Contents of volume XLIX, number 1

The journal STUDIA MATHEMATICA prints original papers in English, French, German and Russian, mainly on functional analysis, abstract methods of mathematical analysis and on the theory of probabilities. Usually 3 issues constitute a volume.

The papers should be typed on one side only and they should be accompanied by abstracts, normally not exceeding 200 words. The authors are requested to send two copies one of them being the typed, not Xerox, copy. Authors are advised to retain a copy of the paper submitted for publication.

Manuscripts and the correspondence concerning editorial work should be addressed to

STUDIA MATHEMATICA
ul. Śniadeckich 8,
00-950 Warszawa, Poland

Correspondence concerning exchange should be addressed to:

Institute of Mathematics,
Polish Academy of Sciences,
ul. Śniadeckich 8,
00-950 Warszawa, Poland

The journal is available at your bookseller's or at

ARS POLONA-RUCH
Krakowskie Przedmieście 7
00-068 Warszawa (Poland)

PRINTED IN POLAND

WROCŁAWSKA DRUKARNIA NAUKOWA

Sur un théorème de M. Schechter concernant la transposée du produit de deux opérateurs

par

PHAM THE LAI (Nantes)

Résumé. On généralise un théorème de M. Schechter concernant la transposée du produit de deux opérateurs aux cas d'espaces vectoriels topologiques localement convexes.

1. Dans un article récent [6], M. Schechter a prouvé le théorème suivant:

Soient X, Y, Z trois espaces de Banach et A un opérateur fermé de domaine dense de X dans Y, et B un opérateur de domaine dense de Y dans Z. Si l'image $\mathscr{R}[A]$ de A est fermée et de codimension finie dans Y, alors $(BA)' = A'B'$ où E' désigne la transposée de E.

Nous allons, dans cet article, prouver le même résultat (Théorème 3 ci-dessous) en faisant des hypothèses convenables sur les opérateurs A et B; X, Y, Z étant des espaces vectoriels topologiques localement convexes séparés arbitraires (evtlc). Le résultat mentionné de M. Schechter sera obtenu comme un résultat particulier d'un corollaire du théorème général.

X étant un evtlc, X' désignera le dual topologique de X et $\langle\ ,\ \rangle$ le crochet de dualité entre X et X'.

Si A est un opérateur de X dans Y, $\mathscr{D}[A]$, $\mathscr{N}[A]$, $\mathscr{R}[A]$ désigneront respectivement son domaine de définition, son noyau et son image.

A sera dit ouvert, si l'image par A d'un voisinage de 0 de $\mathscr{D}[A]$ est un voisinage de 0 de $\mathscr{R}[A]$.

Lorsque $\mathscr{D}[A]$ est dense dans X, A' désigne la transposée de A et $\mathscr{D}[A']$ le domaine de A'.

2. Commençons par quelques lemmes. Le suivant est prouvé dans [2] dans le cas d'espaces de Banach.

Lemme 1. *Soit Y un evtlc, R un sous-espace fermé de codimension finie et D un sous-espace dense de Y. Alors:*

a) *Il existe un sous-espace de dimension finie $N \subset D$ tel que N soit un supplémentaire topologique de R dans Y.*

b) *$D \cap R$ est dense dans R.*

Preuve. a) Puisque R est fermé et de codimension finie, il existe [1] un projecteur continu p_0 de Y d'image R. Alors, si $q_0 = I - p_0$ où I est l'identité, q_0 est continu et on a:

$$q_0(\bar{D}) \subset \overline{q_0(D)};$$

or $q_0(\bar{D}) = q_0(Y)$, car D est dense;

$q_0(Y) = q_0(D)$ car $q_0(D)$ est de dimension finie.

Soit N un sous-espace de dimension finie de D tel que q_0 soit un isomorphisme de N sur $q_0(D)$. On vérifie alors que N est un supplémentaire topologique de R.

b) Soit p le projecteur continu d'image R associé à la décomposition topologique de Y suivant R et N.

On vérifie que $p(D) = D \cap R$ et que $p(D)$ est dense dans R, d'où la conclusion.

Lemme 2. *Soient X, Y, Z trois evtlc et A un opérateur de domaine dense de X dans Y, B un opérateur de domaine dense de Y dans Z. Supposons que A soit un opérateur ouvert dont l'image $\mathscr{R}[A]$ est fermée et de codimension finie. Alors le domaine de BA est dense dans X.*

Preuve. Soit φ la surjection canonique: $X \to \dfrac{X}{\mathscr{N}[A]}$. Elle est continue et ouverte.

Soit $\tilde{A}$ la bijection canonique associée à A, de domaine $\mathscr{D}[\tilde{A}] = \varphi(\mathscr{D}[A])$.

$\mathscr{D}[\tilde{A}]$ est dense dans $\dfrac{X}{\mathscr{N}[A]}$ puisque $\mathscr{D}[A]$ l'est.

$\tilde{A}$ est ouverte, puisque A l'est. $\tilde{A}^{-1}$ est donc continue de $\mathscr{R}[A] \to \dfrac{X}{\mathscr{N}[A]}$.

$D[B]$ est dense dans Y, donc en vertu du b) Lemme 1, $\mathscr{D}[B] \cap \mathscr{R}[A]$ est dense dans $\mathscr{R}[A]$; il vient de là:

$$\mathscr{D}[\tilde{A}] = \tilde{A}^{-1}(\overline{\mathscr{D}[B] \cap \mathscr{R}[A]}) \subset \overline{\tilde{A}^{-1}(\mathscr{D}[B] \cap \mathscr{R}[A])}. \tag{1}$$

De (1) on déduit:

$$\mathscr{D}[\tilde{A}] \subset \overline{\varphi(\mathscr{D}[BA])}.$$

De la densité de $\mathscr{D}[\tilde{A}]$, on déduit que $\varphi(\mathscr{D}[BA])$ est dense dans $\dfrac{X}{\mathscr{N}[A]}$.

Montrons alors que $\mathscr{D}[BA]$ est dense dans X.

Soit $x \in X$ et $\mathscr{U}$ un voisinage de 0 quelconque de X. $\varphi(\mathscr{U})$ est un voisinage de 0 de $\dfrac{X}{\mathscr{N}[A]}$, puisque φ est ouverte; donc il existe $\dot{\xi} \in \varphi(\mathscr{D}[BA])$ tel que:

$$\dot{\xi} - \varphi(x) \in \varphi(\mathscr{U}). \tag{2}$$

Soit $\xi \in \mathscr{D}[BA]$ tel que $\varphi(\xi) = \dot{\xi}$. De (2) il résulte:

$$\xi - x \in \mathscr{U} + \mathscr{N}[A].$$

Il existe donc $n \in \mathscr{N}[A]$, tel que $\xi + n - x \in \mathscr{U}$.

Comme $\mathscr{N}[A] \subset \mathscr{D}[BA]$, le lemme est établi.

3. Nous avons le:

Théorème 3. *Dans les conditions du lemme 2, on a:*

$$(BA)' = A'B'.$$

Preuve. En vertu du lemme 2, $(BA)'$ existe. De plus, $(BA)'$ est un prolongement de $A'B'$. C'est évident.

Réciproquement, prouvons que $\mathscr{D}[(BA)'] \subset \mathscr{D}[A'B']$. Soit $z' \in \mathscr{D}[(BA)']$.

α. Preuve de $z' \in \mathscr{D}[B']$. Considérons la forme linéaire 1 sur $\mathscr{D}[B]$: $y \mapsto 1(y) = \langle By, z' \rangle$. D'après le a) du lemme 1, il existe un sous-espace N de dimension finie $\subset \mathscr{D}[B]$, supplémentaire topologique de $\mathscr{R}[A]$ dans Y; soit alors p le projecteur continu d'image $\mathscr{R}[A]$ associé à cette décomposition.

On sait que: $p(\mathscr{D}[B]) \subset \mathscr{D}[B]$. Soit alors $\tilde{p}$ la restriction de p à $\mathscr{D}[B]$, considérée comme opérateur de $\mathscr{D}[B]$ dans $\mathscr{D}[B]$: $\tilde{p}$ est un projecteur continu.

Soit B_N la restriction de B à N, considérée comme opérateur de N dans Z; B_N est continu, car N est de dimension finie.

Soit alors: $\varepsilon > 0$. Puisque $z' \in Z'$, il existe $\mathscr{W}$ voisinage de 0 de Z tel que:

$$|\langle z, z' \rangle| \leqslant \varepsilon/2, \quad \forall z \in \mathscr{W}.$$

Il existe alors un voisinage $\mathscr{W}_1$ de 0 de N tel que $B(\mathscr{W}_1) \subset \mathscr{W}$, car B_N est continu.

De là:

$$|1(y)| = |\langle By, z' \rangle| \leqslant \varepsilon/2, \quad \forall y \in \mathscr{W}_1. \tag{3}$$

Par ailleurs, puisque $z' \in \mathscr{D}[(BA)']$, il existe $\mathscr{U}$ voisinage de 0 de X tel que:

$$|\langle BAx, z' \rangle| \leqslant \varepsilon/2, \quad \forall x \in \mathscr{U} \cap \mathscr{D}[BA]. \tag{4}$$

A étant ouverte, $\mathscr{W}_2 = \mathscr{R}[\tilde{p}] \cap A(\mathscr{U} \cap \mathscr{D}[A])$ est un voisinage de 0 de $\mathscr{R}[\tilde{p}]$.

Si $y \in \mathscr{W}_2$, il existe $u \in \mathscr{U} \cap \mathscr{D}[BA]$ telle que $1(y) = \langle BAu, z' \rangle$, d'où, on déduit de (4):

$$|1(y)| \leqslant \varepsilon/2, \qquad \forall y \in \mathscr{W}_2. \tag{5}$$

Alors $\mathscr{V} = \tilde{p}^{-1}(w_2) \cap (I-\tilde{p})^{-1}(w_1)$ est un voisinage de 0 de $\mathscr{D}[B]$, et pour $y \in \mathscr{V}$, on a: $y = \tilde{p}(y) + (I-\tilde{p})(y)$ avec $\tilde{p}(y) \in \mathscr{W}_2$ et $(I-\tilde{p})(y) \in \mathscr{W}_1$, d'où, de (3) et (5),

$$|1(y)| \leqslant \varepsilon, \qquad \forall y \in \mathscr{V}.$$

Donc 1 est une forme linéaire continue sur $\mathscr{D}[B]$, ce qui prouve que: $z' \in \mathscr{D}[B']$.

β. Preuve de $B'z' \in \mathscr{D}[A']$. Pour cela, nous allons prouver que l'on a:

$$\langle Ax, B'z' \rangle = \langle x, (BA)'z' \rangle \quad \text{pour } \forall x \in \mathscr{D}[A]. \tag{6}$$

Soient $x \in \mathscr{D}[A]$ et $\varepsilon > 0$ arbitraires; puisque $(BA)'z' \in X'$, il existe $\mathscr{U}$ voisinage de 0 de X tel que

$$|\langle u, (BA)'z' \rangle| \leqslant \varepsilon/2, \qquad \forall u \in \mathscr{U}; \tag{7}$$

puisque $B'z' \in Y'$, il existe $\mathscr{V}$ voisinage de 0 de Y tel que

$$|\langle v, B'z' \rangle| \leqslant \varepsilon/2, \qquad \forall v \in \mathscr{V}. \tag{8}$$

$\mathscr{A} = A(\mathscr{U} \cap \mathscr{D}[A]) \cap \mathscr{V}$ est un voisinage de 0 de $\mathscr{R}[A]$. Comme $\mathscr{D}[B] \cap \cap \mathscr{R}[A]$ est dense dans $\mathscr{R}[A]$, il existe $x_0 \in \mathscr{D}[BA]$ tel que $A(x_0 - x) \in \mathscr{A}$.

De (8) et du fait que $A(x_0 - x) \in \mathscr{V}$:

$$|\langle A(x_0 - x), B'z' \rangle| \leqslant \varepsilon/2. \tag{9}$$

De (7) et du fait que $\varphi(x_0 - x) \in \varphi(\mathscr{U})$, il existe $u_0 \in \mathscr{U}$ tel que l'on a:

$$|\langle x_0 - x, (BA)'z' \rangle| = |\langle u_0, (BA)'z' \rangle| \leqslant \varepsilon/2. \tag{10}$$

De (9), (10) et du fait que $x_0 \in \mathscr{D}[BA]$, il résulte:

$$|\langle Ax, B'z' \rangle - \langle x, (BA)'z' \rangle| = \varepsilon.$$

ε étant arbitraire, (6) est prouvée, ainsi que le théorème.

4. En faisant appel maintenant à différents théorèmes du graphe fermé, donc en faisant des hypothèses convenables sur les espaces considérés, on peut alors modifier les hypothèses faites sur l'opérateur A et retrouver, dans le cas d'espaces de Banach, les énoncés classiques.

Nous considérons sur le couple (X, Y) l'une des deux hypothèses suivantes:

(K) X est un espace de Pták [5] et Y un espace tonnelé,

(W) X est un espace à réseau de type $\mathscr{C}$ [7] et Y un espace de Baire.

Alors, rappelons que l'on a le théorème suivant, prouvé par G. Köthe [4] dans l'hypothèse (K) et par M. de Wilde [7] dans l'hypothèse (W):

Dans l'une des deux hypothèses précédentes, si A est un opérateur à graphe fermé dans $X \times Y$ et si $\mathscr{R}[A]$ est de codimension finie, alors A est ouvert et $\mathscr{R}[A]$ est fermé.

De ce résultat et des précédents, nous déduisons immédiatement les corollaires:

COROLLAIRE 4. *Soient X, Y, Z trois evtlc, le couple (X, Y) vérifiant (K) ou (W), A et B deux opérateurs comme précédemment de domaines denses. Supposons que A soit à graphe fermé et $\mathscr{R}[A]$ de codimension finie. Alors le domaine de BA est dense dans X.*

COROLLAIRE 5. *Dans les conditions du corollaire 4, on a:*

$$(BA)' = A'B'.$$

Remarques. a) Le corollaire 4 donne, dans le cas d'espaces de Banach, un résultat classique (S. Goldberg [3]).

b) Le corollaire 5 donne, dans le cas d'espaces de Banach, le théorème de M. Schechter.

c) Il est clair que les lemmes 1, 2 et le théorème 3 restent valables dans le cas non localement convexe.

Références

[1] N. Bourbaki, *Espaces vectoriels topologiques*, Hermann, 1953.

[2] I. C. Gokhberg, M. G. Krein, *Fundamental Theorems on Deficiency Numbers, Root Numbers and Indices of Linear Operators*, A. M. S. Translations, Série 2, Vol. 13 (1960), p. 185-264.

[3] S. Goldberg, *Unbounded linear Operators*, 1966.

[4] H. Köthe, *Die Bildräume abgeschlossener Operatoren*, J. für die Reine und Angew. Math. 232 (1968), p. 110-111.

[5] V. Pták, *Completeness and the open mapping theorem*, Bull. Soc. Math. France 86 (1958), p. 41-71.

[6] M. Schechter, *The conjugate of a product of operators*, Journal of Functional Analysis, 1970.

[7] M. de Wilde, *Opérateurs ouverts et sous-espaces complémentaires dans un espace ultrabornologique*, B. de la Société Royale des Sciences de Liège n° 9-10, 1969, p. 454-458.

Received June 23, 1972 (547)