THEOREM 3. *Let H, $\mathscr{A}$ and Φ be as in Theorem 2. Let $\varphi \in \Phi$ possess the property that $\mathscr{A}\varphi$ is dense in Φ. If the mapping $A\varphi \mapsto A$ is continuous as a mapping of a subset of Φ into $\mathscr{A}$ then for each $\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathscr{A})$ there exists a generalized eigenvector e_λ corresponding to λ.*

Proof. The mapping J satisfying $J(A\varphi) = A$ is well defined because φ is a separating vector for $\mathscr{A}$. For a given $\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathscr{A})$ we define $\hat{e}_\lambda = \lambda \circ J$. $\hat{e}_\lambda$ is continuous as a composition of two continuous mappings, hence it can be (uniquely) extended onto the whole space Φ. We denote the extension by e_λ. It is to prove that $A'e_\lambda = \lambda(A)e_\lambda$ for $A \in \mathscr{A}$. We take an element of Φ of the form $B\varphi$ and compute:

$$\langle B\varphi, A'e_\lambda\rangle = \langle AB\varphi, e_\lambda\rangle = \langle AB\varphi, \hat{e}_\lambda\rangle = \lambda\big(J(AB\varphi)\big) = \lambda(AB)$$
$$= \lambda(A)\cdot\lambda(B) = \lambda(A)\langle B\varphi, \hat{e}_\lambda\rangle = \langle B\varphi, \lambda(A)e_\lambda\rangle.$$

Since we have assumed that the set of vectors $B\varphi$, $B \in \mathscr{A}$ is dense in Φ, the equality $\langle \psi, A'e_\lambda\rangle = \langle \psi, \lambda(A)e_\lambda\rangle$ holds for every $\psi \in \Phi$.

References

[1] Yu. M. Bieriezanskii, *Eigenfunction expansion for selfadjoint operators*. Kiev 1965.

[2] I. M. Gelfand, N. Ya. Vilenkin, *Some applications of harmonic analysis*, Moscow 1961.

[3] K. Maurin, *Methods of Hilbert spaces*, Warsaw 1967.

[4] — *General eigenfunction expansions and unitary representations of topological groups*, Warsaw 1968.

[5] M. H. Stone, *Linear transformations in Hilbert space*. Am. Math. Soc. Coll. Publ. vol. XV (1932).

DEPARTMENT OF MATHEMATICAL METHODS IN PHYSICS
WARSAW UNIVERSITY

Received February 22, 1972 (486)

STUDIA MATHEMATICA, T. XLIV. (1973)

Über die Existenz von Schauderbasen in Sobolev–Besov–Räumen. Isomorphiebeziehungen

von

HANS TRIEBEL (Jena)

Zusammenfassung. In der Arbeit wird die Struktur der Sobolev–Slobodeckij-Räume W_p^s, der Lebesgue-Räume H_p^s und der Besov-Räume $B_{p,q}^s$ untersucht: Isomorphie zu l_p, (l_q), $L_p((0,1))$, Existenz von Schauderbasen, Skaleneigenschaften.

1. Einleitung. Mit R_n wird der n-dimensionale reelle euklidische Raum bezeichnet. Ω ist ein beschränktes Gebiet, $\Omega \subset R_n$, der Klasse C^∞. Die Räume $L_p(R_n)$, $L_p\big((0,1)\big)$ und l_p haben die übliche Bedeutung, $1 < p < \infty$. In der Arbeit werden die Lebesgue-Räume $H_p^s(R_n)$, $H_p^s(\Omega)$, $\mathring{H}_p^s(\Omega)$, die Sobolev–Slobodeckij-Räume $W_p^s(R_n)$, $W_p^s(\Omega)$, $\mathring{W}_p^s(\Omega)$ und die Besov-Räume $B_{p,q}^t(R_n)$, $B_{p,q}^t(\Omega)$ untersucht; $0 \leqslant s < \infty$; $0 < t < \infty$; $1 < p < \infty$; $1 \leqslant q < \infty$. Sämtliche Räume sind komplex. Die genaue Definition erfolgt im zweiten Abschnitt. Das Ziel der Arbeit ist der Nachweis der Existenz von Schauderbasen in den genannten Räumen, sowie der Beweis von Isomorphiebeziehungen.

Um die Resultate besser formulieren zu können, führen wir den Begriff der *Skala* von Banachräumen ein (Lifteigenschaft). Es sei $-\infty < M_1 < M_2 < \infty$. $\{B_\lambda\}_{M_1 \leqslant \lambda \leqslant M_2}$ sei eine Menge von Banachräumen,

$$B_{\lambda_1} \subset B_{\lambda_2} \quad \text{für } M_1 \leqslant \lambda_2 \leqq \lambda_1 \leqslant M_2.$$

($\subset$ bezeichnet stets eine stetige Einbettung). $\{B_\lambda\}_{M_1 \leqslant \lambda \leqslant M_2}$ heißt Skala, falls es eine Menge linearer Operatoren $\{A_\varrho\}_{0 \leqslant \varrho \leqslant M_2 - M_1}$ gibt mit:

(a) A_ϱ ist auf $B_{M_1+\varrho}$ definiert und vermittelt eine isomorphe Abbildung von $B_{M_1+\varrho}$ auf ganz B_{M_1}.

(b) Ist $A_\varrho^{(\varkappa)}$ die Einschränkung von A_ϱ auf $B_{M_1+\varrho+\varkappa}$; $\varkappa \geqslant 0$; $M_1 + \varrho + \varkappa \leqslant M_2$; so vermittelt $A_\varrho^{(\varkappa)}$ eine isomorphe Abbildung von $B_{M_1+\varrho+\varkappa}$ auf ganz $B_{M_1+\varkappa}$.

(c) $A_{\varrho_1}^{(\varkappa)} A_{\varrho_2}^{(\varrho_1+\varkappa)} = A_{\varrho_1+\varrho_2}^{(\varkappa)}$; $(\varrho_1 + \varrho_2 + \varkappa \leqslant M_2 - M_1)$.

(Es ist ausreichend, die letzte Eigenschaft für $\varkappa = 0$ zu fordern).

Das Hauptziel der Arbeit ist der Beweis des folgenden Satzes.

SATZ. (a) *Es sei $N > 0$ und $1 < p < \infty$ vorgegeben. Dann sind $\{H_p^s(R_n)\}_{0 \leqslant s \leqslant N}$ und $\{H_p^s(\Omega)\}_{0 \leqslant s \leqslant N}$ Skalen. Sämtliche Räume $H_p^s(R_n)$,*

$H^s_p(\Omega)$ und $\mathring{H}^s_p(\Omega)$ sind isomorph zu $L_p\big((0,1)\big)$ und besitzen eine (unbedingte) Schauderbasis.

(b) *Es sei $0 < \varepsilon < N$, $1 < p < \infty$ und $1 \leqslant q < \infty$ vorgegeben. Dann sind $\{B^s_{p,q}(R_n)\}_{\varepsilon \leqslant s \leqslant N}$ und $\{B^s_{p,q}(\Omega)\}_{\varepsilon \leqslant s \leqslant N}$ Skalen. Sämtliche Räume besitzen Schauderbasen. Die Räume $B^s_{p,q}(R_n)$ sind isomorph zu $l_q(l_p)$.*

(c) *Es sei $1 < p < \infty$ vorgegeben. Sämtliche Räume $B^s_{p,p}(R_n)$, $B^s_{p,p}(\Omega)$ und $\mathring{B}^s_{p,p}(\Omega)$ sind isomorph zu l_p (und besitzen somit eine unbedingte Schauderbasis); $s > 0$.*

(d) *Sämtliche Räume $B^s_{p,q}(\Omega)$ $(= \mathring{B}^s_{p,q}(\Omega))$ mit $1 < p < \infty$; $1 \leqslant q < \infty$; $0 < s < \frac{1}{p}$; besitzen eine gemeinsame Schauderbasis (ein System von Funktionen vom Haarschen Typ).*

Der Raum $l_q(l_p)$ hat die übliche Bedeutung, also

$$l_q(l_p) = \Big\{a \,|\, a = \{a_j\}_{j=1,2,\ldots};\ a_j \in l_p,\ \|a\|_{l_q(l_p)} = \Big(\sum_{j=1}^{\infty} \|a_j\|^q_{l_p}\Big)^{\frac{1}{q}} < \infty\Big\}.$$

Die oben erwähnten Sobolev–Slobodeckij-Räume W^s_p sind Spezialfälle der Räume H^s_p und $B^s_{p,p}$, nämlich

$$W^k_p = H^s_p \text{ für } s = \text{ganz}; \qquad W^s_p = B^s_{p,p} \text{ für } s \neq \text{ganz}.$$

Insbesondere zeigt der Satz, daß die Sobolev–Räume $W^k_p(\Omega)$ und $\mathring{W}^k_p(\Omega)$; $k = 0, 1, 2, \ldots$; isomorph zu $L_p\big((0,1)\big)$ sind, während die Slobodeckij-Räume $W^s_p(\Omega)$; $0 < s \neq$ ganz; isomorph zu l_p sind. Die beiden Raumtypen gehören somit zu verschiedenen Isomorphieklassen.

Der Beweis des Satzes ist relativ einfach, basiert aber auf zum Teil tiefliegenden Resultaten von Calderón, Komatsu, Lions, Nikolskij, Peetre, Pełczyński und Seeley.

Im zweiten Abschnitt werden die betrachteten Funktionenräume definiert. Im dritten Abschnitt wird der Satz bewiesen. Der vierte Abschnitt enthält Bemerkungen und weitere Resultate.

Für Diskussionen über die hier behandelten Fragen möchte ich mich bei Prof. Nečas (Prag) bedanken, sowie für die Möglichkeit, die noch nicht publizierte Arbeit von Fučik, John und Nečas [4] zu lesen. In dieser Arbeit wird bewiesen, daß die Sobolev-Räume $W^k_p(\Omega)$ und $\mathring{W}^k_p(\Omega)$ eine Schauderbasis besitzen. Zu besonderem Dank bin ich Prof. Peetre (Lund) verpflichtet für die Zusendung der nicht publizierten Arbeit [16] und für die Möglichkeit, die dort bewiesenen Resultate verwenden zu können. Insbesondere geht der dritte Beweisschritt aus Abschnitt 3.3 (der schließlich zur Strukturaussage "$B^s_{p,q}(R_n)$ isomorph zu $l_q(l_p)$" führt) auf ihn zurück.

2. Die Räume H^s_p, W^s_p und $B^s_{p,q}$.

2.1. Die Räume $H^\sigma_p(R_n)$, $W^\sigma_p(R_n)$ und $B^s_{p,q}(R_n)$. $S(R_n)$ ist der Schwartz-Raum der schnell fallenden beliebig oft differenzierbaren Funktionen. $S'(R_n)$ ist der duale Raum der langsam wachsenden Distributionen (tempered distributions). F bezeichnet die Fouriertransformierte in $S'(R_n)$, F^{-1} ist die inverse Fouriertransformierte. Für $0 \leqslant \sigma < \infty$ und $1 < p < \infty$ werden die Lebesgue-Räume (oder Besselpotential-Räume) $H^\sigma_p(R_n)$ definiert durch

$$(1) \qquad H^\sigma_p(R_n) = \{f \,|\, f \in S'(R_n), \quad F^{-1}(1+|\xi|^2)^{\sigma/2} F f \in L_p\},$$

$$\|f\|_{H^\sigma_p} = \|F^{-1}(1+|\xi|^2)^{\sigma/2} F f\|_{L_p}.$$

Die Elemente des R_n bezeichnen wir mit $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Ferner setzen wir

$$Q_k = \{x \,|\, |x_j| \leqslant 2^k \text{ für } j = 1, 2, \ldots, n\}; \qquad k = 0, 1, 2, \ldots;$$

und

$$Q_0 = q_0,$$
$$Q_k = q_k - q_{k-1}, \ (k = 1, 2, \ldots).$$

$\chi_k(x)$ sei die charakteristische Funktion von Q_k. $\chi_k(x)$ ist ein Fourierscher Multiplikator im Raum $L_p(R_n)$, $1 < p < \infty$, [13], S. 90. Das bedeutet

$$F^{-1}(\chi_k F f) \in L_p(R_n) \qquad \text{für } f \in S(R_n)$$

und

$$\|F^{-1}(\chi_k F f)\|_{L_p} \leqslant c\, \|f\|_{L_p}$$

mit einer von f unabhängigen Konstanten c. Wir setzen den Operator $F^{-1}\chi_k F$ stetig auf $L_p(R_n)$ fort und bezeichnen diesen Operator ebenfalls mit $F^{-1}\chi_k F$. Es sei $0 < s < \infty$; $1 < p < \infty$ und $1 \leqslant q < \infty$. Dann wird der Besov-Raum $B^s_{p,q}(R_n)$ definiert durch

$$(2) \qquad B^s_{p,q}(R_n) = \{f \,|\, f \in L_p(R^n);\ \|f\|_{B^s_{p,q}} = \Big[\sum_{k=0}^{\infty} (2^{sk} \|F^{-1}\chi_k F f\|_{L_p})^q\Big]^{\frac{1}{q}} < \infty\}.$$

Ferner setzen wir

$$(3a) \qquad W^k_p(R_n) = H^k_p(R_n) \qquad \text{für } k = 0, 1, 2, \ldots$$

(Sobolev-Räume) und

$$(3b) \qquad W^s_p(R_n) = B^s_{p,p}(R_n) \qquad \text{für } 0 < s \neq \text{ganz},$$

(Slobodeckij-Räume).

2.2. Äquivalente Normen für $H_p^\sigma(R_n)$ und $B_{p,q}^s(R_n)$. Es sei $\sigma = k = 0, 1, 2, \ldots$ Mit Hilfe der Theorie der Fourierschen Multiplikatoren folgt leicht

$$W_p^k(R_n) = \{f \mid D^\alpha f \in L_p(R_n),\ |\alpha| \leqslant k\}, \tag{4}$$

$$\|f\|_{W_p^k} \sim \sum_{|\alpha|\leqslant k} \|D^\alpha f\|_{L_p}, \quad \left(D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n}},\ \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n),\ |\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j\right),$$

[22], (die benötigten Fourierschen Multiplikatoren findet man auch bei Nikolskij [13], S. 74). ($\sim$ bedeutet, daß die Normen äquivalent sind). Das ist die übliche Definition der Sobolevschen Räume, siehe [20], [21].

Zur Abkürzung schreiben wir für $s > 0$

$$s = [s] + \{s\};\ [s] \text{ ganz};\ 0 \leqslant \{s\} < 1;$$

und

$$s = [s]^- + \{s\}^+;\ [s]^- \text{ ganz};\ 0 < \{s\}^+ \leqslant 1.$$

Ferner setzen wir für $h \in R_n$ und $k = 2, 3, \ldots$

$$(\Delta_h f)(x) = f(x+h) - f(x), \qquad \Delta_h^k = \Delta_h(\Delta_h^{k-1}).$$

Dann ist

$$B_{p,q}^s(R_n) = \{f \mid f \in L_p(R_n),\ \|f\|_{B_{p,q}^s}^* = \|f\|_{L_p} + \sum_{|\alpha|=[s]^-} \left[\int_{R_n} (|h|^{-\{s\}^+} \|\Delta_h^{1+[\{s\}^+]} D^\alpha f\|_{L_p(R_n)})^q \frac{dh}{|h|^n}\right]^{\frac{1}{q}} < \infty\Big\}. \tag{5}$$

Siehe Nikolskij [13], S. 255 (oder [22], [23]). Die Normen $\|f\|_{B_{p,q}^s}^*$ und $\|f\|_{B_{p,q}^s}$ sind äquivalent. (5) ist die ursprüngliche Definition von Besov [3]. Für $\{s\} > 0$ ergibt sich als Spezialfall

$$W_p^s(R_n) = \Big\{f \mid f \in L_p(R_n),\ \|f\|_{W_p^s}^{**} = \|f\|_{L_p(R_n)} + \sum_{|\alpha|=[s]} \left(\int_{R_n \times R_n} \frac{|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)|^p}{|x-y|^{n+\{s\}p}}\, dxdy\right)^{\frac{1}{p}} < \infty\Big\}. \tag{6}$$

Das stimmt mit der Definition von Slobodeckij [19] überein.

2.3. Die Räume $H_p^\sigma(\Omega)$, $W_p^\sigma(\Omega)$ und $B_{p,q}^s(\Omega)$. Wie in der Einleitung bemerkt wurde, ist Ω ein beschränktes Gebiet im R_n der Klasse C^∞. $H_p^\sigma(\Omega)$ und $B_{p,q}^s(\Omega)$ werden als Quotientenräume der entsprechenden Räume $H_p^\sigma(R_n)$ und $B_{p,q}^s(R_n)$ definiert. Es seien $1 < p < \infty$ und $0 \leqslant \sigma < \infty$. Dann ist

$$H_p^\sigma(\Omega) = H_p^\sigma(R_n)/\{g \mid g \in H_p^\sigma(R_n),\ g(x) = 0 \text{ für } x \in \Omega \text{ f. ü.}\}. \tag{7}$$

$$\|f\|_{H_p^\sigma(\Omega)} = \inf_{\substack{\tilde{f}(x) = f(x) \text{ für } x \in \Omega \\ \tilde{f} \in H_p^\sigma(R_n)}} \|f\|_{H_p^\sigma(R_n)}$$

(Lebesgue-Räume). Entsprechend wird $B_{p,q}^s(\Omega)$ definiert; $0 < s < \infty$; $1 < p < \infty$; $1 \leqslant q < \infty$.

$$B_{p,q}^s(\Omega) = B_{p,q}^s(R_n)/\{g \mid g \in B_{p,q}^s(R_n),\ g(x) = 0 \text{ für } x \in \Omega \text{ f. ü.}\}, \tag{8}$$

$$\|f\|_{B_{p,q}^s(\Omega)} = \inf_{\substack{\tilde{f}(x) = f(x) \text{ für } x \in \Omega \\ \tilde{f} \in B_{p,q}^s(R_n)}} \|\tilde{f}\|_{B_{p,q}^s(R_n)}$$

(Besov-Räume). Wir setzen wiederum

$$W_p^k(\Omega) = H_p^k(\Omega) \qquad \text{für } k = 0, 1, 2, \ldots$$

(Sobolev-Räume) und

$$W_p^s(\Omega) = B_{p,p}^s(\Omega) \qquad \text{für } 0 < s \neq \text{ganz}$$

(Slobodeckij-Räume).

2.4. Äquivalente Normen für $W_p^s(\Omega)$ und $B_{p,q}^s(\Omega)$. Ersetzt man in der Formel (4) R_n durch Ω, so erhält man eine äquivalente Norm für die Sobolev-Räume $W_p^k(\Omega)$. Das ist eine einfache Folgerung aus dem Calderónschen Fortsetzungsverfahren, siehe [1], S. 171. Um eine explizite „innere" Beschreibung für die Räume $B_{p,q}^s(\Omega)$ zu erhalten, führen wir die Abkürzung

$$\Omega_{h,k} = \{x \mid x + jh \in \Omega \text{ für } j = 0, 1, \ldots, k\}$$

ein. $h \in R_n$; $k = 1, 2, \ldots$ Dann ist

$$B_{p,q}^s(\Omega) = \Big\{f \mid f \in L_p(\Omega),\ \|f\|_{B_{p,q}^s}^* = \|f\|_{L_p} + \sum_{|\alpha|=[s]^-} \left[\int_{R_n} (|h|^{-\{s\}^+} \|\Delta_h^{1+[\{s\}^+]} D^\alpha f\|_{L_p(\Omega_{h,1+[\{s\}^+]})})^q \frac{dh}{|h|^n}\right]^{\frac{1}{q}} < \infty\Big\}. \tag{9}$$

Die Normen $\|f\|_{B_{p,q}^s}^*$ und $\|f\|_{B_{p,q}^s}$ sind äquivalent. Ein Beweis folgt aus dem Calderónschen Fortsetzungsverfahren [1], S. 171, und der reellen Interpolationsmethode von Lions — Peetre [10], siehe Muramatu [12] oder [22, 23]. Als Spezialfall erhalten wir eine äquivalente Normierung der Slobodeckij — Räume $W_p^s(\Omega)$, $0 < s \neq$ ganz. Wir brauchen lediglich in der Formel (6) R_n durch Ω zu ersetzen.

2.5. Die Räume $\mathring{H}_p^\sigma(\Omega)$, $\mathring{W}_p^\sigma(\Omega)$ und $\mathring{B}_{p,q}^s(\Omega)$. Wie üblich ist $C_0^\infty(\Omega)$ die Gesamtheit der in Ω beliebig oft differenzierbaren komplexen Funktionen mit kompaktem Träger. Ist $B(\Omega)$ einer der Räume $H_p^\sigma(\Omega)$, $W_p^\sigma(\Omega)$ oder $B_{p,q}^s(\Omega)$, so ist $\mathring{B}(\Omega)$ die Vervollständigung von $C_0^\infty(\Omega)$ in $B(\Omega)$. Den Rand des Gebietes Ω bezeichnen wir mit $\partial\Omega$. $\nu = \nu_y$ ist die innere

Normale für $y \in \partial\Omega$. Dann ist

$$(10a) \qquad \mathring{B}(\Omega) = \left\{ f \,\middle|\, f \in B(\Omega),\ \frac{\partial^j f}{\partial \nu^j}\bigg|_{\partial\Omega} = 0 \text{ für } j = 0, \ldots, \left[s - \frac{1}{p} \right]^- \right\}$$

für $B(\Omega) \neq B^s_{p,1}(\Omega)$. Für $s \leqslant \dfrac{1}{p}$ bedeutet die Formel $B(\Omega) = \mathring{B}(\Omega)$. Ferner ist

$$(10b) \qquad \mathring{B}^s_{p,1}(\Omega) = \left\{ f \,\middle|\, f \in B^s_{p,1}(\Omega),\ \frac{\partial^j f}{\partial \nu^j}\bigg|_{\partial\Omega} = 0 \text{ für } j = 0, \ldots, \left[s - \frac{1}{p} \right] \right\}.$$

Für $s < 1/p$ bedeutet das $B^s_{p,1}(\Omega) = \mathring{B}^s_{p,1}(\Omega)$. Einen Beweis findet man in [24]. Für die W-Räume, H-Räume und $B^s_{p,p}$-Räume wurde das Ergebnis von Lions–Magenes [9] und Magenes [11] bewiesen, sofern $s - 1/p$ „nicht singulär" ist, das heißt $s - 1/p \neq$ ganz.

3. Beweis des Satzes.

3.1. Beweis des Teils (a).

1. Schritt. Setzt man $A_\varrho = F^{-1}(1 + |\xi|^2)^{\varrho/2} F$, so zeigt (1), daß $\{H^\sigma_p(R_n)\}_{0 \leqslant \sigma \leqslant N}$ eine Skala ist. Die Räume sind isomorph zu $L_p(R_n)$. Der Raum $L_p(R_n)$ ist isomorph zu $L_p\big((0,1)\big)$ einen Beweis findet man in [7], § 12, (der dort angegebene Beweis gilt auch für unbeschränkte Gebiete). Einen Beweis für die Existenz einer Schauderbasis in $L_p\big((0,1)\big)$ findet man in [8], 1.5, (Funktionensystem vom Haarschen Typ).

2. Schritt. Wir betrachten im Raum $L_p(\Omega)$; $1 < p < \infty$; den regulär-elliptischen Differentialoperator

$$A_k f = (-1)^m \Delta^m f + \varrho f, \quad \left(\Delta = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \right),$$

mit dem Definitionsgebiet

$$D(A_k) = \left\{ f \,\middle|\, f \in W^{2m}_p(\Omega),\ \frac{\partial^{k+j} f}{\partial \nu^{k+j}}\bigg|_{\partial\Omega} = 0 \text{ für } j = 0, \ldots, m-1 \right\}.$$

k ist eine ganze Zahl, $0 \leqslant k \leqslant m$. $\nu = \nu_y$ ist wiederum die innere Normale im Punkt $y \in \partial\Omega$. ϱ ist eine reelle Zahl. Agmon hat in [2] bewiesen, daß A_k ein diskretes Spektrum besitzt, daß $(-\infty, 0]$ für $\varrho \geqslant \varrho_0$ zur Resolventenmenge gehört und die Abschätzung

$$\|(A_k - \lambda E)^{-1}\| \leqslant \frac{c}{|\lambda|}$$

gilt. E ist der Einheitsoperator im Raum $L_p(R_n)$, c ist von λ unabhängig, ([2], S. 135/136). Damit sind die Voraussetzungen erfüllt, um die Theorie

der gebrochenen Potenzen von Operatoren (fractional powers) von Komatsu [5, 6] anwenden zu können. Von Interesse sind die Operatoren A^θ_k, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, mit den Definitionsgebieten $D(A^\theta_k)$. Aus den Eigenschaften der Operatoren A^θ_k folgt [5, 6], daß $\{D(A^\theta_k)\}_{0 \leqslant \theta \leqslant \eta}$ mit $0 < \eta \leqslant 1$ eine Skala ist. (Die Operatoren A_ϱ aus der Einleitung hat man durch die Operatoren A^θ_k zu ersetzen). Seeley hat in [18], S. 800, die Räume $D(A^\theta_k)$ explizit bestimmt. Insbesondere ergibt sich aus Seeleys Resultat und unter Verwendung der Formel (10a)

$$(11a) \qquad D(A^\theta_0) = \mathring{H}^{2m\theta}_p(\Omega) \text{ für } 0 \leqslant \theta \leqslant \tfrac{1}{2}; \quad 2m\theta - \frac{1}{p} \neq 0, 1, \ldots, m-1;$$

$$(11b) \qquad D(A^\theta_0) = \mathring{H}^{m+\frac{1}{p}}_p(\Omega) \text{ für } 2m\theta = m + \frac{1}{p};$$

und

$$(12) \qquad D(A^\theta_m) = H^{2m\theta}_p(\Omega) \text{ für } 0 \leqslant \theta \leqslant \tfrac{1}{2}.$$

Aus den vorhergehenden Bemerkungen und aus der Formel (12) folgt jetzt, daß $\{H^s_p(\Omega)\}_{0 \leqslant s \leqslant N}$ eine Skala ist, die Räume sind isomorph zu $H^0_p(\Omega) = L_p(\Omega)$. $L_p(\Omega)$ ist isomorph zu $L_p\big((0,1)\big)$ [7], § 12. Ferner zeigt die Formel (11a), daß $\mathring{H}^s_p(\Omega)$ isomorph zu $L_p(\Omega)$ ist, $s - 1/p \neq$ ganz. Die „singulären" Fälle $s - 1/p =$ ganz werden durch die Formel (11b) und durch $\mathring{H}^{1/p}_p(\Omega) = H^{1/p}_p(\Omega)$ erfaßt, Formel (10a).

3.2. Beweis des Teils (d).

1. Schritt. Formel (10) zeigt, daß $B^s_{p,q}(\Omega) = \mathring{B}^s_{p,q}(\Omega)$ ist, $0 < s < 1/p$.

2. Schritt. Wir betrachten einen Modellfall. Es sei

$$Q = \{x \mid x \in R_n,\ 0 < x_j < 1;\ j = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Die Räume $W^\sigma_p(Q)$ und $B^s_{p,q}(Q)$ werden wie in 2.3 definiert. Die in 2.4 beschriebenen äquivalenten Normen bleiben auch in diesem Fall richtig. Insbesondere gilt die Formel (6) mit Q statt R_n. Zum Beweis verweisen wir auf [12] und [23]. Aus den Betrachtungen in [23] folgt auch, daß $C^1(\overline{Q})$ (die komplexwertigen im Abschluß $\overline{Q}$ von Q einmal stetig differenzierbaren Funktionen) dicht in den obigen Räumen ist; $0 \leqslant \sigma < 1$; $0 < s < 1$. Wir wollen zeigen, daß spezielle Treppenfunktionen zu $B^s_{p,q}(Q)$ gehören und dort eine dichte Menge bilden; $0 < s < 1/p$. Hierzu wählen wir passende Zerlegungen von Q, die auch für die späteren Betrachtungen von Interesse sind. Q wird zerlegt in

$$(13) \qquad Q = \bigcup_{r=1}^{N} Q_r,$$

wobei Q_r ein Quader oder n-dimensionales Rechteck der Form

$$(14)\qquad Q_r = \Big\{ x \mid x \in R_n, \frac{m_j}{2^k} \underset{(=)}{<} x_j \underset{(=)}{<} \frac{m_j+1}{2^k} \text{ für } j = 1, \dots, l,$$
$$\frac{m_j}{2^{k-1}} \underset{(=)}{<} x_j \underset{(=)}{<} \frac{m_j+1}{2^{k-1}} \text{ für } j = l+1, \dots, n \Big\}$$

ist. Hierbei ist k fest vorgegeben, $k = 1, 2, \dots$; m_j und l sind variabel, $m_j = 0, \dots, 2^k-1$ (bzw. $2^{k-1}-1$); $l = 0, 1, \dots, n$ mit den üblichen Interpretationen für $l = 0$ und $l = n$. Die Gleichheitszeichen kann man sich in (14) so verteilt denken, daß (13) gilt.

Es sei $f \in C^1(\bar{Q})$. Die „Mittelpunkte" von Q_r bezeichnen wir mit $x^{(r)}$. Es sei

$$(15)\qquad f_Z(x) = f(x^{(r)}) \quad \text{für } x \in Q_r.$$

Es ist klar, daß für jedes positive ε

$$(16)\qquad \|f_Z - f\|_{L_p(Q)} \leqslant \varepsilon \quad \text{für } k \geqslant k_0(\varepsilon)$$

gilt. Ferner gilt für $\sigma < 1/p$

(17)
$$\int\limits_{Q\times Q} \frac{|f(x)-f_Z(x)-(f(y)-f_Z(y))|^p}{|x-y|^{n+\sigma p}}\,dxdy \leqslant \sum_j \int\limits_{Q_j\times Q_j} \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{n+\sigma p}}\,dxdy +$$
$$+ c \sum_j \int\limits_{Q_j} |f(x)-f_Z(x)|^p \cdot \sum_{\substack{r=1\\ r\neq j}}^{N} \int\limits_{Q_r} \frac{dy}{|x-y|^{n+\sigma p}}\,dx.$$

Ist $d_j(x)$ der Abstand des Punktes $x \in Q_j$ zum Rand von Q_j, so ist der zweite Summand auf der rechten Seite der letzten Formel abschätzbar durch

$$(18)\quad c\|f\|^p_{C^1(\bar{Q})} \sum_j \int\limits_{Q_j} |x-x^{(j)}|^p d_j^{-\sigma p}(x)\,dx \leqslant c' \|f\|^p_{C^1(\bar{Q})} \sum_j |Q_j|^{1+\frac{p}{n}(1-\sigma)}$$
$$\leqslant \varepsilon \|f\|^p_{C^1(\bar{Q})} \sum_j |Q_j| = \varepsilon \|f\|^p_{C^1(\bar{Q})} \quad \text{für } k \geqslant k_1(\varepsilon).$$

Der erste Summand in (17) wird ebenfalls klein, falls k groß wird, da $\sum\limits_j |Q_j \times Q_j| \to 0$ für $k \to \infty$ gilt. Somit folgt aus (16), (17), (18) und (6)

$$(19)\qquad \|f - f_Z\|_{W^\sigma_p} \leqslant \varepsilon \quad \text{für } k \geqslant k_2(\varepsilon);\ 0 \leqslant \sigma < \frac{1}{p}.$$

Da

$$B^s_{p,q}(Q) \supset W^\sigma_p(Q) \quad \text{für } 0 < s < \sigma < \frac{1}{p}$$

gilt, ist (19) auch richtig, wenn man W^σ_p durch $B^s_{p,q}$ ersetzt. Daraus folgt aber, daß die Treppenfunktionen $f_Z(x)$ zu $B^s_{p,q}(Q)$; $0 < s < 1/p$; gehören und eine dichte Menge in diesen Räumen bilden.

3. Schritt. Alle Symbole haben die gleiche Bedeutung wie im zweiten Schritt. Wir betrachten wiederum die Zerlegung (13), (14) und bilden den Operator P_Z

$$(P_Z f)(x) = \frac{1}{|Q_r|} \int\limits_{Q_r} f(y)\,dy.$$

P_Z ist in $L_p(Q)$ Projektionsoperator. Es gilt

$$\|P_Z f\|^p_{L_p} \leqslant \sum_j |Q_j|^{-p+1} \Big(\int\limits_{Q_j} |f(y)|\,dy \Big)^p \leqslant \sum_j \int\limits_{Q_j} |f(y)|^p\,dy = \|f\|^p_{L_p}.$$

Also ist

$$(20)\qquad \|P_Z\|_{L_p \to L_p} = 1.$$

Wir wollen zeigen, daß es eine Zahl $c = c(\sigma)$ gibt, so daß für alle Zerlegungen (13), (14)

$$(21)\qquad \|P_Z\|_{W^\sigma_p \to W^\sigma_p} \leqslant c \quad (0 \leqslant \sigma < 1/p)$$

gilt. Es ist

$$(22)\qquad \int\limits_{Q\times Q} \frac{|P_Z f(x) - P_Z f(y)|^p}{|x-y|^{n+\sigma p}}\,dxdy = \sum_j \sum_r{}' \int\limits_{Q_j} \int\limits_{Q_r} \dots + \sum_j \sum_r{}'' \int\limits_{Q_j} \int\limits_{Q_r} \dots$$

$\sum\limits_j \sum\limits_r{}'$ bedeutet, daß bei festem j über die r mit $\bar{Q}_j \cap \bar{Q}_r \neq \emptyset$ summiert wird, $r \neq j$. $\sum\limits_j \sum\limits_r{}''$ bedeutet, daß bei festem j über die r mit $\bar{Q}_j \cap \bar{Q}_r = \emptyset$ summiert wird. Um bei festem j $\sum\limits_r{}'$ abschätzen zu können, nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$(23)\qquad \int\limits_{\tilde{Q}_j} f(x)\,dx = 0 \quad \text{mit } \tilde{Q}_j = \bigcup_{\bar{Q}_r \cap \bar{Q}_j \neq \emptyset} Q_r$$

an. Dann ist mit $a_r = (P_Z f)(x)$ für $x \in Q_r$

$$(24)\quad \sum_r{}' \int\limits_{Q_j} \int\limits_{Q_r} \dots \leqslant c \sum_r{}' \Big[(|a_r|^p + |a_j|^p) \int\limits_{Q_j} \int\limits_{Q_r} \frac{dxdy}{|x-y|^{n+\sigma p}} \Big]$$
$$\leqslant c \sum_r{}' \Big[|Q_j|^{-1} \Big(\int\limits_{Q_j} |f(x)|^p\,dx + \int\limits_{Q_r} |f(x)|^p\,dx \Big) |Q_j|^{1-\sigma p/n} \Big]$$
$$\leqslant c' |Q_j|^{-\sigma p/n} \int\limits_{\tilde{Q}_j} |f(x)|^p\,dx.$$

Wir verwenden jetzt

$$\|f\|_{W^\sigma_p(\tilde{Q}_j)} \sim \left(\int\limits_{\tilde{Q}_j \times \tilde{Q}_j} \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{n+\sigma p}}\, dx dy \right)^{1/p} + \left| \int\limits_{\tilde{Q}_j} f(x)\, dx \right|. \tag{25}$$

Durch Dimensionsbetrachtungen und unter Berücksichtigung von (23) folgt

$$\|f\|^p_{L_p(\tilde{Q}_j)} \leqslant c\, |Q_j|^{\sigma p/n} \int\limits_{\tilde{Q}_j \times \tilde{Q}_j} \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{n+\sigma p}}\, dx dy \tag{26}$$

mit einer von der Zerlegung unabhängigen Konstanten c. Setzt man (26) in (24) ein, so folgt

$$\begin{aligned} \sum_j \Big(\sum_r{}' \int\limits_{Q_j} \int\limits_{Q_r} \dots \Big) &\leqslant c \sum_j \int\limits_{\tilde{Q}_j \times \tilde{Q}_j} \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{n+\sigma p}}\, dx dy \\ &\leqslant c' \int\limits_{Q \times Q} \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{n+\sigma p}}\, dx dy . \end{aligned} \tag{27}$$

Um $\sum_j \sum_r{}''$ abschätzen zu können, benutzen wir

$$a_j - a_r = \frac{1}{|Q_j|\,|Q_r|} \int\limits_{Q_j \times Q_r} \big(f(x)-f(y)\big)\, dx\, dy$$

und

$$|a_j - a_r|^p \leqslant |Q_j|^{-1} |Q_r|^{-1} \int\limits_{Q_j \times Q_r} |f(x)-f(y)|^p\, dx dy .$$

Es folgt mit $b_{j,r} = \inf\limits_{\substack{x \in Q_j \\ y \in Q_r}} |x-y|$

$$\begin{aligned} \sum_j \sum_r{}'' \int\limits_{Q_j} \int\limits_{Q_r} \dots &\leqslant \sum_j \sum_r{}'' b_{j,r}^{-n-\sigma p} \int\limits_{Q_j \times Q_r} |f(x)-f(y)|^p\, dx\, dy \\ &\leqslant c' \sum_j \sum_r{}'' \int\limits_{Q_j \times Q_r} \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{n+\sigma p}}\, dx dy \leqslant c'' \int\limits_{Q \times Q} \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{n+\sigma p}}\, dx dy . \end{aligned} \tag{28}$$

(21) folgt jetzt aus (20), sowie (22), (27) und (28).

4. Schritt. Es ist jetzt relativ einfach zu beweisen, daß die Räume $B^s_{p,q}(Q)$; $0 < s < 1/p$; eine gemeinsame Schauderbasis besitzen. Es ist

$$B^{\theta\sigma}_{p,q}(Q) = \big(L_p(Q), W^\sigma_p(Q)\big)_{\theta,q}; \quad 0 < \theta < 1. \tag{29}$$

Dabei ist $(\cdot\,,\cdot)_{\theta,q}$ das reelle Interpolationsverfahren von Lions — Peetre [10], [14]. (29) folgt aus dem Calderónschen Fortsetzungsverfahren und

der entsprechenden Formel mit R_n statt Q, siehe [10]. Einen Beweis findet man auch in [22], [23]. Hat P_Z die gleiche Bedeutung wie im letzten Schritt, so folgt aus (20), (21) und der Interpolationseigenschaft

$$\|P_Z\|_{B^s_{p,q} \to B^s_{p,q}} \leqslant c \quad (1 < p < \infty;\ 0 < s < 1/p;\ 1 \leqslant q < \infty). \tag{30}$$

Wir denken uns jetzt sämtliche Zerlegungen der Form (13), (14) geordnet: $Z_1, Z_2, Z_3, \dots Z_{j+1}$ geht aus Z_j hervor durch „Halbierung" eines einzigen Elementes Q_r. Dann ist

$$\dim R(P_{Z_1}) = \dim R(P_{Z_{j+1}} - P_{Z_j}) = 1. \tag{31}$$

($R(A)$ ist der Wertevorrat des Operators A). Für die im zweiten Beweisschritt betrachteten Treppenfunktionen $f(x)$ ist

$$P_{Z_j} f = f \quad \text{für } j \geqslant j_0 .$$

Da diese Treppenfunktionen dicht in $B^s_{p,q}(Q)$ sind, folgt aus (30)

$$\lim_{j \to \infty} \|f - P_{Z_j} f\|_{B^s_{p,q}} = 0, \quad f \in B^s_{p,q}(Q).$$

Schreibt man

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} (P_{Z_{j+1}} - P_{Z_j}) f + P_{Z_1} f, \tag{32}$$

so sieht man jetzt leicht, daß die erzeugenden Funktionen von $R(P_{Z_1})$ und $R(P_{Z_{j+1}} - P_{Z_j})$ eine Schauderbasis bilden (Haarsches Funktionensystem). Die Unität der Darstellung (32) folgt aus der Orthogonalität der einzelnen Summanden in $L_2(Q)$.

5. Schritt. In der gleichen Weise beweist man die Existenz einer Schauderbasis in $B^s_{p,q}\big(Q - \bigcup_{l=1}^{M} Q_{r_l}\big)$, wobei Q_{r_l} einige Quader der Form (14) sind, (Würfel mit quaderförmigen Löchern), $0 < s < 1/p$. Durch geringfügige Modifikation beweist man die Existenz einer Schauderbasis in $B^s_{p,q}(\Omega)$, wobei Ω eine Kugel mit endlich vielen kugelförmigen Löchern ist. Ist Ω ein beliebiges beschränktes Gebiet der Klasse C^∞, so kann man aber Ω durch eine vorbereitende Transformation stets auf diese Normalform bringen. Damit ist der Teil (d) Satzes bewiesen.

3.3. Beweis des Teils (b).

1. Schritt. Es ist

$$B^s_{p,q}(R_n) = \big(H^{s_0}_p(R_n),\ H^{s_1}_p(R_n)\big)_{\theta,q}; \quad s = s_0(1-\theta) + s_1\theta;\ 0 < \theta < 1;$$

[10]. Da die Räume $\{H^\sigma_p(R_n)\}_{0 \leqslant \sigma \leqslant N}$ eine Skala bilden (1. Schritt aus 3.1), so folgt aus den Sätzen der Interpolationstheorie, daß auch

$\{B^s_{p,q}(R_n)\}_{\varepsilon\leqslant s\leqslant N}$ eine Skala ist; $0<\varepsilon<N<\infty$. In gleicher Weise ergibt sich aus

$$B^s_{p,q}(\Omega)=\left(H^{s_0}_p(\Omega),\ H^{s_1}_p(\Omega)\right)_{\theta,q};\qquad s=s_0(1-\theta)+s_1\theta;\ 0<\theta<1;$$

und der Formel (12), daß $\{B^s_{p,q}(\Omega)\}_{\varepsilon\leqslant s\leqslant N}$ eine Skala ist. Wie bereits bewiesen wurde, besitzen die Räume $B^s_{p,q}(\Omega)$ mit $0<s<1/p$ eine Schauderbasis. Daraus folgt, daß auch die Räume $B^s_{p,q}(\Omega)$ mit beliebigem positiven s eine Schauderbasis besitzen.

2. Schritt. Es ist noch zu zeigen, daß $B^s_{p,q}(R_n)$ isomorph zu $l_q(l_p)$ ist. Wir benutzen die Bezeichnungen aus 2.1 und setzen

$$P_j=F^{-1}\chi_j F;\qquad j=0,1,2,\dots$$

P_j ist ein linearer beschränkter Operator von $L_p(R_n)$ in $L_p(R_n)$. Es gilt

$$P_kP_j=\delta_{j,k}P_j. \tag{33}$$

Um (33) zu beweisen, nehmen wir

$$f\in L_p(R_n),\qquad S(R_n)\ni f_l\xrightarrow[L_p]{} f,\qquad \varphi\in S(R_n).$$

Unter Benutzung der Parsevalschen Gleichung und der Multiplikatoreigenschaft von $\chi_j(x)$ folgt

$$(P_jf)(\varphi)=\lim_{l\to\infty}(P_jf_l)(\varphi)=\int_{R_n}fF^{-1}\chi_jF^{-1}\varphi\,dx \tag{34}$$

und

$$\begin{aligned}(P_kP_jf)(\varphi)&=\lim_{l\to\infty}\left(F^{-1}\chi_jFf_l,\ F^{-1}\chi_kF\bar{\varphi}\right)_{L_2(R_n)}\\&=\lim_{l\to\infty}\delta_{j,k}\left(\chi_jFf_l,\ F\bar{\varphi}\right)_{L_2(R_n)}=\delta_{j,k}(P_jf)(\varphi).\end{aligned}$$

Daraus folgt (33). Daraus ergibt sich insbesondere, daß P_j Projektor in $L_p(R_n)$ ist. Wir betrachten jetzt den in $L_p(R_n)$ isometrischen Operator G_l,

$$(G_lf)(x)=2^{nl/p}f(2^lx);\qquad l\text{ ganz},\ -\infty<l<\infty.$$

Es ist

$$P_{l+j}G_l=G_lP_j;\qquad j=1,2,\dots;\ l=-j+1,\ -j+2,\dots \tag{35}$$

Es seien $f\in S(R_n)$ und $\varphi\in S(R_n)$. Dann folgt (35) aus

$$\begin{aligned}(P_{l+j}G_lf)(\varphi)&=\int_{R_n}(FG_lf)\chi_{j+l}F^{-1}\varphi\,dx\\&=2^{ln/p-2ln}\int_{R_n}(Ff)(2^{-l}x)\chi_j(2^{-l}x)\left[F^{-1}\varphi(2^{-l}\xi)\right](2^{-l}x)\,dx\\&=2^{ln/p-ln}\int_{R_n}(F^{-1}\chi_jFf)(\xi)\varphi(2^{-l}\xi)\,d\xi=(G_lP_jf)(\varphi).\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Relationen (33) und (35) kann man jetzt relativ einfach eine Aussage über die Struktur der Räume $B^s_{p,q}(R_n)$ machen. $R(P_j)$ ist der Wertevorrat von P_j (betrachtet als Operator in $L_p(R_n)$). Wir zeigen, daß der Operator A,

$$Af=\{2^{sj}P_jf\}_{j=0,1,2,\dots}$$

eine isomorphe Abbildung von $B^s_{p,q}(R_n)$ auf ganz $\sum_{j=0}^{\infty}\oplus R(P_j)$ (betrachtet als Teilraum von $l_q(L_p(R_n))$) vermittelt. Es genügt zu zeigen, daß $R(A)$ mit $\sum_{j=0}^{\infty}\oplus R(P_j)$ übereinstimmt. Es sei

$$(f_j)_{j=0,1,2,\dots}\in\sum_{j=0}^{\infty}\oplus R(P_j).$$

Dann konvergiert

$$f=\sum_{j=0}^{\infty}2^{-sj}f_j$$

in $L_p(R_n)$, da

$$\Big\|\sum_{j=N}^{M}2^{-sj}f_j\Big\|_{L_p}\leqslant\sum_{j=N}^{M}2^{-sj}\sup_k\|f_k\|_{L_p}\leqslant\|\{f_0,f_1,\dots,\}\|_{l_q(L_p)}\sum_{j=N}^{M}2^{-sj}$$

st. Es ist $P_jf_j=f_j$. Dann folgt aus (33)

$$P_kf=2^{-sk}f_k.$$

Daraus ergibt sich

$$f\in B^s_{p,q}(R_n)\qquad\text{und}\quad Af=(f_0,f_1,\dots).$$

Also ist $B^s_{p,q}(R_n)$ isomorph zu $\sum_{j=0}^{\infty}\oplus R(P_j)$ (als Teilraum von $l_q(L_p)$). (35) zeigt nun, daß G_l eine isometrische Abbildung von $R(P_1)$ auf $R(P_{l+1})$ vermittelt; $l=1,2,\dots$ Zum Beweis, daß $B^s_{p,q}(R_n)$ isomorph zu $l_q(l_p)$ ist, ist es somit ausreichend zu zeigen, daß $R(P_0)$ und $R(P_1)$ (als Teilräume von $L_p(R_n)$) isomorph zu l_p sind. Es ist leicht zu sehen, daß $R(P_1)$ isomorph zu einem komplementierten Teilraum von $R(P_0)$ ist. (Ein Teilraum heißt „komplementiert", wenn er der Wertevorrat eines Projektors ist (complemented subspace)). Aus „$R(P_0)$ isomorph zu l_p" folgt somit „$R(P_1)$ isomorph zu einem unendlichdimensionalen komplementierten Teilraum von l_p". Pełczyński hat gezeigt, daß jeder unendlichdimensionale komplementierte Teilraum von l_p ismorph zu l_p ist [17], S. 213. Somit ist es ausreichend zu zeigen, daß $R(P_0)$ isomorph zu l_p ist.

3. Schritt. Wir beweisen „$R(P_0)$ ist isomorph zu l_p". Wir betrachten den Operator

$$Kf=\{f(k\pi)\}_k,\qquad f\in R(P_0).$$

Hierbei ist $k = (k_1, \dots, k_n)$; k_j ganz; $k\pi = (k_1\pi, \dots, k_n\pi)$. Wir zeigen, daß K eine isomorphe Abbildung von $R(P_0)$ auf ganz l_p vermittelt. Es ist

$$\|Kf\|_{l_\infty} \leqslant \|f\|_{L_\infty}.$$

Ist $\varphi \in S(R_n)$ mit $(F\varphi)(\xi) = 1$ für $\xi \in Q_0$ (Abschnitt 2.1), so folgt

$$\|Kf\|_{l_1} = \sum_k |(\varphi * f)(k\pi)|$$

$$\leqslant \int_{R_n} \sum_k |\varphi(k\pi - x)|\, |f(x)|\, dx \leqslant c\, \|f\|_{L_1}.$$

Aus den beiden letzten Abschätzungen folgt durch Interpolation (Konvexitätstheorem von Riesz–Thorin)

$$\|Kf\|_{l_p} \leqslant c\, \|f\|_{L_p}; \quad 1 < p < \infty. \tag{36}$$

K ist somit stetig. Wir betrachten den Operator S, der vorerst nur auf den finiten Folgen aus l_p erklärt ist,

$$S\{g_k\} = f, \quad Ff = c\chi_0(x) \sum_{|k| \leqslant N} e^{-ik\pi x} g_k. \tag{37}$$

$|k| = \sum_{j=1}^n k_j$, $kx = \sum_{j=1}^n k_j x_j$. Es ist $f \in L_p(R_n)$, $1 < p < \infty$. (Das folgt etwa aus der expliziten Gestalt von $F^{-1}\chi_0(x)$ [13], S. 372). c wird so bestimmt, daß $g_k = f(k\pi)$ ist. Daß das möglich ist folgt aus der Fourierentwicklung in Q_0

$$(Ff)(x) = c' \sum_k \int_{Q_0} e^{-i\pi k(x-\xi)} (Ff)(\xi)\, d\xi \tag{38}$$

$$= c'' \sum_k e^{-i\pi kx} (F^{-1}Ff)(\pi k) = c \sum_k e^{-i\pi kx} f(\pi k); \quad x \in Q_0.$$

Unter Verwendung der Parsevalschen Gleichung, der Formel (38), der Abschätzung (36) und der Multiplikatoreigenschaft von $\chi_0(x)$ folgt für $\varphi \in S(R_n)$

$$\left|\int_{R_n} S\{g_k\}(x)\overline{\varphi(x)}dx\right| = \left|\int_{R_n} Ff \cdot \overline{FF^{-1}(\chi_0 F\varphi)}\, d\xi\right|$$

$$\leqslant c \left(\sum_k |f(k\pi)^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_k |(F^{-1}\chi_0 F\varphi)(k\pi)|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}$$

$$\leqslant c' \|\{g_k\}\|_{l_p} \|F^{-1}\chi_0 F\varphi\|_{L_{p'}} \leqslant c'' \|\{g_k\}\|_{l_p} \|\varphi\|_{L_{p'}}; \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Da φ beliebig war, folgt

$$\|S\{g_k\}\|_{L_p} \leqslant c\, \|\{g_k\}\|_{l_p}. \tag{39}$$

S wird durch Stetigkeit auf ganz l_p fortgesetzt. Die Formeln (38), (36) und (39) zeigen jetzt $S = K^{-1}$, $R(K) = l_p$. Damit ist der Satz (b) bewiesen.

3.4. Beweis des Teils (c). Calderóns Fortsetzungsverfahren [1], S. 171, zeigt, daß es einen Operator S gibt, der von $L_p(\Omega)$ in $L_p(R_n)$ abbildet, so daß die Einschränkung von S auf $W_p^k(\Omega)$; $k = 0, \dots K$; ein linearer und stetiger Fortsetzungsoperator von $W_p^k(\Omega)$ in $W_p^k(R_n)$ ist. K ist hierbei eine beliebig vorgebbare natürliche Zahl.

$$(Sf)(x) = f(x) \quad \text{für } x \in \Omega \text{ fast überall.}$$

Durch Interpolation,

$$B_{p,q}^s(\Omega) = \left(L_p(\Omega), W_p^k(\Omega)\right)_{\theta,q},$$

$0 < \theta < 1$; $s = \theta k$; (und eine entsprechende Formel mit R_n statt Ω) folgt, daß S auch ein Fortsetzungsoperator von $B_{p,q}^s(\Omega)$ in $B_{p,q}^s(R_n)$ ist. Daneben betrachten wir den linearen und stetigen Einschränkungsoperator R von $B_{p,q}^s(R_n)$ in $B_{p,q}^s(\Omega)$,

$$(Rf)(x) = f(x) \quad \text{für } x \in \Omega \text{ fast überall.}$$

Ist E der identische Operator, so ist $RS = E$, während SR ein Projektionsoperator in $B_{p,q}^s(R_n)$ ist. Daraus folgt, daß $B_{p,q}^s(\Omega)$ ismorph zu einem komplementierten Teilraum von $B_{p,q}^s(R_n)$ ist. Der Isomorphismus wird durch S vermittelt. Da l_p (l_p) isomorph zu l_p ist und ein unendlichdimensionaler komplementierter Teilraum von l_p isomorph zu l_p ist [17], S. 213, folgt aus Satz (b), daß $B_{p,p}^s(R_n)$ und $B_{p,p}^s(\Omega)$ isomorph zu l_p sind. Wir zeigen jetzt, daß $\mathring{B}_{p,p}^s(\Omega)$ ein komplementierter Teilraum von $B_{p,p}^s(\Omega)$ ist. Auf der Grundlage der Einbettungssätze und Fortsetzungssätze für die Räume $B_{p,p}^s(\Omega)$ [13], S. 291, S. 293, und der üblichen Methode der „lokalen Koordinaten" folgt die Existenz eines linearen und stetigen Operators P in $B_{p,p}^s(\Omega)$,

$$Pf = \sum_{j=0}^{\left[s-\frac{1}{p}\right]^-} \left.\frac{\partial^j f}{\partial \nu^j}\right|_{\partial\Omega} \cdot h_j(x),$$

$$\left.\frac{\partial^j Pf}{\partial \nu^j}\right|_{\partial\Omega} = \left.\frac{\partial^j f}{\partial \nu^j}\right|_{\partial\Omega} \quad \text{für } j = 0, \dots, \left[s - \frac{1}{p}\right]^-.$$

(Man vergleiche mit den Beweisen der genannten Sätze bei Nikolskij [13]). $h_j(x)$ sind fixierte Funktionen. (10a) zeigt jetzt, daß Q,

$$Qf = f - Pf,$$

ein Projektionsoperator von $B_{p,p}^s(\Omega)$ auf ganz $\mathring{B}_{p,p}^s(\Omega)$ ist. Also ist $\mathring{B}_{p,p}^s(\Omega)$ ein unendlichdimensionaler komplementierter Teilraum von $B_{p,p}^s(\Omega)$ und somit isomorph zu l_p.

icm©

4. Bemerkungen.

4.1. Die Voraussetzung, daß Ω zur Klasse C^∞ gehört, läßt sich abschwächen. Der Beweis des Teils (c) zeigt, daß $B^s_{p,p}(\Omega)$ (und damit auch $W^s_p(\Omega)$, $0 < s \neq$ ganz) isomorph zu l_p ist, sofern das beschränkte Gebiet Ω einer eingeschränkten Kegelbedingung genügt (restricted cone condition) [1], S. 11. Unter dieser Voraussetzung ergibt sich ferner, daß $H^s_p(\Omega)$ (und damit auch $W^k_p(\Omega)$; $k = 0, 1, 2, \ldots$) isomorph zu einem komplementierten Teilraum von $H^s_p(R_n)$ (und damit isomorph zu einem komplementierten Teilraum von $L_p((0,1))$) ist. Daraus folgt, daß $H^s_p(\Omega)$ (und damit auch $W^k_p(\Omega)$; $k = 0, 1, \ldots$) eine Schauderbasis besitzt, sofern Ω einer eingeschränkten Kegelbedingung genügt.

4.2. Die Räume $H^\sigma_p(R_n)$ und $B^\sigma_{p,q}(R_n)$ kann man auch für $\sigma \leqslant 0$ betrachten. $H^\sigma_p(R_n)$ wird durch Formel (1) definiert. $B^\sigma_{p,q}(R_n)$ kann man durch Interpolation definieren,

$$B^\sigma_{p,q}(R_n) = \left(H^{\sigma_0}_p(R_n),\ H^{\sigma_1}_p(R_n)\right)_{\theta,q}.$$

$0 < \theta < 1$; $\quad \sigma = \sigma_0(1-\theta) + \sigma_0\theta$.
Es ergibt sich wie früher, daß $\{H^\sigma_p(R_n)\}_{-N \leqslant \sigma \leqslant N}$ und $\{B^\sigma_{p,q}(R_n)\}_{-N \leqslant \sigma \leqslant N}$ Skalen sind. $H^\sigma_p(R_n)$ ist isomorph zu $L_p((0,1))$, $B^\sigma_{p,q}(R_n)$ ist isomorph zu $l_q(l_p)$. Für eine mehr explizite Beschreibung von $B^\sigma_{p,q}(R_n)$ verweisen wir auf [15] und [22].

4.3. Wir beschreiben die periodischen Analoga zu den Räumen $H^\sigma_p(R_n)$ und $B^\sigma_{p,q}(R_n)$. Q_0, $k = (k_1, \ldots, k_n)$ und e^{-ikx} haben die frühere Bedeutung. Q_0 ist dabei als ränderbezogener n-dimensionaler Torus zu verstehen. Es ist

$$H^\sigma_{p,\pi} = \left\{f \mid f \underset{D'}{=} \sum_k a_k e^{-ikx}, \sum_k a_k (1+|k|^2)^{\frac{\sigma}{2}} e^{ikx} \in L_p(Q_0)\right\}.$$

$1 < p < \infty$; $-\infty < \sigma < \infty$. $\underset{D'}{=}$ bedeutet Konvergenz im Sinne der Theorie der Distributionen über dem n-dimensionalen Torus Q_0.

$$B^\sigma_{p,q,\pi} = \left(H^{\sigma_0}_{p,\pi},\ H^{\sigma_1}_{p,\pi}\right)_{\theta,q},$$

$0 < \theta < 1$; $\sigma = \sigma_0(1-\theta) + \sigma_1\theta$. Aus den Resultaten von Zygmund [25], S. 423, kann man herleiten, daß $\{e^{ikx}\}_k$ eine Schauderbasis in $L_p(Q_0)$ ist; $1 < p < \infty$. Daraus folgt aber relativ einfach, daß sämtliche Räume $H^\sigma_{p,\pi}$ und $B^\sigma_{p,q,\pi}$; $-\infty < \sigma < \infty$; $1 < p < \infty$; $1 \leqslant q < \infty$; eine gemeinsame Schauderbasis besitzen, nämlich $\{e^{ikx}\}_k$.

4.4. Man kann beweisen, daß

$$H^\sigma_p(Q_0) = H^\sigma_{p,\pi} \quad \text{und} \quad B^s_{p,q}(Q_0) = B^s_{p,q,\pi}$$

ist; $1 < p < \infty$; $0 \leqslant \sigma < \frac{1}{p}$; $0 < s < \frac{1}{p}$; $1 \leqslant q < \infty$. Die Bemerkung 4.3. zeigt dann, daß $\{e^{ikx}\}_k$ eine gemeinsame Schauderbasis für die Räume $H^\sigma_p(Q_0)$ und $B^s_{p,q}(Q_0)$ ist; $1 < p < \infty$; $0 \leqslant \sigma < \frac{1}{p}$; $0 < s < \frac{1}{p}$; $1 \leqslant q < \infty$.

Literatur

[1] S. Agmon, *Lectures on elliptic boundary value problems*, New York 1965.

[2] — *On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems*, Comm. Pure Appl. Math. 15 (1962), S. 119–147.

[3] О. В. Бесов, *Исследование одного семейства функциональных пространств в связи с теоремами вложения и продолжения.* Труды матем. ин-та В. А. Стеклова 60 (1961), S. 42–81.

[4] S. Fučik, O. John, J. Nečas, *On the existence of Schauder bases in Sobolev spaces*, Comm. Math. Univ. Carolina 13(1972), S. 163–175.

[5] H. Komatsu, *Fractional powers of operators.* Pacific J. Math. 19 (1966), S. 285–346.

[6] — *Fractional powers of operators II.* Pacific J. Math. 21 (1967), S. 89–111.

[7] М. А. Красносельский, Я. Б. Рутицкий, *Выпуклые функции и пространства Орлича.* Москва 1958.

[8] — П. П. Забрейко, Е. И. Пустыльник, П. Е. Соболевский, *Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций.* „Наука", Москва 1966.

[9] —, J. L. Lions, E. Magenes, *Problemi ai limiti non omogenei* V. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 16 (1962), S. 1–44.

[10] J. Peetre, *Sur une classe d'espaces d'interpolation*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 18 (1964), S. 5–68.

[11] Э. Мадженес (E. Madženes), *Интерполяционные пространства и уравнения в частных производных.* Успехи мат. наук. 21 (1966), S. 169-218.

[12] T. Muramatu, *On Besov spaces of functions defined in general regions*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ. 6 (1970/71), S. 515–543.

[13] С. М. Никольский, *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения.* „Наука", Москва 1969.

[14] J. Peetre, *Sur le nombre de paramètres dans la définition de certain espaces d'interpolation*, Ricerche Mat. 12 (1963), S. 248–261.

[15] — *Sur les espaces de Besov*, Compt. Rend. Acad. Sc. Paris 264, ser. A (1967), S. 281–283.

[16] — *On the structure of Sobolev and Besov spaces.*

[17] A. Pełczyński, *Projections in certain Banach spaces*, Studia Math. 19 (1960), S. 209–228.

[18] R. Seeley, *Fractional powers of boundary problems*, Actes, Congrès intern. Math. 1970, t. 2 (1971), S. 795–801.

[19] Л. Н. Слободецкий, *Обобщенные пространства С. Л. Соболева и их приложения к краевым задачам для дифференциального уравнения в частных производных.* Уч. зап. Ленингр. Гос. пед. ин-та 197(1958). S. 54-112.

[20] С. Л. Соболев, *Об одной теореме функционального анализа.* Матем. сборник 4(46)(1938). S. 471-497.

[21] — *Некоторые применения функционального анализа в математической физике.* Ленинград 1950.

[22] H. Triebel, *Spaces of distributions of Besov type on euclidean n-space. Duality, interpolation.* Ark. för Math. (im Druck).

[23] — *Interpolation theory for function spaces of Besov type defined in domains.* I. Math. Nachr. (im Druck).

[24] — *Boundary values for Sobolev spaces with weights. Density of* $D(\Omega)$ *in* $W^s_{p,\gamma_0,\ldots,\gamma_r}(\Omega)$ *and* $H^s_{p,\gamma_0,\ldots,\gamma_r}(\Omega)$ *for* $s > 0$ *and* $r = \left[s - \frac{1}{p}\right]^-$. Ann. Scuola Norm Sup. Pisa (im Druck)

[25] А. Зигмунд (A. Zygmund), *Тригонометрические ряды*, т. I. „Мир", Москва 1965.

SEKTION MATHEMATIK
UNIVERSITÄT JENA

Received February 24, 1972 (476)