К элементарной теории топологических алгебр

А. Д. Тайманов (Новосибирск)

В статье [9] А. И. Мальцева, не вошедшей в собрание [12] его работ по математической логике, изложены основы теории свободных топологических алгебр и сформулированы интересные нерешенные проблемы. В частности в [9] обсуждается проблема такого определения топологии с помощью операций, которые позволяют применить методы теории моделей, математической логики в теории топологических алгебр, аналогично тому, как эти методы применяются в изучении дискретных алгебраических систем. Цель настоящей работы — обратить внимание специалистов по математической логике на работу [9] и на сформулированные там проблемы, решение которых связано с методами математической логики.

§ 1. Обычно топологическая алгебра $\mathfrak{A} = \langle A, \sigma, t\rangle$ сигнатуры σ определяется как алгебра, в основном множестве A которого определена топология t и все сигнатурные операции непрерывны в этой топологии. Топология t задается с помощью системы $W = \{w_i,\ i \in I\}$ открытых подмножеств, или с помощью операции предела. Все эти способы выражаются на языке второй ступени и, к сожалению, не позволяют применить методы узкого исчисления предикатов. Этот вопрос обсуждается в § 4 работы [9]. Можно дать два определения топологии средствами языка первого порядка. Обсудим эти определения.

Определение 1. Топологической алгеброй сигнатуры σ называется *последовательность* $\mathfrak{A} = \langle A, \sigma, t\rangle$, где

(i_1) $\mathfrak{A}^* = \langle A, \sigma\rangle$ есть алгебра сигнатуры σ в смысле работ [10], [4];

(i_2) $t(x, y)$ — бинарное отношение, определяющее топологию в $\mathfrak{A}^*$ и удовлетворяет следующим аксиомам:

I_1. $\forall y \exists x\, t(x, y)$ — каждая точка y имеет окрестность

$$u_x(y) = \{z/t(x, z)\} \quad \text{с индексом } x.$$

II_1. $\forall x_1 \forall x_2 \forall y \{t(x_1, y) \wedge t(x_2 y) \to \exists x_3 [t(x_3, y) \wedge \forall z (t(x_3, z) \to t(x_1, z) \wedge \wedge t(x_2, z))]\}$ — для всяких двух множеств

$$u_{x_1} = \{z/t(x_1, z)\}, \quad u_{x_2} = \{z/t(x_2, z)\},$$

содержащих y, найдется такое множество $U_{x_3} = \{z/t(x_3, z)\}$, что

$$y \in u_{x_3} \subset u_{x_1} \cap u_{x_2}.$$

III$_1$. $\forall y_1 \forall y_2 \big(y_1 \neq y_2 \to \exists x\big(t(x, y_1) \wedge \neg t(x, y_2)\big)\big)$ — для всяких двух различных точек y_1, y_2 найдется такое множество $u_x = \{z/t(x, z)\}$, что

$$y_1 \in u_x, \quad y_2 \notin u_x.$$

IV$_1$. Если f символ бинарной операции $f(x, y)$ из сигнатуры σ, то

$$\forall y_1 \forall y_2 \forall y_3 \forall x_3 \{f(y_1, y_2) = y_3 \wedge t(x_3, y_3) \to$$
$$\to \exists x_1 \exists x_2 [t(x_1, y_1) \wedge t(x_2, y_2) \wedge \forall y_1' \forall y_2' \forall y_3'$$
$$(f(y_1', y_2') = y_3' \wedge t(x_1, y_1') \wedge t(x_2, y_2') \to t(x_3, y_3'))]\}$$

— операция $z = f(x, y)$ непрерывна в топологии, определяемой отношением $t(x, y)$.

Аксиомы I$_1$-III$_1$ означают, что система Σ множеств $u_x = \{z/t(x, z)\}$, $x \in A$,, представляет собой полную систему окрестностей топологического пространства $\langle A, t\rangle$ ([17], теорема 3). При этом окрестности индексированы элементами алгебры A. Аксиома IV$_1$ выражает непрерывность всех сигнатурных операций в топологии t.

Если топология в алгебре $\mathfrak{A}^* = \langle A, \sigma\rangle$ задана с помощью полной системы окрестностей $W = \{w_i, i \in I\}$ и $\operatorname{card}(I) \leqslant \operatorname{card}(A)(*)$, то можно определить бинарное отношение $t(x, y)$ следующим образом:

Пусть $\varphi\colon I \to A$ взаимнооднозначное отображение и

$$t_\varphi(x, y) \overset{\mathrm{df}}{\leftrightarrow} x = \varphi(i) \wedge y \in w_i.$$

Очевидно, $\mathfrak{A}_\varphi = \langle A, \sigma, t_\varphi\rangle$ будет топологической алгеброй в смысле определения 1.

Каждой топологической алгебре $\mathfrak{A} = \langle A, \sigma, W\rangle$, с полной базой окрестностей $W = \{w_i, i \in I\}$ и удовлетворяющей условию (*) соответствует множество топологических алгебр $\mathfrak{A}_\varphi = \langle A, \sigma, t_\varphi\rangle$, зависящее от отображения $\varphi\colon I \to A$. В этом большой недостаток определения 1. От этого недостатка можно освободиться, приняв следующее определение.

Определение 2. Топологической алгеброй сигнатуры σ называется *алгебраическая система*

$$\mathfrak{A} = \langle A \cup I;\ \sigma, t(x, y),\ I(x)\rangle,$$

где $\mathfrak{A}^* = \langle A, \sigma\rangle$ есть алгебра сигнатуры σ, $t(x, y)$ — бинарное отношение, определяющее топологию в $\mathfrak{A}^*$, $I(x)$ — монарное отношение, определяющее совокупность индексов множеств, входящих в полную систему окрестностей топологического пространства.

Выполнены следующие аксиомы:

I$_2$. $A \cap I = 0$, $A \neq 0$, $I \neq 0$.

II$_2$. $I(x) \leftrightarrow x \in I$.

III$_2$. $t(x, y) \to I(x) \wedge \neg I(y)$.

IV$_2$. Если $f \in \sigma$, то

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = y \to \neg I(x_1) \wedge \ldots \wedge \neg I(x_n) \wedge \neg I(y)$$

— все операции из σ определены только на $A = \{x/\neg I(x)\}$.

V$_2$. $\forall y\big(\neg I(y) \to \exists x\big(t(x, y) \wedge I(x)\big)\big)$ — каждый элемент y алгебры $\langle A, \sigma\rangle$ имеет окрестность $u_x = \{z/t(x, z)\}$.

VI$_2$. $\forall x_1 \forall x_2 \forall y\big(\neg I(y) \wedge I(x_1) \wedge I(x_2) \wedge t(x_1, y) \wedge t(x_2, y) \to \exists x_3[I(x_3) \wedge \wedge t(x_3, y) \wedge \forall z(\neg I(z) \wedge t(x_3, z) \to t(x_1, z) \wedge t(x_2, z)]\big)$ — для любых двух окрестностей

$$u_{x_1} = \{z/t(x_1, z) \wedge \neg I(z)\},$$
$$u_{x_2} = \{z/t(x_2, z) \wedge \neg I(z)\}$$

содержащих точку y, $\neg I(y)$, найдется окрестность $u_{x_3} = \{z/t(x_3, z) \wedge \neg I(z)\}$, содержащая y и лежащая в $u_{x_1} \cap u_{x_2}$.

VII$_2$. $\forall y_1 \forall y_2\big(\neg I(y_1) \wedge \neg I(y_2) \wedge y_1 \neq y_2 \to \exists x\big(t(x, y_1) \wedge \neg t(x, y_2)\big)\big)$ — для всяких двух различных точек y_1, y_2 найдется такое множество $u_x = \{z/t(x, z)\}$, что $y_1 \in u_x$, $y_2 \notin u_x$.

VIII$_2$. Если $f \in \sigma$ символ бинарной операции, то истинна аксиома:

$$\forall y_1 \forall y_2 \forall y_3 \forall x \{\bigwedge_{i=1}^{3} \neg I(y_i) \wedge y_3 = f(y_1, y_2) \wedge t(x_3, y_3) \to$$
$$\to \exists x_1 \exists x_2 [I(x_1) \wedge I(x_2) \wedge t(x_1, y_1) \wedge t(x_2, y_2) \wedge$$
$$\wedge \forall y_1' \forall y_2' \forall y_3' (\bigwedge_{i=1}^{3} \neg I(y_i') \wedge t(x_1, y_1') \wedge$$
$$\wedge t(x_2, y_2') \wedge y_3' = f(y_1', y_2') \to t(x_3, y_3'))]\},$$

утверждающая непрерывность операции f.

Аксиомы I$_2$ - VIII$_2$ означают, что система множеств $u_x = \{z/t(x, z), I(x), \neg I(z)\}$ представляет собой полную систему окрестностей топологического пространства $\langle A, t, I\rangle$ ([17], теорема 3). При этом окрестности индексированы элементами множества I.

Если топология в алгебре $\mathfrak{A}^* = \langle A, \sigma\rangle$ задана с помощью полной системы окрестностей $W = \{w_i, i \in I\}$, $A \cap I = 0$, то можно определить бинарное отношение $t(x, y)$ и алгебру $\mathfrak{A} = \langle A \cup I, \sigma, t, I\rangle$ следующим образом:

$$t(x, y) \leftrightarrow x \in I, \quad y \notin I, \ y \in w_x,$$
$$I(x) \leftrightarrow x \in I.$$

При этом алгебре $\mathfrak{A} = \langle A, \sigma, W\rangle$, $W = \{w_i, \ i \in I\}$ соответствует одна алгебра $\mathfrak{A} = \langle A \cup I, \sigma, t, I\rangle$ в смысле определения 2, и в этом отношении определение 2 лучше первого. Но оно имеет свои недостатки.

Определения 1, 2 вместе позволяют перенести некоторые понятия теории моделей (элементарная подсистема, ультрапроизведения, насыщенные модели и т. д.) в теорию топологических алгебр, записать на языке первого порядка некоторые свойства топологических алгебр и получить некоторые новые результаты.

1. Например, формула

$$N(y) \leftrightharpoons \forall x\big(t(x, y) \to \exists y_1(y_1 \neq y \wedge t(x, y))\big)$$

определяет множество неизолированных точек в топологической алгебре $\mathfrak{A}$.

2. Аксиома $\exists y N(y)$ определяет класс недискретных топологических пространств.

3. Аксиома $\forall y N(y)$ определяет класс топологических алгебр, не имеющих изолированных точек.

4. Легко записать аксиомы отделимости T_1, T_2 — (хаусдорфовость), T_3 — (регулярность).

§ 2. Если принять определения 1, 2 и рассматривать топологические аглебры как алгебраические системы, то многие теоремы теории модулей автоматически переносятся на топологические алгебры. Но при этом обычные понятия изоморфизма, гомоморфизма, подалгебры и др. отличаются от аналогичных понятий, принятых в теории топологических алгебр.

На примере подалгебры покажем это различие.

Определение 3_1. Топологическая алгебра $\mathfrak{A} = \langle A, \sigma, t\rangle$ называется *1-подалгеброй, топологической алгебры* $\mathfrak{B} = \langle B, \sigma, t\rangle$, в обозначениях $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, если $A \subseteq B$, A замкнуто относительно всех сигнатурных операций, и для любых элементов a, a_1, а из A, формула $t(a, a_1)$ истинны в $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда они истинны в $\mathfrak{B}$.

Определение 3_2. Топологическая алгебра $\mathfrak{A} = \langle A, \sigma, t\rangle$ называется *замкнутой 1-подалгеброй алгебры* $\mathfrak{B} = \langle B, \sigma, t\rangle$ если $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ и для всех $x \in B \setminus A$ множество $\{z/\mathfrak{B} \models t(x, z)\}$ не пересекается с A.

Аналогично определяются понятия 2-подалгебры и замкнутой 2-подалгебры.

Определение 4_1. Топологическая алгебра $\mathfrak{A} = \langle A, \sigma, t\rangle$ называется *элементарной 1-подалгеброй алгебры* $\mathfrak{B} = \langle B, \sigma, t\rangle$, в обозначениях $\mathfrak{A} \precsim \mathfrak{B}$, если $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ и всякая формула $\alpha(a_1, \ldots, a_n)$ сигнатура $\sigma \cup \{t\}$ содержащая элементы $a_1, \ldots, a_n$ из A истинна в $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда она истинна в $\mathfrak{B}$.

Определение 4_2. Топологическая алгебра $\mathfrak{A} = \langle A, \sigma, t\rangle$ называется *элементарной замкнутой 1-подалгеброй алгебры* $\mathfrak{B} = \langle B, \sigma, t\rangle$, в обозначениях $\mathfrak{A} \precsim\precsim \mathfrak{B}$, если $\mathfrak{A} \precsim \mathfrak{B}$ и для всех $x \in B \setminus A$, множество $\{z/\mathfrak{B} \models t(x, z)\}$ не пересекается с A.

Аналогично определяются элементарные 2-подалгебры.

Из этих понятий только понятие замкнутой подалгебры встречается в теории топологических алгебр, которое не встречается в теории моделей.

Приведем некоторые следствия теорем теории моделей.

Теорема воота-тарского 1. *Пусть* $\mathfrak{B} = \langle B, \sigma, t\rangle$ *топологическая алгебра и* $A_1 \subset B$. *Тогда существует элементарная 1-подалгебра (2-подалгебры)* $\mathfrak{A} = \langle A, \sigma, t\rangle$ *алгебры* $\mathfrak{B}$ *такая, что*

$$A_1 \subset A, \quad \operatorname{card} A = \operatorname{card} A_1 + \aleph_0.$$

Для каждого кардинала $\mathfrak{m} \geqslant \operatorname{card}(B)$ *существует топологическая 1-алгебра (2-алгебра)* $\mathfrak{C} = \langle C, \sigma, t\rangle$ *такая, что* $\mathfrak{B}$ *есть элементарная 1-подалгебра (2-подалгебра) алгебры* $\mathfrak{C}$ *и* $\operatorname{card}(C) = \mathfrak{m}$.

Доказательство. Непосредственное следствие теоремы Воота-Тарского и теоремы Мальцева о расширении.

Неизвестно, верна ли аналогичная теорема для замкнутых топологических подалгебр и замкнутых топологических расширений.

2. *Пусть K аксиоматизируемый класс алгебр сигнатуры σ. Пусть K_t-класс топологических алгебр, полученных из алгебр класса K, введением топологии $t(x, y)$ согласно определению 1. Тогда K_t аксиоматизируем на языке $\sigma \cup \{t\}$.*

Действительно, к системе Σ аксиом, определяющей класс K нужно добавить аксиомы из определения 1. Полученная система определяет K_t.

3. *Пусть K конечно-аксиоматизируемый класс алгебр сигнатуры σ, K_t^0, $K_t^0 \subset K$ класс алгебр, допускающих недискретную топологию. Тогда K_t^0 финитно-проективный класс.*

Если аксиома α определяет класс K, то присоединяя к α аксиомы из определения 1 а также $\exists y N(y)$ получаем аксиому β сигнатуры $\sigma \cup \{t\}$ определяющую класс K_t^0. Тогда аксиома $\exists t\beta$ определяет класс K_t^0 и следовательно K_t^0 является финитно-проективным.

4. *Пусть $\mathfrak{A}^*$ алгебра сигнатуры σ, допускающая недискретную топологию. Тогда существует элементарное расширение $\mathfrak{B}$ (элементарная подалгебра) в сигнатуре σ, допускающая недискретную топологию.*

Доказательство. Определим в $\mathfrak{A}^*$ топологию $t(x, y)$ согласно определению 1 и рассмотрим алгебру $\mathfrak{A} = \langle A, \sigma, t(x, y)\rangle$ затем применим теорему Воота-Тарского-Мальцева. Опуская в полученных алгебрах предикат t, получаем искомые расширения и подалгебру. Определение 1 применимо для топологических алгебр, удовлетворяющих условию (*). Это ограничение не существенное, что видно из следующей леммы.

Лемма 1. *Если алгебра $\mathfrak{A} = \langle A, \sigma\rangle$ допускает недискретную топологию, то она допускает топологию с базой окрестностей $W = \{w_i, i \in I\}$,* $\operatorname{card}(I) \leqslant \operatorname{card}(A)$.

Доказательство. Пусть алгебра $\mathfrak{A} = \langle A, \sigma\rangle$ допускает недискретную топологию с базой окрестностей $W = \{w_i, i \in I_1\}$, $\operatorname{card} I_1 > \operatorname{card}(A)$. Построим алгебру $\mathfrak{A}^* = \langle A \cup I_1, \sigma, t, I_1\rangle$ сигнатуры $\sigma_1 = \sigma \cup \{I(x), t(x, y)\}$ следующим образом:

1) Основное множество алгебры $\mathfrak{A}^*$ есть $A \cup I_1$, $A \cap I_1 = 0$.

2) Одноместное отношение I определяется равенством:

$$I(x) \leftrightarrow x \in I_1 .$$

3) Операции из σ определяется на множестве A так же, как в алгебре $\mathfrak{A}$, т. е. если в алгебре $\mathfrak{A}^*$ игнорировать отношения t, $I(x)$ и элементы множества I_1, то получаем алгебру $\mathfrak{A} = \langle A, \sigma\rangle$.

4) Бинарное отношение определяется равенством:

$$t(x, y) \leftrightarrow I(x) \wedge (y \in w_x) .$$

Легко показать, что

$$\mathfrak{A}^* = \langle A \cup I_1, \sigma, t, I\rangle$$

будет топологической алгеброй в смысле определения 2 и элементы множества A определяются в $\mathfrak{A}^*$ формулой $\neg I(x)$. По теореме Воота-Тарского в $\mathfrak{A}^*$ найдется элементарная подалгебра

$$\mathfrak{B}^* = \langle B \cup I_2, \sigma, t, I\rangle$$

содержащая множество A и $\operatorname{card}(B \cup I_2) = \operatorname{card}(A) + \aleph_0$. Из включения $A \subset B \cup I_2 \subset A \cup I$, $\mathfrak{B}^* \precsim \mathfrak{A}^*$ и формульности множества A в $\mathfrak{A}^*$ следует, что $B = A$, $I_2 \subset I_1$, $\operatorname{card}(I_2) \leqslant \operatorname{card}(A) + \aleph_0$. Иными словами,

$$\mathfrak{B} = \langle A \cup I_2, \sigma, t, I\rangle$$

есть подалгебра алгебры $\mathfrak{A}^*$, $I_2 \subset I_1$, $\operatorname{card}(I_2) = \operatorname{card}(A)$.

База окрестностей $W_1 = \{w_i, i \in I_2\}$ алгебры $\mathfrak{B}$ есть подбаза базы W. Игнорируя в $\mathfrak{B}$ отношениями t, I и множеством I_1, получаем топологическую алгебру $\mathfrak{B} = \langle B, \sigma,\rangle$ с базой окрестностей W_1.

5. *Пусть $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \precsim \mathfrak{B}$ дискретные алгебры сигнатуры σ и $\mathfrak{A}$ допускает недискретную топологию t. Тогда существует элементарное расширение $\mathfrak{C}$ алгебры $\mathfrak{B}$, допускающее недискретную топологию и* $\operatorname{card}\mathfrak{C} = \operatorname{card}\mathfrak{B}$.

Доказательство. Расширим сигнатуру σ до $\sigma_1 = \sigma \cup \{c_a, a \in A\}$ добавив константы c_a, $a \in A$ для элементов множества A. Интерпретируя c_a элементом $a \in A$ из алгебры $\mathfrak{A}$ получаем алгебру $\mathfrak{A}^0$, из алгебры $\mathfrak{B}$ получаем алгебру $\mathfrak{B}^0$ сигнатуры σ_1. Очевидно $\mathfrak{A}^0$ элементарно эквивалентно алгебре $\mathfrak{B}^0$. По теореме Кислера-Шеллаха ([8], [9]) существует ультрастепени $\mathfrak{A}^{0\langle ID\rangle}$, $\mathfrak{B}^{0\langle ID\rangle}$ и изоморфное отображение $\varphi\colon \mathfrak{A}^{0\langle ID\rangle} \to \mathfrak{B}^{0\langle ID\rangle}$ оставляющие элементы a из A неподвижными. Введем в $\mathfrak{A}^0$ бинарное отношение $t(x, y)$, определяющее недискретную топологию. Полученную алгебру обозначим $\mathfrak{A}_1^0 = \langle A, \sigma, t\rangle$. Тождественное отображение $\mathfrak{A}^{0\langle ID\rangle}$ на $\mathfrak{A}_1^{0\langle ID\rangle}$ определяет в $\mathfrak{A}^{0\langle ID\rangle}$ недискретную топологию. Отображение φ порождает в $\mathfrak{B}^{0\langle ID\rangle}$ отношение $t(x, y)$, определяющее недискретную топологию. Алгебра $\mathfrak{B}$ содержится в топологической алгебре $\mathfrak{B}^{0\langle ID\rangle}$ с отношением $t(x, y)$. По теореме Воота-Тарского-Мальцева существует элементарная 1-подалгебра $\mathfrak{C} = \langle C, \sigma, t\rangle$ алгебры $\mathfrak{B}^{0\langle ID\rangle}$ содержащая $\mathfrak{B} = \langle B, \sigma, t\rangle$ и $\operatorname{card}(B) = \operatorname{card}(C)$. Очевидно, $\mathfrak{C}^* = \langle C, \sigma\rangle$ будет искомым элементарным расширением алгебры $\mathfrak{A}$.

§ 3. Дискретная алгебра $\mathfrak{A} = \langle A, \sigma\rangle$ называется *топологизируемой*, если можно определить в $\mathfrak{A}$ недискретную топологию t, в которой все операции алгебры $\mathfrak{A}$ непрерывны.

Если принять определение 1, 2, то вопрос о топологизации дискретных алгебр, обсуждавшийся в литературе ([10]–[19]) сводится к проблеме определения бинарного отношения $t(x, y)$ в алгебре.

Проблема введения недискретной топологии в алгебрах впервые поставил и решил для счетных групп А. А. Марков. Вопросы, возникшие в литературе в связи с работами ([9], [13]) можно разбить на две группы:

1) В каких алгебрах можно ввести недискретную топологию; охарактеризовать класс групп, колец и т. д., допускающих недискретную топологию.

2) Если алгебра $\mathfrak{A}$ класса K допускает недискретную топологию, то как алгебраические свойства влияют на топологию.

Перечислим основные результаты и нерешенные вопросы, относящиеся к первой группе.

1. Пусть G бесконечная группа, $L(G)$ язык сигнатуры $\sigma = \langle\cdot, ^{-1}, \bar{g}_a, a \in I\rangle$, где $\bar{g}_a$ константы для элемента $g_a \in G$. Пусть $t_1(x), \ldots, t_n(x)$ термы языка $L(G)$, содержащие одно свободное переменное x. Множество, определяемое формулой вида

$$\neg \bigwedge_{i=1}^{n} (e = t_i(x))$$

называется *элементарно алгебраическим в группе G*.

Теорема Маркова А. А. Счетная группа G допускает недискретную топологию тогда и только тогда, когда множество $G \setminus \{e\}$ не является элементарно алгебраическим.

Теорема Кертис и Суеле [6]. Всякая бесконечная абелева группа допускает недискретную топологию.

Теоремы Арнаутова В. И. [1]. Всякое счетное кольцо допускает недискретную топологию. Всякое коммутативно-ассоциативное кольцо допускает недискретную топологию.

Теорема Мутылина, А. Ф., Кильтинена Н. [16], [17]). Всякое бесконечное поле допускает недискретную топологию.

Построены примеры нетопологизируемых группоидов (Хансен [5]), квазигрупп [19], коммутативных полугрупп [20], кольца [20]. О топологизируемости тел ничего не известно.

Нерешенные вопросы.

1. Существует ли нетопологизируемая группа (А. А. Марков)?
2. Существует ли нетопологизируемая счетная группа (А. А. Марков)?
3. Можно ли перенести теорему Маркова на несчетные группы?
4. Существует ли нетопологизируемое коммутативное (ассоциативное) кольцо (Арнаутов В. И.)?
5. Существует ли нетопологизируемая коммутативная полугруппа, вложимая в группу?

В решении второго круга вопросов центральной является теорема Л. С. Понтрягина о полной регулярности пространства групп [17]. Не решена проблема Мальцева А. И.: существует ли топологическая полугруппа (лупа) пространство которой не вполне регулярно?

§ 4. Конструктивные топологические алгебры. Определения 1, 2 позволяют дать элементарное определение нумерованных топологических алгебр

Определение 5. Нумерованной топологической алгеброй сигнатуры σ называется *последовательность* $\mathfrak{A} = \langle A, \sigma, n(x, y), t(x, y)\rangle$ где

A — рекурсивно перечислимое множество нечетных чисел,

$\mathfrak{A} = \langle A, \sigma, n(x, y)\rangle$ алгебра,

отношение $n(x, y)$ есть ограничение рекурсивного отношения на A и является конгруэнцией алгебры $\langle A, \sigma\rangle$,

бинарное отношение $t(x, y)$ определено на множестве $\omega_r \times A$ где

$$\omega_r = (0, 2, 4, \ldots),$$

и

$$t(x, y) \to x \in \omega_r \wedge y \in A,$$

$$n(z, y) \wedge t(x, z) \to t(x, y).$$

Кроме того выполнены следующие условия:

I. Существует ч. р. функция $\varphi_1(y)$, такая, что φ_1: $A \to \omega_r$ и $\forall y t(\varphi_1(y), y)$, если $y \in A$.

II. Существует ч. р. функция $\varphi_2(x, y, z)$ такая, что

$$\varphi_2\colon \omega_r \times \omega_r \times A \to \omega_r$$

и

$$\forall x \forall y \forall r \Big(t(x, z) \wedge t(y, z) \wedge \Big[t\big(\varphi_2(x, y, z), z\big) \wedge \wedge \forall u \Big(t\big(\varphi_2(x, y, z), u\big) \to t(\alpha, u) \wedge t(y, u)\Big)\Big]\Big)$$

для каждой точки $z \in A$ и любых окрестностей $u_x = \{z/t(x, z)\}$, $u_y = \{z/t(y, z)\}$ найдется окрестность $W = \{z/t(\varphi_2(x, y, z), z)\}$ с номером $\varphi_2(x, y, z)$, содержащая Z и содержащаяся в пересечении $U_x \cap U_y$.

III. Существует ч. р. функция $\varphi_3(x, y)$ такая, что φ_3: $A \times A \to \omega$ и для y_1, y_2 из A таких, что $\neg n(y_1, y_2)$ имеет место условие

$$t\big(\varphi_3(y_1, y_2), y_1\big) \wedge \neg t\big(\varphi_3(y_1, y_2), y_2\big)$$

IV. Для каждого символа операции из σ соответствующая ей операция непрерывна. Пусть $f(x, y) \in \sigma$. Тогда существуют ч. р. функции $\lambda_1(y_1, y_2, z, x)$, $\lambda_2(y_1, y_2, z, x)$ такие, что

$$\lambda_i\colon A^3 \times \omega_z \to \omega_z, \quad i = 1, 2,$$

$$\forall y_1 \forall y_2 \forall z \forall x \Big(f(y_1, y_2) = z \wedge t(x, z) \to t\big(\lambda_1(y_1, y_2, z, x), y_1\big) \wedge \wedge t\big(\lambda_2(y_1, y_2, z, x), y_2\big) \wedge \forall y_1' \forall y_2' \forall z' \big[t\big(\lambda_1(y_1, y_2, z, x), y_1'\big) \wedge \wedge t\big(\lambda_2(y_1, y_2, z, x), y_2'\big) \wedge f(y_1', y_2') = z' \to t(x, z')\big]\Big).$$

Приведем примеры нумерованных топологических алгебр.

Пример 1. Свободная полугруппа допускает недискретную нумерованную топологию.

Для простоты рассмотрим свободную полугруппу $F(a, b, c)$ порожденную тремя символами a, b, c. Множество слов в алфавите $\{a, b, c\}$ упорядочим по длине слов, а слова одинаковой длины лексикографический. Полученную последовательность обозначим

$$(x_1, x_2, x_3, \ldots,) \tag{1}$$

где x_1 слово длины 0.

На множестве $A = \{1, 3, 5, \ldots, 2k+1, \ldots\}$ определим операцию умножения f и отношение $n(x, y)$ равенствами

$$f(2n-1, 2m-1) = 2k-1 \overset{\text{df}}{\leftrightarrow} x_n x_m = x_k \quad \text{в (1)},$$

$$n(x, y) \overset{\text{df}}{\leftrightarrow} x = y.$$

Получаем нумерованную алгебру

$$\langle A \cup I, f, n\rangle$$

где

$$A = \{1, 3, 5, \ldots\}, \qquad I = \{0, 2, 4, \ldots\}.$$

Пусть

$$G_i = \{a^{2^{is}};\ s = 0, 1, 2, \ldots\}, \qquad i \geqslant 1,\ i \in \omega.$$

Каждому элементу $x = a^{\alpha_1} b^{\beta_1} c^{\gamma_1} \ldots a^{\alpha_n} b^{\beta_n} c^{\gamma_n}$ ставим в соответствие множество

$$G_i x = (G_i a)^{\alpha_1} (G_i b)^{\beta_1} (G_i c)^{\gamma_1} \ldots (G_i a)^{\alpha_n} (G_i b)^{\beta_n} (G_i c)^{\gamma_n}, \qquad i \in \omega.$$

Тогда система множеств

$$\{G_i x_n;\ n \in \omega,\ i \geqslant 1\}$$

образует базу окрестностей недискретной топологии в $F(a, b, c)$ в которой операция f непрерывна. Эту топологию можно задать отношением $t(x, y)$, определяемое следующим соглашением: Окрестности точки x_n нумеруются числами вида $2^{p_n^i}$, где p_n обозначает n-ое простое число и

$$t(k, m) \Leftrightarrow x_m \in G_i x_n.$$

Чтобы получить нумерованную топологическую алгебру

$$\langle A \cup I, f, n, t \rangle$$

определим функции $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$.

Если $x \neq y$,

$$x = a^{\alpha_1} b^{\beta_1} c^{\gamma_1} \ldots a^{\alpha_n} b^{\beta_n} c^{\gamma_n},$$

$$y = a^{\overline{\alpha_1}} b^{\overline{\beta_1}} c^{\overline{\gamma_1}} \ldots a^{\overline{\alpha_n}} b^{\overline{\beta_n}} c^{\overline{\gamma_n}},$$

то возможны следующие случаи:

(*) $\qquad \alpha_i = \overline{\alpha_i}, \quad \beta_i = \overline{\beta_i}, \quad \gamma_i = \overline{\gamma_i}$ при $i \leqslant k$ и $\alpha_k > \overline{\alpha_k}$

или

(**) $\qquad \alpha_k = \overline{\alpha_k}, \quad \beta_k > \overline{\beta_k}$

или

(***) $\qquad \alpha_k = \overline{\alpha_k}, \quad \beta_k = \overline{\beta_k}, \quad \gamma_k > \overline{\gamma_k}.$

Функцию $\varphi_2(x, y, z)$, $\varphi_2\colon \omega_r^2 \times A \to \omega_r$ определяем равенством:

$$\varphi_2(k, l, m) = \begin{cases} 2^{p_m^{(\alpha_k+1)}}, & \text{если верно } (*), \\ 2^{p_m^{(\beta_k+1)}}, & \text{если верно } (**), \\ 2^{p_m^{(\gamma_k+1)}}, & \text{если верно } (***). \end{cases}$$

Функцию $\varphi_3(x, y)$, $\varphi_3\colon A^2 \to \omega_r$ определяем равенством:

$$\varphi_3(k, l, m) = \begin{cases} 2^{p_n^{(\alpha_k+1)}}, & \text{если верно } (*), \\ 2^{p_n^{(\beta_k+1)}}, & \text{если верно } (**), \\ 2^{p_n^{(\gamma_k+1)}}, & \text{если верно } (***). \end{cases}$$

Непрерывность операции умножения обеспечивается функциями $\lambda_i(y_1, y_2, z, x)$, $i = 1, 2$ определяемыми равенствами:

$$\lambda_1(k, l, m, n) = 2^{p_k^{2i}}, \quad \text{если } n = 2^{p_m^i}, \text{ неопределена в остальных случаях},$$

$$\lambda_2(k, l, m, n) = 2^{p_c^{2i}}, \quad \text{если } n = 2^{p_c^i}, \text{ неопределена в остальных случаях}.$$

Литература

[1] В. И. Арнаутов, *Недискретная топологизируемость счетных колец*, ДАН СССР, 191 (4) (1970), стр. 747–750.

[2] — *Пример бесконечного кольца, допускающего только дискретную топологию*. Матем. исследов. 3 (17) (1970), стр. 182–185.

[3] J. L. Bell and A. B. Slomson, *Models and Ultraproducts: An introduction*, 1969.

[4] G. Grätzer, *Universal Algebra*, 1968.

[5] J. R. Hanson, *An infinite groupoid which admits only trivial topologies*, Amer. Math. Monthly 74 (1967), pp. 568–569.

[6] A. Kertész and T. Szele, *On the existence of non-discrete topologies in infinite abelian groups*, Publ. Math. Debrecen. 3 (1953), pp. 187–189.

[7] J. O. Kiltinen, *Inductive ring topologies*, Trans. of the Amer. Math. Soc. 134 (1) (1968), pp. 149–170.

[8] П. Кон, *Универсальная алгебра*, Москва 1968.

[9] А. И. Мальцев, *Свободные топологические алгебры*, Изв. АН СССР, сер. матем. 21 (1957), стр. 171–178.

[10] — *Алгебраические системы*, Москва 1970.

[11] — *Алгоритмы и рекурсивные функции*, Москва 1965.

[12] A. I. Mal'cev, *The metamathematics of algebraic systems*, Collected papers: 1936–1967, 1971.

[13] А. А. Марков, *О свободных топологических группах*, Изв. АН СССР, сер. матем. 9 (1945), стр. 3–64.

[14] — *О безусловно замкнутых множествах*, Матем. сб., 18 (60), № 1, стр. 3–28.

[15] — *О существовании периодических связных топологических групп*, Изв. АН СССР, сер. матем. 8 (1944), стр. 225–232.

[16] А. Ф. Мутылин, *Полные локально ограниченные поля*, Изв. АН СССР, сер. матем. 30 (4) (1966), стр. 873–900.

[17] Л. С. Понтрягин, *Непрерывные группы*, Москва 1973.

[18] S. Shelah, *Every two elementary equivalent models have isomorphic ultrapowers*, Israel. J. Math. 10 (1971), pp. 224–233.

[19] Н. М. Суворов, Т. П. Уфнаровская, *Пример бесконечной квазигруппы, допускающей только дискретную топологию*, в сб. „Исследования по теории квазигрупп“, Кишинев 1973.

[20] А. Д. Тайманов, *Пример полугруппы, допускающей только дискретную топологию* Алгебра и Логика 12 (1) (1973), стр. 114–116.

Reçu par la Rédaction le 3. 8. 1973

Quasi-inverses of morphisms

by

Roman Sikorski (Warszawa)

Abstract. A morphism A is said to be *quasi-invertible*, if there exists a quasi-inverse of A, i.e. a morphism B such that $ABA = A$. A characteristic factorization for quasi-invertible morphisms is proved. A necessary and sufficient condition is given for the composition B_1B_2 of quasi-inverses B_1, B_2 of morphisms A_1, A_2 to be a quasi-inverse of the composition A_2A_1. A characteristic factorization for A_2A_1 is formulated. A general theorem is proved on the existence of quasi-invertible morphisms A_1, A_2 such that A_2A_1 is not quasi-invertible.

The notion of quasi-inverse which is the subject of this paper is a generalization of the notion of inverse, left-hand inverse and right-hand inverse of morphisms. Theorem 2.5 (and its modification 3.1) gives a simple characteristic factorization of quasi-invertible morphisms. Theorem 2.6 yields a simple necessary and sufficient condition for the composition of quasi-inverses of morphisms to be a quasi-inverse of the composition of the morphisms. If it is satisfied, then theorem 2.7 (and its modification 3.2) gives a characteristic factorization for the composition.

In many categories the composition of quasi-invertible morphisms is not always quasi-invertible. Two examples of this kind, which were communicated to me by A. Białynicki-Birula (in the case of the category of abelian groups) and P. Wojtaszczyk (in the case of the category of Banach spaces), suggested me a general theorem 4.4 which produces easily examples of this kind for many concrete categories. On the other hand, there are also non-trivial concrete categories such that every morphism is quasi-invertible.

The notion of quasi-inverse is closely related to that of projection. It is often supposed in this paper that every projection in the category under consideration can be split in a way explained in the first section.

§ 1. Splits of projections. Let $\mathcal{C}$ be a fixed *category*. The letter O (with indices) will always denote *objects* in $\mathcal{C}$. For any objects O_1, O_2 in $\mathcal{C}$ the symbol $\mathrm{Hom}(O_1, O_2)$ will stand for the set of all *morphisms* from O_1 into O_2. If $A \in \mathrm{Hom}(O_1, O_2)$, we say that O_1 is the *domain* of A, and O_2 is the *co-domain* of A. The domain and the co-domain of a morphism A