend angesehen wird, soll mit $I_{W^{2m}_{2,q(x)}\to L_2}$ bezeichnet werden. Nach den obigen Betrachtungen ist dieser Operator vollstetig. Ein vollstetiger Operator kann durch ausgeartete Operatoren approximiert werden. Es bezeichnet $\mathscr{L}(H', H)$ den Ring der linearen beschränkten Operatoren, die den Raum H' in H abbilden (Banachraum mit der üblichen Norm). $R(K)$ sei der Wertebereich des Operators K. Nach [6], S. 46 werden Approximationszahlen $s_j(\mathscr{T})$ eines vollstetigen Operators $\mathscr{T}$ aus $\mathscr{L}(H' H)$ wie folgt definiert:

$$s_{j+1}(\mathscr{T}) = \inf_{\substack{K\in\mathscr{L}(H',H)\\ \dim R(K)\leqslant j}} \|\mathscr{T}-K\|_{\mathscr{L}(H',H)}, \qquad j = 0, 1, \ldots$$

Unter Benutzung dieser Approximationszahlen wird die Klasse der vollstetigen Operatoren unterteilt in Klassen $\mathfrak{s}_{q,p}(H', H)$ [5] [14], Def. 2.

Satz 5. *Genügt $q(x)$ den Bedingungen* (i), (ii), (iv), *so gehört der Einbettungsoperator $I_{W^{2m}_{2,q(x)}}\to L_2$ zur Klasse $\mathfrak{s}_{\frac{n}{2m}\left(1+\frac{2}{s}\right),\infty}(W^{2m}_{2,q(x)}, L_2)$, aber er gehört nicht zu $\mathfrak{s}_{\frac{n}{2m}\left(1+\frac{2}{s}\right),p}(W^{2m}_{2,q(x)}, L_2)$ für $0<p<\infty$. $s>0$ ist der in* (iv) *auftretende Exponent.*

Beweis. Bezeichnet $Z(t)$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion der reellen Veränderlichen t mit $Z(t)\geqslant 0$, $Z(t) = 0$ für $|t|<\frac{1}{2}$, $Z(t) = 1$ für $|t|\geqslant 1$, so erfüllt $q_s(x) = Z(|x|)|x|^s+1$ die Voraussetzungen (i) bis (iv). Es wird zuerst die Richtigkeit der Behauptung für dieses spezielle $q_s(x)$ gezeigt. Bezeichnet $\lambda_j(\bar{Q})$, $j = 1, 2, \ldots$, die Eigenwerte von $\bar{Q}$, so gilt nach Formel (6) und [14]

$$s_j(I_{W^{2m}_{2,q(x)}\to L_2}) = \lambda_j^{-1}(\bar{Q}^m) = \lambda_j^{-m}(\bar{Q}).$$

Die Verteilung der Eigenwerte von $\bar{Q}$ ist bekannt. Für $N(\lambda)$, die Anzahl der mit ihrer Vielfachheit gezählten Eigenwerte von $\bar{Q}$, die kleiner als λ sind, gilt die asymptotische Formel für $\lambda\to\infty$, [12], S. 212:

$$N(\lambda) = c\int\limits_{q_s(x)<\lambda} \left(\lambda - q_s(x)\right)^{\frac{n}{2}} dx\left(1+o(1)\right), \qquad c>0.$$

Das Integral wird durch Einführen von Polarkoordinaten berechnet. Für genügend großes λ gibt es dann zwei Konstanten $0<c_1<c_2$ mit

$$c_1\lambda^{\frac{n}{2}+\frac{n}{s}} \leqslant N(\lambda) \leqslant c_2\lambda^{\frac{n}{2}+\frac{n}{s}}. \tag{13}$$

---

[5] $\mathfrak{s}_{q,p}(H', H) = \left\{\mathscr{T}\,|\,\mathscr{T}\in\mathscr{L}(H', H),\ \text{vollstetig}\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} s_k^p(\mathscr{T})\,k^{\frac{p}{q}-1}<\infty\right\}$, $0<p<\infty$, $0<q<\infty$,

$\mathfrak{s}_{q,\infty}(H', H) = \left\{\mathscr{T}\,|\,\mathscr{T}\in\mathscr{L}(H', H),\ \text{vollstetig}\ \sup\limits_{k=1,2,\ldots} s_k(\mathscr{T})\,k^{\frac{1}{q}}<\infty\right\}$, $0<q<\infty$.

Die Eigenwerte λ_j von $\bar{Q}$ können mehrfach auftreten. Nimmt man an, daß $\lambda_{j-1}<\lambda_j = \lambda_{j+1} = \ldots = \lambda_{j+l}<\lambda_{j+l+1}$, $l\geqslant 0$, so ist nach Definition von $N(\lambda)$:

$$N(\lambda_j) = \ldots = N(\lambda_{j+l}) = j-1 \quad \text{und} \quad N(\lambda_{j+l}+\varepsilon) = j+l$$

für $\varepsilon>0$, ε genügend klein. Aus der Abschätzung

$$j^{\frac{1}{q}}\lambda_j^{-m} \leqslant (j+l)^{\frac{1}{q}}\lambda_{j+l}^{-m} = [N(\lambda_{j+l}+\varepsilon)]^{\frac{1}{q}}\lambda_{j+l}^{-m} \leqslant c_2(\lambda_{j+l}+\varepsilon)^{\left(\frac{n}{2}+\frac{n}{s}\right)\frac{1}{q}}\lambda_{j+l}^{-m}$$

folgt für $q = \dfrac{n}{2m}\left(1+\dfrac{2}{s}\right)$ und $\varepsilon\to 0$ gleichmäßig in j: $j^{\frac{1}{q}}\lambda_j^{-m}\leqslant c_2$. Das ergibt den ersten Teil des Satzes. Zum Beweis des zweiten Teiles wird die Achse der reellen Zahlen j für $j\geqslant 1$ durch $[a^\nu, a^{\nu+1})$, $\nu = 0, 1, \ldots$ in Intervalle wachsender Länge eingeteilt. Es wird $a^{\frac{n}{2}+\frac{n}{s}} = 2\dfrac{c_2}{c_1}$ gewählt, dabei sind c_1, c_2 die Koeffizienten aus (13). Aus $a^\nu\leqslant\lambda_j\leqslant a^{\nu+1}$ folgt $j>N(a^\nu)\geqslant c_2 a^{\nu\left(\frac{n}{2}+\frac{n}{s}\right)}$.

Die Anzahl der Eigenwerte im Intervall $[a^\nu, a^{\nu+1})$ läßt sich nach unten abschätzen:

$$N(a^{\nu+1}) - N(a^\nu) \geqslant c_1 a^{(\nu+1)\left(\frac{n}{2}+\frac{n}{s}\right)} - c_2 a^{\nu\left(\frac{n}{2}+\frac{n}{s}\right)} = c_2 a^{\nu\left(\frac{n}{2}+\frac{n}{s}\right)}.$$

Für $q = \dfrac{n}{2m}\left(1+\dfrac{2}{s}\right)$ und $p\geqslant q$ folgt daraus

$$\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j^{-mp}j^{\frac{p}{q}-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{a^\nu\leqslant\lambda_j<a^{\nu+1}}\lambda_j^{-mp}j^{\frac{p}{q}-1}$$
$$\geqslant c_2\sum_{\nu=0}^{\infty}a^{-(\nu+1)mp}\,a^{\nu\left(\frac{n}{2}+\frac{n}{s}\right)\left(\frac{p}{q}-1\right)}\left(N(a^{\nu+1})-N(a^\nu)\right) = \infty.$$

Da $\mathfrak{s}_{q,p'}\subset\mathfrak{s}_{q,p}$ für $p'\leqslant p$, so gilt dieses Ergebnis für $0<p<\infty$.

Nimmt man jetzt statt $q_s(x)$ ein $q(x)$, für des allgemein (iv) gilt, so folgt die Richtigkeit des Satzes aus der Beziehung

$$c_1 s_j(I_{W^{2m}_{2,q_s(x)}\to L_2}) \leqslant s_j(I_{W^{2m}_{2,q(x)}\to L_2}) \leqslant c_2 s_j(I_{W^{2m}_{2,q_s(x)}\to L_2}).$$

3. Singuläre elliptische Differentialoperatoren. Aus dem Bestehen der Ungleichung (7) können für den Operator $A = \sum\limits_{|\alpha|\leqslant 2m} a_\alpha(x)D^\alpha$, dessen Koeffizienten die Voraussetzungen (v) bis (ix) erfüllen, einige Schlußfolgerungen gezogen werden. Es folgt, daß A eine Abschließung $\bar{A}$ gestattet $(D(\bar{A}) = W^{2m}_{2,q(x)})$ und daß $R(\bar{A})$, der Wertebereich von $\bar{A}$, eine abgeschlossene Menge, somit ein Teilraum von L_2 ist, denn die Einbettung von $W^{2m}_{2,q(x)}$ in L_2 ist kompakt. Es soll im folgenden mit A stets der abgeschlossene Operator gemeint sein. Setzt man voraus, daß $N(A) = \{u\,|\,u\in D(A),$

$Au = 0\}$, der Nullraum von A, nur aus dem Element 0 besteht, so gilt anstelle von (7) Ungleichung

$$c_1 \|u\|_{W^{2m}_{2,q(x)}} \leqslant \|Au\| \leqslant c_2 \|u\|_{W^{2m}_{2,q(x)}}, \qquad 0 < c_1. \tag{14}$$

Die rechte Seite ist klar. Die Richtigkeit der linken Seite wird indirekt bewiesen. Man nimmt an, daß es eine Folge $\{u_n\}$, $u_n \in D(A)$ gibt mit

$\|u_n\|_{W^{2m}_{2,q(x)}} = 1$ und $\|Au_n\| \leqslant \frac{1}{n}$.

$I_{W^{2m}_{2,q(x)} \to L_2}$ ist vollstetig, deshalb kann man annehmen, daß $\{u_n\}$ in L_2 konvergiert. Die linke Seite von (7) zeigt, daß $\{u_n\}$ dann auch in $W^{2m}_{2,q(x)}$ konvergiert. Bezeichnet u das Grenzelement, so folgt aus den Voraussetzungen $Au_n \to Au = 0$ und damit $u = 0$, was zum Widerspruch führt.

Aus der Koerzitivitätsbedingung (12) und [1], S. 102 (das dort zitierte Theorem 8,5 kann auf den hier vorliegenden Fall übertragen werden) folgt $\dim N(A) = \dim N(A^*)$. Somit ist $N(A^*) = \{0\}$ und für A^* gilt (14) ebenfalls.

Nach [8], S. 304 besteht der Zusammenhang $L_2 = N(A) \oplus \overline{R(A^*)} = N(A^*) \oplus R(A)$, wobei $\oplus$ die orthogonale Summe bezeichnet. Deshalb ist $R(A) = R(A^*) = L_2$ und es existiert der zu A inverse Operator A^{-1}. Dieser ist auf ganz L_2 definiert. A^{-1} soll als Operator aus $\mathscr{L}(L_2, L_2)$ verstanden werden. Es wird jetzt der Operator $(A^* A)^{\frac{1}{2}}$ betrachtet. $A^* A$ ist nach J. v. Neumann selbstadjungiert und positiv definit.

$(A^* A)^{\frac{1}{2}}$ ist über die Spektraldarstellung von $A^* A$ erklärt. Es gilt

$$\|Au\| = \|(A^* A)^{\frac{1}{2}} u\|. \tag{15}$$

Aus (14) erkennt man $D\big((A^* A)^{\frac{1}{2}}\big) = W^{2m}_{2,q(x)}$ und daß $(A^* A)^{\frac{1}{2}}$ einen inversen Operator U besitzt, der auf ganz L_2 erklärt ist mit Werten in $W^{2m}_{2,q(x)}$, d.h. U gehört zu $\mathscr{L}(L_2, W^{2m}_{2,q(x)})$. Verwendet man die Bezeichnung $(A^* A)^{-\frac{1}{2}}$, wenn der inverse Operator als Element des Ringes $\mathscr{L}(L_2, L_2)$ angesehen wird, so besteht der Zusammenhang

$$(A^* A)^{-\frac{1}{2}} = I_{W^{2m}_{2,q(x)} \to L_2} U.$$

Da der Einbettungsoperator vollstetig und U beschränkt ist, so ist $(A^* A)^{-\frac{1}{2}}$ vollstetig. Nach [6], S.47 kann man für seine Approximationszahlen die Ungleichung

$$c_1 s_j(I_{W^{2m}_{2,q(x)} \to L_2}) = s_j\big((A^* A)^{-\frac{1}{2}}\big) \leqslant c_2 s_j(I_{W^{2m}_{2,q(x)} \to L_2}), \qquad 0 < c_1,$$

herleiten. Als Folgerung von Satz 5 erhält man damit

SATZ 6. *Für den abgeschlossenen Operator* $A = \sum_{|\alpha| \leqslant 2m} a_\alpha(x) D^\alpha$, $D(A) = W^{2m}_{2,q(x)}$, $a_\alpha(x)$ *erfüllen die Voraussetzungen* (v) *bis* (ix), $N(A) = \{0\}$, *gilt:* $(A^* A)^{-\frac{1}{2}}$ *gehört zur Klasse* $\mathfrak{S}_{\frac{n}{2m}\left(1+\frac{2}{s}\right), \infty}(L_2, L_2)$, *aber nicht zur Klasse* $\mathfrak{S}_{\frac{n}{2m}\left(1+\frac{2}{s}\right), p}(L_2, L_2)$ *für* $0 < p < \infty$. $(A^* A)^{-\frac{1}{2}}$ *wird als Operator aus* $\mathscr{L}(L_2, L_2)$ *angesehen.*

Bemerkung. Satz 6 ist für $(A A^*)^{-\frac{1}{2}}$ ebenfalls richtig. Dieser Satz gestattet Aussagen über die Greensche Funktion von A. Nach dem Satz von Rellich besitzt $A^* A$ ein reines Punktspektrum, seine Eigenwerte sind größer als Null. Bezeichnet φ_i, $i = 1, 2, \ldots$, die orthonormierten Eigenfunktionen zu den Eigenwerten λ_i^2, wobei mehrfache Eigenwerte mehrfach aufgeschrieben werden, d.h. $A^* A \varphi_i = \lambda_i^2 \varphi_i$, $(\varphi_i, \varphi_j) = \delta_{i,j}$, so spannen die φ_i den Raum L_2 auf, wie aus der Spektraldarstellung von $A^* A$ folgt. Aus $\varphi_i \in D(A^* A) \subset D(A)$ ergibt sich, daß $\psi_i = \frac{1}{\lambda_i} A \varphi_i$ sinnvoll ist. Man rechnet nach, daß für alle i ψ_i Eigenfunktion von AA^* zum Eigenwert λ_i^2 ist. Es zeigt sich, daß $\{\psi_i\}$ alle Eigenfunktionen von AA^* umfaßt, denn aus der Annahme, daß $\psi \neq \psi_i$ eine weitere Eigenfunktion von AA^* ist, also $AA^* \psi = \lambda^2 \psi$, $\|\psi\| = 1$, $\lambda \neq \lambda_i$, folgt $(\psi, \psi_i) = 0$ für $i = 1, 2 \ldots$ Es gibt wegen $\psi \in R(A)$ ein $\varphi \in D(A)$ mit $\psi = A\varphi$ und aus $0 = \left(A\varphi, \frac{1}{\lambda_i} A\varphi_i\right) = \lambda_i(\varphi, \varphi_i)$ erhält man $\varphi = 0$ und mit $\psi = A\varphi = 0$ den Widerspruch.

Die Funktionen ψ_i spannen also ebenfalls den Raum L_2 auf. Wendet man A^{-1} auf $h = \sum_{i=1}^{\infty} (h, \psi_i) \psi_i \in L_2$ an, so folgt aus $A^{-1} \psi_i = \frac{1}{\lambda_i} \varphi_i$ die Darstellung

$$A^{-1} h = \sum_{i=1}^{\infty} (h, \psi_i) \frac{1}{\lambda_i} \varphi_i.$$

Dafür schreibt man symbolisch, wobei jetzt die Variablen hervorgehoben werden

$$A^{-1} h(x) = \int_{R_n} G(x, y) h(y)\, dy$$

mit der Greenschen Funktion

$$G(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} \varphi_i(x) \overline{\psi_i(y)},$$

über die noch Konvergenzaussagen gemacht werden müssen. Die N. te Partialsumme $G_N(x, y)$, wobei nur von 1 bis N summiert wird, ist dagegen sofort sinnvoll.

Satz 7. *Ist A der Operator von Satz 6, so gehört seine Greensche Funktion $G(x, y)$ genau zu den Definitionsgebieten der Operatoren $(A^*A)^{\frac{\varkappa}{2}} \otimes E$ und $E \otimes (\underline{A}\,\underline{A}^*)^{\frac{\varkappa}{2}}$ (6), $0 \leqslant \varkappa < 1$, wenn $1-\varkappa > \frac{n}{4m}\left(1+\frac{2}{s}\right)$ gilt.*

Beweis. Wendet man den Operator $(A^*A)^{\frac{\varkappa}{2}} \otimes E$ (7) auf $G_N(x, y)$ an, wobei $(A^*A)^{\frac{\varkappa}{2}}$ über die Spektraldarstellung von A^*A erklärt ist, so folgt

$$\left((A^*A)^{\frac{\varkappa}{2}} \otimes E\right) G_N(x, y) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\lambda_i} \lambda_i^{\varkappa} \varphi_i(x) \overline{\psi_i(y)}.$$

Für die Norm dieses Ausdruckes in Raum $L_2(R_n \times R_n)$ erhält man daraus

$$\left\|\left((A^*A)^{\frac{\varkappa}{2}} \otimes E\right) G_N(x, y)\right\|^2_{L_2(R_n \times R_n)} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\lambda_i^{2(1-\varkappa)}}.$$

Nach [6], S.46 sind die Approximationszahlen positiver vollstetiger selbstadjungierter Operatoren gleich ihren Eigenwerten, also $s_j\left((A^*A)^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{\lambda_i}$. Aus Satz 6 erhält man dann, daß $\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\lambda_i^{2(1-\varkappa)}}$ für $N \to \infty$ genau dann konvergiert, wenn $2(1-\varkappa) > \frac{n}{2m}\left(1+\frac{2}{s}\right)$ gilt. Das ergibt den Beweis des ersten Teils der Behauptung. Für $E \otimes (\underline{A}\,\underline{A}^*)^{\frac{\varkappa}{2}}$ kann alles genauso bewiesen werden.

4. Zugehörigkeit der Greenschen Funktion zu "gebrochenen" Sobolev-Räumen. Es werden jetzt die Definitionsgebiete der in Satz 7 genannten Operatoren untersucht. Mit den Bezeichnungen des vorangegangenem Abschnittes gilt: Die lineare Hülle $\mathscr{L}(\{\varphi_i\}_{i=1,2,\ldots})$ bzw. $\mathscr{L}(\{\psi_i\}_{i=1,2,\ldots})$ liegt im Raum L_2 dicht. Nach [2], S. 55 oder [11], S. 146 liegt $\mathscr{L}(\{\varphi_i(x)\psi_j(y)\}_{i,j=1,2,\ldots})$ dicht im Raum $L_2(R_n \times R_n)$. Die Aussage von Satz 7 kann unter den dort angegebenen Voraussetzungen in der Form

$$\begin{aligned} (16)\quad & \left\|\left((A^*A)^{\frac{\varkappa}{2}} \otimes E\right) G(x, y)\right\|^2_{L_2(R_n \times R_n)} + \left\|\left(E \otimes (\underline{A}\,\underline{A}^*)^{\frac{\varkappa}{2}}\right) G(x, y)\right\|^2_{L_2(R_n \times R_n)} \\ & = \left(\left((A^*A)^{\varkappa} \otimes E + E \otimes (\underline{A}\,\underline{A}^*)^{\varkappa}\right) G(x, y),\, G(x, y)\right)_{L_2(R_n \times R_n)} \\ & \underset{\mathrm{X}}{=} \left(B^{\varkappa} G(x, y),\, G(x, y)\right)_{L_2(R_n \times R_n)} = \|B^{\frac{\varkappa}{2}} G(x, y)\|^2_{L_2(R_n \times R_n)} < \infty \end{aligned}$$

mit $B = A^*A \otimes E + E \otimes \underline{A}\,\underline{A}^*$ geschrieben werden, wobei das Zeichen $\underset{\mathrm{X}}{=}$ die Normäquivalenz bedeutet.

(6) $\underline{A} = \sum_{|\alpha| \leqslant 2m} \overline{a_\alpha(x)} D^\alpha$, $D(\underline{A}) = W^{2m}_{2,q(x)}$.

(7) Zu dieser Schreibweise vergleiche man [2], S. 55.

Definition 2. Der Raum $A(\varkappa)$, $0 \leqslant \varkappa \leqslant 1$, ist die Vervollständigung von $\mathscr{L}(\{\varphi_i(x)\overline{\psi_j(y)}\}_{i,j=1,2,\ldots})$ in der Metrik

$$\|u\|^2_{A(\varkappa)} = \sum_{i,j=1}^{\infty} |(u, \varphi_i \psi_j)_{L_2(R_n \times R_n}|^2 (\lambda_i^{2\varkappa} + \lambda_j^{2\varkappa}).$$

φ_i, ψ_i; λ_i sind die Eigenfunktionen, bzw. Eigenwerte des Operators A (Satz 6).

Somit gehört $G(x, y)$ genau dann zu $A(\varkappa)$, wenn $1-\varkappa > \frac{n}{4m}\left(1+\frac{2}{s}\right)$ gilt, wie (16) und Satz 7 zeigt.

Es ist nach den obigen Bemerkungen $A(0) = L_2(R_n \times R_n)$, $A(\varkappa) = D(B^{\frac{\varkappa}{2}})$, das Definitionsgebiet des Operators $B^{\frac{\varkappa}{2}}$, $0 < \varkappa \leqslant 1$. $B^{\frac{\varkappa}{2}}$ ist positiv definit und selbstadjungiert.

Satz 8. *Genügt $q(x)$ den Voraussetzungen* (i) *bis* (iv), *so sind die Räume $A(1)$ und $W^{2m}_{2,q(x)+q(y)}(R_n \times R_n)$ gleich.*

Beweis. Die Formeln (14) und (15) besagen, daß der Raum $W^{2m}_{2,q(x)}$ durch $\|(A^*A)^{\frac{1}{2}} u\|$, $u \in W^{2m}_{2,q(x)}$ normiert werden kann. Beachtet man dies, so gilt für $\|\varphi_i\| = \|\psi_i\| = 1$:

$$\begin{aligned} (B\varphi_i \overline{\psi}_i, \varphi_i \overline{\psi}_j)_{L_2(R_n \times R_n)} & \underset{\mathrm{X}}{=} \|\varphi_i\|^2_{W^{2m}_{2,q(x)}} + \|\psi_i\|^2_{W^{2m}_{2,q(y)}} \\ & \underset{\mathrm{X}}{=} \int_{R_n \times R_n} \Big\{ \sum_{|\alpha|=2m} |D_x^\alpha \varphi_i(x) \overline{\psi}_j(y)|^2 + |D_y^\alpha \varphi_i(x) \overline{\psi}_j(y)|^2 + \\ & \qquad + \left(q(x)+q(y)\right)^{2m} |\varphi_i(x)\psi_j(y)|^2 \Big\}\, dx\, dy. \end{aligned}$$

$(x_1, x_2, \ldots x_n, y_1, \ldots y_n)$ bezeichnet den allgemeinen Punkt aus $R_n x R_n$, es ist $D_x^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}$, entsprechend $D^\alpha y$. Berücksichtigt man, daß der Raum $W^{2m}_{2,q(x,y)}(R_n \times R_n)$ auch durch

$$\widetilde{\|u\|} = \int_{R_n \times R_n} \Big\{ \sum_{|\alpha|=2m} |D_x^\alpha u|^2 + |D_y^\alpha u|^2 + q(x, y)^{2m} |u|^2 \Big\}\, dx\, dy$$

normiert werden kann, so bedeutet diese Zeile:

$$(17)\qquad (B\varphi_i \overline{\psi}_j, \varphi_i \overline{\psi}_j)_{L_2(R_n \times R_n)} \underset{\mathrm{X}}{=} \|\varphi_i \overline{\psi}_j\|^2_{W^{2m}_{2,q(x)+q(y)}(R_n \times R_n)}.$$

Da man das Skalarprodukt in einem Hilbertraum durch die Norm ausdrücken kann, [11], S. 196, folgt daraus

$$(\varphi_i \overline{\psi}_j, \varphi_k \overline{\psi}_l)_{W^{2m}_{2,q(x)+q(y)}(R_n \times R_n)} = \|\varphi_i \overline{\psi}_j\|^2_{W^{2m}_{2,q(x)+q(y)}(R_n \times R_n)} \delta_{ik} \delta_{jl}.$$

Da ja $(B\varphi_i \overline{\psi}_j, \varphi_k \psi_l)_{L_2(R_n \times R_n)} = (\lambda_i^2 + \lambda_j^2)\, \delta_{ik} \delta_{jl}$ ist, zeigt eine kurze Rechnung für $u = \sum_{i,j=1}^{N} c_{ij} \varphi_i(x) \overline{\psi_j(y)}$ das Bestehen der Gleichung

$$(18)\quad (Bu, u)_{L_2(R_n \times R_n)} = \sum_{i,j=1}^{N} |c_{ij}|^2 \|\varphi_i \overline{\psi}_j\|^2_{W^{m2}_{2,q(x)+q(y)}(R_n \times R_n)} = \|u\|^2_{W^{2m}_{2,q(x)+q(y)}(R_n \times R_n)}.$$

Damit ist gezeigt: $D(B^{\frac{1}{2}}) = A(1) \subset W^{2m}_{2,q(x)+q(y)}(R_n \times R_n)$. (Das Zeichen $\subset$ bedeutet stetige Einbettung.) Um die Gleichheit beider Räume zu zeigen, genügt es darauf hinzuweisen, daß die lineare Hülle $\mathscr{L}(\{\varphi_i(x)\psi_j(y)\}_{i,j=1,2\ldots})$ auch im Raum $W^{2m}_{2,q(x)+q(y)}(R_n \times R_n)$ dicht liegt, wie sich leicht indirekt beweisen läßt. Es läßt sich deshalb jede Funktion $f(x, y)$ aus $C_0^\infty(R_n \times R_n)$ in der Metrik von $W^{2m}_{2,q(x)+q(y)}(R_n \times R_n)$ durch Funktionen u_n aus der linearen Hülle approximieren. Daraus folgt aber nach (18), daß $f(x, y)$ zu $D(B^{\frac{1}{2}})$ gehört. Nun braucht man nur noch $C_0^\infty(R_n \times R_n)$ in der Metrik von $W^{2m}_{2,q(x)+q(y)}(R_n \times R_n)$ zu vervollständigen um, $W^{2m}_{2,q(x)+q(y)}(R_n \times R_n) \subset A(1)$ zu erhalten.

Es erweist sich, daß die Räume $A(\varkappa)$ für $0 < \varkappa < 1$ mit „gebrochenen" Sobolev-Räumen mit Gewichtsfunktion identisch sind, wenn man Aussagen der Interpolationstheorie von Peetre und Ergebnisse von H. Triebel heranzieht.

Nach [10], S. 285 gilt

$$(L_2, W_2^m)_{\varkappa,2} = W_2^{m\varkappa}, \qquad 0 < \varkappa < 1.$$

Dabei ist $(L_2, W_2^m)_{\varkappa,2}$ der in [10], S. 282 definierte Interpolationsraum und $W_2^{m\varkappa}$ die Vervollständigung von C_0^∞ in der Metrik

$$\|u\|^2_{W_2^{m\varkappa}} = \|u\|^2_{W_2^{[m\varkappa]}} + \sum_{|\alpha|=[m\varkappa]} \int_{R_n \times R_n} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^2}{|x-y|^{n+2(m\varkappa-[m\varkappa])}}\, dx\, dy, \qquad 0 < \varkappa < 1.$$

$[m\varkappa]$ bedeutet die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich $m\varkappa$ ist. Nach [14], S. 284 ist der Zusammenhang

$$\left(L_2, D(B^{\frac{1}{2}})\right)_{\varkappa,2} = D(B^{\frac{\varkappa}{2}}), \qquad 0 < \varkappa < 1,$$

bekannt, wobei die entsprechenden Normen äquivalent sind. B ist ein positiver, selbstadjungierter Operator. Nach Satz 8 hat man daher

$$A(\varkappa) = \left(L_2(R_n \times R_n), W^{2m}_{2,q(x)+q(y)}(R_n \times R_n)\right)_{\varkappa,2}.$$

Dieser Interpolationsraum, der mit $W^{2m\varkappa}_{2,q(x)+q(y)}(R_n \times R_n)$ bezeichnet werden soll, wird in [15] untersucht. Es ergibt sich danach: Erfüllt $q(x)$ die Voraussetzungen (i), (ii), (iii), so ist $W^{2m\varkappa}_{2,q(x)+q(y)}(R_n \times R_n)$ die Vervollständigung von $C_0^\infty(R_n \times R_n)$ in der Metrik

$$\|u\|^2_{W^{2m\varkappa}_{2,q(x)+q(y)}(R_n \times R_n)} = \sum_{|\alpha|=[2m\varkappa]} \|D^\alpha u\|^2_{W_2^{2m\varkappa-[2m\varkappa]}(R_n \times R_n)} + \left\|\left(q(x)+q(y)\right)^{m\varkappa} u\right\|^2_{L_2(R_n \times R_n)}.$$

Damit erhält man für die Greensche Funktion $G(x, y)$ von A folgende Aussage:

Satz 9. *$G(x, y)$ gehört genau dann zu $W^{2m\varkappa}_{2,q(x)+q(y)}(R_n \times R_n)$, $0 < \varkappa < 1$, wenn $1 - \varkappa > \frac{n}{4m}\left(1 + \frac{2}{s}\right)$ gilt.*

Literaturnachweis

[1] S. Agmon, *Lectures on elliptic boundary value problems*, 1965.

[2] J. M. Berezanski, *Zerlegung nach Eigenfunktionen selbstadjungierter Operatoren*, (russisch). Kiev 1965.

[3] F. E. Browder, *On the spectral theory of elliptic differential operators*, Math. Ann. 142 (1961), S. 22–130.

[4] K. Friedrichs, *Spektraltheorie halbbeschränkter Operatoren und Anwendung auf die Spektralzerlegung von Differentialoperatoren*. Math. Ann 109 (1934), S. 465–487, 685–713.

[5] J. M. Glazman, *Direkte Methoden der qualitativen Spektralanalysis singulärer Differentialoperatoren*, (russ.), Moskau 1963.

[6] J. C. Gochberg, M. G. Krein, *Einführung in die Theorie nichtselbstadjungierter Operatoren*, (russ.), Moskau 1965.

[7] E. Müller-Pfeiffer, *Zur Theorie elliptischer und hypoelliptischer Differentialoperatoren*. Habil. Schrift, Jena 1967.

[8] J. v. Neumann, *Über adjungierte Funktionaloperatoren*, Ann. of Math. 33 (1932).

[9] M. A. Neumark, *Lineare Differentialoperatoren*. Berl., Ak. V. (1960).

[10] J. Peetre, *Espaces d'interpolation et théorème de Soboleff*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 16, 1 (1966), S. 279–317.

[11] F. Riesz B. Nagy, *Vorlesungen über Funktionalanalysis*, Berl. 1956.

[12] E. C. Titchmarsh, *Entwicklungen nach Eigenfunktionen und Differentialgleichungen zweiter Ordnung*, (russ.), Moskau 1961.

[13] H. Triebel, *Differenzierbarkeitseigenschaften Greenscher Funktionen elliptischer Differentialoperatoren*, Math. Z., 90 (1965), S. 325–338.

[14] — *Über die Verteilung der Approximationszahlen kompakter Operatoren in Sobolev-Besov-Räumen*, Inv. math., 4 (1967), S. 275–293.

[15] — *Singuläre elliptische Differentialoperatoren und Interpolationssätze für Sobolev-Slobodecki-Räume mit Gewichtsfunktionen*. Arch. Rat. Mech. Analysis, 32 (1969), S. 113–134.

Received September 6, 1971 (397)