Метризация пространств близости над тихоновскими полуполями

В. З. Поляков (Москва)

Понятие полуполя и, в частности, тихоновского полуполя, было введено в работе М. Я. Антоновского, В. Г. Болтянского и Т. А. Сарымсакова [1]. Здесь мы будем интересоваться близостью, порождаемой на множестве P симметрической метрикой $\varrho\colon P\times P\to R_+^{\Delta}$ над тихоновским полуполем (*) R^{Δ}. В случае, когда метрика ϱ не направлена (**), последнее понятие нуждается в уточнении. Вспомним, что топология на множестве P вводится обычно посредством задания для произвольной точки $x\in P$ базы окрестностей, соответствующих окрестностям нуля в полуполе: $\Omega(x, U) = \{p\in P|\ \varrho(x,p)\in U\}$. Это определение в точности эквивалентно такому: если $x\in P\supset M$, то $x\in[M]$ тогда и только тогда, когда существует разложение $M=\bigcup\{M_i|\ i\leqslant n\}$ и притом $\varrho(x, M_i)\neq 0$ при всех i. В самом деле, если

$$M\cap\Omega(x, U)=\emptyset\quad \text{и}\quad U\supset\Pi\{O_{q_i}|\ i\leqslant n\}\times R^{\Delta\setminus\{q_i|\ i\leqslant h\}},$$

то пусть

$$M_i=\{y\in M|\ \varrho_{q_i}(x,y)\notin O_{q_i}\}\,.$$

Предположим, $z\in M$; тогда $z\notin\Omega(x, U)$, то есть найдется $q\in\{q_i\}$ с $\varrho_q(x,z)\notin O_q$ и, таким образом, $\bigcup\{M_i|\ q_i\in\{q_i\}\}=M$. Напротив, если $M=\bigcup\{M_i|\ i\leqslant n\}$ и все $\lambda_j=\varrho(x, M_j)\neq 0$, то можно определить

$$U_j=\{\alpha\in R^{\Delta}|\ \alpha\not>\tfrac{1}{2}\lambda_j\}\ (***)\,.$$

Очевидно, что

$$\varrho(x,y)\in\bigcap\{U_j|\ j\leqslant n\}\Rightarrow y\notin\bigcup\{M_j|\ j\leqslant n\}\,,$$

то есть

$$M\cap\Omega(x, \bigcap\{U_j|\ j\leqslant n\})=\emptyset\,.$$

(*) Как обычно, R — действительная прямая, Δ — абстрактное множество; R_+^{Δ} — подмножество неотрицательных элементов полуполя (в [1] — „замкнутый конус“).

(**) См. [2] или [5]. Ниже о направленных метриках будет говориться подробнее.

(***) Символ $\not>$ понимается как отрицание $>$. Всюду, когда речь идет о частично упорядоченных множествах, мы считаем $\alpha>\alpha$. Легко убедиться поэтому, что все U_j открыты в R^{Δ}.

„Аналогичным“ образом можно ввести на P две близости, которые, однако, совпадать уже не будут: близость $\delta = \delta(\varrho)$, в которой A нет δ B, если существуют разложения $A = \bigcup\{A_i|\ i \leqslant n\}$ и $B = \bigcup\{B_j|\ j \leqslant m\}$, причем все $\lambda_{ij} = \varrho(A_i, B_j) \neq 0$, а также более тонкую близость $\mathfrak{d} = \mathfrak{d}(\varrho)$, определяемую отношением: $A\,\bar{\mathfrak{d}}\,B$, если в полуполе существует окрестность нуля U с $A \cap \Omega(B, U) = \emptyset$.

Всегда $\delta < \mathfrak{d}$; пример, когда $\delta \neq \mathfrak{d}$, доставляет плоскость, тождественно метризованная над R^2: здесь $R^\delta = R\cdot R$, а $R^{\mathfrak{d}} = R \times R$; как известно (см. [6] или [7]), произведение и слабое произведение двух прямых — пространств близости — не совпадают. Топологии близостей δ и $\mathfrak{d}$, очевидно, суть рассмотренные выше топологии и поэтому, напротив, совпадают.

Лемма 1. *Пусть на множествах P и Q, определены метрики ϱ и σ, а отображение $f\colon P \to Q$ удовлетворяет условию: $\varrho(A, B) = 0 \Rightarrow \sigma(fA, fB) = 0$ для любых $A, B \subset P$. Отображение пространств близости $f\colon P^{\delta(\varrho)} \to Q^{\delta(\sigma)}$ тогда эквинепрерывно.*

В самом деле, пусть $A\,\delta(\varrho)\,B$ и пусть fA и fB будут конечными объединениями множеств A_i и B_k. Объединения множеств $f^{-1}A_i$ и $f^{-1}B_k$ суть близкие множества A и B, поэтому $\varrho(f^{-1}A_\iota, f^{-1}B_\varkappa) = 0$ при некоторых ι и $\varkappa$ и, следовательно, $\sigma(A_\iota, B_\varkappa) = 0$, то есть $fA\,\delta(\sigma)\,fB$.

Пусть $a \in R^\Delta_+$ и $x \in P$; будем обозначать

$$\Omega(x, a) = \{p \in P|\ \varrho(x, p) \ngtr a\}\ (*).$$

Поскольку

$$\Gamma_a = \{\gamma \in R^\Delta|\ \gamma \ngtr a\} \supset (-\infty, a_q) \times R^{\Delta\setminus\{q\}}$$

при любом $q \in \Delta$, причем если $a_{q'} = 0$ при всех $q' \neq q$, то имеет место равенство, множества $\Gamma_a \cap R^\Delta_+$ образуют предбазу (открытых) окрестностей 0 в индуцированной топологии „конуса“ R^Δ_+, а множества $\Omega(x, a)$, следовательно, — предбазу открытых окрестностей точки $x \in P$ в рассмотренной выше топологии метрики ϱ. Определим теперь *a-покрытие, соответствующее метрике* ϱ, как покрытие $\mathfrak{D}^\varrho_a \equiv \mathfrak{D}_a = \{\Omega(x, a)|\ x \in P\}$. Убедимся, что покрытие $\mathfrak{D}_a$ равномерно (**) в пространстве близости $P = P^\delta$. Действительно, во-первых, если $A \cap \mathrm{St}(B, \mathfrak{D}_a) = \emptyset$, то $\varrho(A, B) > a$ и, следовательно, A нет δ B; во-вторых, если $\beta \in R^\Delta_+$ отлично от нуля на единственной координате q и $2\beta < a$, то покрытие $\mathfrak{D}_\beta$ звездно вписано в $\mathfrak{D}_a$: в самом деле, окрестности $\Omega(y, \beta)$ состоят из всех $p \in P$, для которых $\varrho(p, y) \ngtr \beta$, то есть $\varrho_{q_1}(p, y) < \beta_{q_1}$ при каком-нибудь q_1, а это возможно только при $q_1 = q$. Итак,

$$\Omega(y, \beta) \subset \{p \in P|\ p_q(p, y) < \tfrac{1}{2}a_q\};$$

(*) Если бы пространство было обыкновенным метрическим, то $\Omega(x, a) = \{p \in P|\ \mathrm{dist}(x, p) < a\}$ было *открытым* шаром радиуса a.

(**) Покрытие называется *равномерным* в пространстве близости, если оно не разъединяет близких множеств и с него начинается последовательность звездно вписанных друг в друга покрытий, также обладающих этим свойством (подробнее — в [7]).

по этой причине

$$\mathrm{St}(x, \mathfrak{D}_\beta) \subset \Omega(x, 2\beta) \subset \Omega(x, a) \in \mathfrak{D}_a.$$

Из определения близости $\delta(\varrho)$ следует, что покрытия $\mathfrak{D}_a$, при всевозможных $a \nless 0$, образуют базу (*) пространства близости P^δ. По этой причине мы под „естественной близостью“ метрики ϱ будем понимать именно близость $\delta(\varrho)$, но не $\mathfrak{d}(\varrho)$.

Определение. Пусть $\varrho\colon P^2 \to R^\Delta$ и $\sigma\colon P^2 \to R^\Sigma$ — метрики на множестве P. Будем писать $\varrho > \sigma$, если для любого $a \in R^\Sigma_+$, $a \neq 0$, можно подобрать $\varepsilon \in R^\Delta_+$, $\varepsilon \neq 0$, с тем, чтобы выполнялось $\forall x\,\forall y$: $\sigma(x, y) > a \Rightarrow \varrho(x, y) > \varepsilon$.

Введенное отношение является предпорядком в классе всех метрик на P (в том смысле, что из $\varrho > \sigma$ и $\sigma > \varrho$ не следует, вообще говоря, $\varrho = \sigma$). Рассматриваемый здесь предпорядок отличен от предпорядка, введенного в [3]. Из сравнимости метрик по Антоновскому следует аналогичная сравнимость в нашем смысле.

Лемма 2. *Если $\varrho > \sigma$, то $P^{\delta(\varrho)} > P^{\delta(\sigma)}$.*

Действительно, если $\sigma(A, B) = a \neq 0$, то имеется $\varepsilon \nless 0 \in R^\Delta_+$ с $\varrho(A, B) > \varepsilon$. Итак, запас разъединяемых, а значит, и их объединений — далеких множеств — в пространстве $P^{\delta(\varrho)}$ не меньше, чем в $P^{\delta(\sigma)}$.

Усилением леммы 2 является

Лемма 3. *$\varrho > \sigma$ тогда и только тогда, когда для любого $a \nless 0 \in R^\Sigma$ существует $\varepsilon \nless 0 \in R^\Delta$ с $\mathfrak{D}^\varrho_\varepsilon < \mathfrak{D}^\sigma_a$.*

Доказательство. Необходимость. Если $\sigma(x, y) > a \Rightarrow \varrho(x, y) > \varepsilon$, то, обращая импликацию, $\varrho(x, y) \ngtr \varepsilon \Rightarrow \sigma(x, y) \ngtr a$, и, таким образом, $\Omega^\varrho(x, \varepsilon) \subset \Omega^\sigma(x, a)$.

Достаточность. Пусть β отличается от 0 на единственной координате и $2\beta < a$. В покрытие $\mathfrak{D}^\sigma_\beta$ можно, по предположению, вписать покрытие вида $\mathfrak{D}^\varrho_\varepsilon$ при некотором $\varepsilon \nless 0 \in R^\Delta$. Пусть x — произвольная точка P. Мы имеем:

$$x \in \Omega^\varrho(x, \varepsilon) \subset \Omega^\sigma(y, \beta) \subset \Omega^\sigma(x, a), \quad \text{или} \quad \varrho(x, z) \ngtr \varepsilon \Rightarrow \sigma(x, z) \ngtr a.$$

Обозначим через $\mathfrak{M}(P)$, где P теперь — пространство близости, класс метрик, порождающих это пространство, то есть $\mathfrak{M}(P) = \{\varrho|\ P^{\delta(\varrho)} = P\}$ (мы их будем называть *метриками пространства* P), а через $\mathfrak{P}(P)$ — класс *псевдометрик*, то есть метрик, удовлетворяющих более слабому требованию: $A\,\delta\,B \Rightarrow \varrho(A, B) = 0$; очевидно, что если $\varrho \in \mathfrak{P}(P)$, то $P^{\delta(\varrho)} < P$.

(*) Базы пространств близости мы определяем в [8] как системы покрытий, для которых рассматриваемая близость — грубейшая, в которой все они равномерны; в этом смысле они аналогичны предбазам топологических пространств. В рассматриваемом случае система равномерных покрытий $\mathfrak{D}_a$ является базой потому, что любые два множества, разъединяемые ими, далеки, и, напротив, все далекие множества можно представить в виде конечных объединений множеств, разъединяемых покрытиями $\mathfrak{D}_a$.

Лемма 4. *Пусть* $\varrho_\nu\colon P^2 \to P^{\Delta_\nu}$ *— система метрик и* $\varrho = (\varrho_\nu)$ *— их сочетание, то есть метрика, понимаемая как естественное отображение* $P^2 \to \Pi_\nu R^{\Delta_\nu}$. *Если все* $\varrho_\nu \in \mathfrak{B}(P)$, *то также* $\varrho \in \mathfrak{B}(P)$.

Доказательство. В самом деле, пусть $K\,\delta\,L$ в P и $\lambda = \varrho(K, L) \in \Pi_\nu R^{\Delta_\nu} = R^{U_\nu \Delta_\nu}$. Рассмотрим произвольный индекс $q \in U_\nu \Delta_\nu$; при некотором ν имеем $q \in \Delta_\nu$ и $\varrho_\nu(K, L) = 0$, поэтому $\lambda_q = \big(\varrho(K, L)\big)_q = \big(\varrho_\nu(K, L)\big)_q = 0$ и, таким образом, $\lambda = 0$.

Теорема 1. *Пусть* P *— произвольное пространство близости. В предупорядоченном классе* $\mathfrak{B}(P)$ *имеются наибольшие элементы — „истинные“ метрики* (*) *пространства* P.

Доказательство. Пусть $\{\mathfrak{A}\}$ — множество всех равномерных покрытий пространства близости P. Согласно фундаментальной теореме Андрэ Вейля [4] для каждого равномерного покрытия $\mathfrak{A}$ можно подобрать метрику $\varrho_{\mathfrak{A}}\colon P^2 \to R^1$ с $\varrho_{\mathfrak{A}} \in \mathfrak{B}(P)$ и $\mathfrak{D}_1^{\varrho_{\mathfrak{A}}} < \mathfrak{A}$. Сочетание ω всех $\varrho_{\mathfrak{A}}$ и есть один из наибольших элементов в $\mathfrak{B}(P)$. Действительно, если $\sigma \in \mathfrak{B}(P)$ и $\alpha \lessdot 0$ — элемент ее полуполя, то $\mathfrak{D}_\alpha^\sigma = \mathfrak{D} \in \{\mathfrak{A}\}$, и в покрытие $\mathfrak{D}$ вписано покрытие $\mathfrak{D}_\lambda^\omega$, где $\lambda \in R^{\{\mathfrak{A}\}}$ определяется условиями: $\lambda_{\mathfrak{D}} = 1$ и $\lambda_{\mathfrak{A}} = 0$ при $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{D}$.

Истинные метрики — совокупность которых мы обозначим $\mathfrak{W}(P)$ — будучи, по определению, лишь наибольшими элементами в классе $\mathfrak{B}(P)$, в действительности автоматически оказываются метриками пространства P, то есть элементами $\mathfrak{M}(P)$; итак, $\mathfrak{W}(P) \subset \mathfrak{M}(P) \subset \mathfrak{B}(P)$. Действительно, пусть $\varrho \in \mathfrak{W}(P)$ — истинная метрика; известно [3], что всегда $\mathfrak{M}(P) \neq \emptyset$, поэтому мы можем выбрать $\sigma \in \mathfrak{M}(P)$. Справедливо, по определению истинных метрик, $\varrho > \sigma$, следовательно, $P^{\delta(\varrho)} > P^{\delta(\sigma)} = P$; с другой стороны, $\varrho \in \mathfrak{B}(P)$ значит $P^{\delta(\varrho)} < P$. Различие между метриками и истинными метриками вскрывается следующим утверждением:

Метрика является истинной в пространстве P *в том и только в том случае, когда множество ее* α*-покрытий образует конфинальную часть множества всех равномерных покрытий пространства близости* P*; она лишь метризует пространство, если ее* α*-покрытия образуют базу равномерных покрытий этого пространства.* Добавим еще, что *метрика является псевдометрикой пространства близости если и только если все ее покрытия равномерны.* (Первое утверждение следует из цитированной теоремы Вейля: каждому равномерному покрытию подчинена некоторая метрика, а истинная метрика ее мажорирует). Из высказанного утверждения вытекает, в частности, что обыкновенные действительные метрики — если, разумеется, они возможны в пространстве — всегда истинны.

(*) Формулировка теоремы является, таким образом, одновременно определением истинных метрик. Выбор этого несколько претенциозного термина объясняется тем, что именно истинные метрики пригодны для описания так называемых равномерных — в смысле [8] — свойств пространств близости (см. доказываемые ниже теоремы 2, 3 и 5).

Определения (*). Пусть (X, ϱ) — метрическое пространство над полуполем R^Δ. Сеть $\{x_\xi \mid \xi \in \Xi\} \subset X$, где Ξ — направленное множество, называется *фундаментальной*, если для любого $\alpha \in R_+^\Delta$, $\alpha \neq 0$, найдется $\zeta \in \Xi$ с $\xi, \eta > \zeta \Rightarrow \varrho(x_\xi, x_\eta) \gtrdot \alpha$. Пространство (X, ϱ) называется *полным*, если всякая фундаментальная сеть сходится, то есть существует $\lim\{x_\xi\} = x \in X$ с тем, что для любого $\alpha \lessdot 0$ найдется $\zeta \in \Xi$ с $\xi > \zeta \Rightarrow \varrho(x, x_\xi) \gtrdot \alpha$.

Две метрики, порождающие одну и ту же топологию и даже близость, не обязательно порождают одновременно полные или нет метрические пространства. Однако справедлива

Теорема 2. *Пусть метрика* ϱ *истинна в пространстве близости* P. *Пространство* P *полно* (**) *тогда и только тогда, когда метрическое пространство* (P, ϱ) *полно.*

Доказательство. Достаточность. Покажем сначала, что если $\mathfrak{F}$ $\varrho \in \mathfrak{M}(P)$ и P полно по метрике ϱ, то P полно (***). Пусть — фильтр Коши. Выбираем $x_F \in F \in \mathfrak{F}$ и докажем, что сеть $\{x_F \mid F \in \mathfrak{F}\}$ фундаментальна. Итак, пусть $\alpha \lessdot 0$; подберем $\beta < \frac{1}{2}\alpha$, отличающийся от 0 на единственной координате. Покрытие $\mathfrak{D}_\beta$ равномерно в пространстве близости P, поэтому найдется $\Omega = \Omega(y, \beta) \in \mathfrak{D}_\beta \cap \mathfrak{F}$. Допустим, $x_F x_H > x_\Omega$, то есть $F \cup H \subset \Omega$. Тогда $x_F, x_H \in \Omega$, поэтому $\varrho(x_F, y) \gtrdot \beta \lessdot \varrho(x_H, y)$ и, следовательно, $\varrho(x_F, x_H) \gtrdot 2\beta < \alpha$. Таким образом, существует $x = \lim\{x_F \mid F \in \mathfrak{F}\}$. Требуется установить, что $x \in \bigcap\{[F] \mid F \in \mathfrak{F}\}$, то есть $x \in [F]$ при любом $F \in \mathfrak{F}$. Предполагая противное, допустим, что $F = \bigcup\{A_i \mid i \leqslant n\} \in \mathfrak{F}$ и все $\lambda_i = \varrho(x, A_i) \neq 0$. Для каждого λ_i найдется $H_i \in \mathfrak{F}$ с $x_H > x_{H_i} \Rightarrow \varrho(x, x_H) \gtrdot \lambda_i$. Рассмотрим $G = \bigcap\{H_i \mid i \leqslant n\} \in \mathfrak{F}$: теперь $x_H > x_G \Rightarrow \forall i\colon \varrho(x, x_H) \gtrdot \lambda_i$. Положив здесь $H = F \cap G$, получаем $\forall i\colon \varrho(x, x_{F \cap G}) \gtrdot \lambda_i$. Это противоречит тому, что $x_{F \cap G}$ содержится в одном из A_i.

Необходимость. Если пространство близсcти P полно и $\varrho \in \mathfrak{W}(P)$, то метрическое пространство (P, ϱ) полно. Пусть $\{x_\xi \mid \xi \in \Xi\}$ — фундаментальная сеть, а $\mathfrak{F}$ — порождаемый ею фильтр с растром $\big\{\{x_\xi \mid \xi > \eta\} \mid \eta \in \Xi\big\}$. Для доказательства того, что это — фильтр Коши, воспользуемся тем обстоятельством, что покрытия $\mathfrak{D}_\alpha$ образуют конфинальную часть в упорядоченном по вписанности множестве всех равномерных покрытий пространства, и, следовательно, нам достаточно показать, что $\mathfrak{D}_\alpha \cap \mathfrak{F} \neq \emptyset$ при любом $\alpha \lessdot 0$. С этой целью подберем для такого α индекс $\xi \in \Xi$ с тем, чтобы выполнялось $\eta, \zeta > \xi \Rightarrow \varrho(x_\eta, x_\zeta) \gtrdot \alpha$, тогда, в частности, $\eta > \xi \Rightarrow \varrho(x_\eta, x_\xi) \gtrdot \alpha$,

---

(*) Эти определения эквивалентны определениям аналогичных понятий, несколько иначе сформулированным в [3].

(**) Полные пространства близости суть такие, в которых все фильтры Коши сходятся. Фильтр Коши $\mathfrak{F}$ определяется с помощью *бесконечных* равномерных покрытий: требуется, чтобы при любом равномерном покрытии $\mathfrak{A}$ выполнялось $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{A} \neq \emptyset$.

(***) В действительности полноту P мы доказываем, предполагая лишь $\varrho \in \mathfrak{B}(P)$, но $P^{\delta(\varrho)}$ тождественно гомеоморфным P (то есть id: $P^{\delta(\varrho)} \to P$ — топологический гомеоморфизм).

следовательно, $x_\eta \in \Omega(x_\xi, \alpha) \in \mathfrak{D}_\alpha$. Итак, $\{x_\eta | \eta > \xi\} \subset \Omega(x_\xi, \alpha)$, а значит, $\Omega(x_\xi, \alpha) \in \mathfrak{F} \cap \mathfrak{D}_\alpha \neq \emptyset$. Поскольку фильтр Коши $\mathfrak{F}$ мажорирует фильтр окрестностей точки $x = \lim \mathfrak{F}$, при любом $\alpha \not< 0$ найдется $F \in \mathfrak{F}$ с $F \subset \Omega(x, \alpha)$. Но существует ξ с $\{x_\eta | \eta > \xi\} \subset F$. Итак, при $\eta > \xi$ выполняется $\varrho(x_\eta, x) \not> \alpha$.

Определение. Пусть $\alpha\colon \Delta \to R$ и $\beta\colon \Sigma \to R$ — элементы полуполей R^Δ и R^Σ. Элементы $v(\alpha, \beta)$ и $\nu(\alpha, \beta)$ введем как отображения $\Delta \times \Sigma \to R \times R \xrightarrow{\max} R$, соответственно, $\Delta \times \Sigma \to R \times R \xrightarrow{\min} R$. Если $\varrho\colon P^2 \to R^\Delta$ и $\sigma\colon Q^2 \to R^\Sigma$ — метрики над рассматриваемыми полуполями, то под их *внешним произведением* $\varrho \times \sigma$ будем понимать метрику

$$(P \times Q)^2 \to P^2 \times Q^2 \to R^\Delta \times R^\Sigma \xrightarrow{v} R^{\Delta \times \Sigma}.$$

Лемма 5. $\mathfrak{D}^\varrho_\alpha(\times)\mathfrak{D}^\sigma_\beta > \mathfrak{D}^{\varrho\times\sigma}_{\nu(\alpha,\beta)}$.

Доказательство. Если $(x, y) \in \Omega^{\varrho\times\sigma}\big((a, b), \nu(\alpha,\beta)\big)$, то есть

$$(\varrho \times \sigma)\big((x, y), (a, b)\big) \not> \nu(\alpha, \beta),$$

то имеется

$$q = (q', q'') \in \Delta \times \Sigma \quad \text{с } (\varrho \times \sigma)_q\big((x, y), (a, b)\big) \not> \big(\nu(\alpha, \beta)\big)_q.$$

Итак,

$$\max\{\varrho_{q'}(x, a), \sigma_{q''}(y, b)\} < \min\{\alpha_{q'}, \beta_{q''}\},$$

из чего очевидно следует $\varrho(x, a) \not> \alpha$ и $\sigma(y, b) \not> \beta$.

Теорема 3. *Пусть ϱ и σ — истинные метрики пространств близости P и Q. Тогда их внешнее произведение метризует близостное произведение этих пространств: $\varrho \times \sigma \in \mathfrak{M}(P \times Q)$, если $\varrho \in \mathfrak{W}(P)$ и $\sigma \in \mathfrak{W}(Q)$.*

Доказательство. Из леммы 5 следует $P \times Q < (P \times Q)^{\delta(\varrho\times\sigma)}$. Наоборот, пусть $0 \neq \gamma = (\varrho \times \sigma)(K, L) \in R^{\Delta\times\Sigma}$. Выберем $q = (q', q'') \in \Delta \times \Sigma$ с $\gamma_q = 2c \neq 0$ и пусть $\alpha' \in R^\Delta$ и $\beta' \in R^\Sigma$ всюду равны 0, кроме $\alpha'_{q'} = \beta'_{q''} = c$. Произведение покрытий $\mathfrak{D}^\varrho_{\alpha'}$ и $\mathfrak{D}^\sigma_{\beta'}$ разъединяет K и L. Действительно, если $(e, f) \in \big(\Omega(x, \alpha') \times \Omega(y, \beta')\big) \cap K$, то $\varrho_{q'}(e, x) < c$ и $\sigma_{q''}(f, y) < c$; аналогично для L. Следовательно, если бы K и L одновременно пересекались с каким-нибудь произведением $\Omega(x, \alpha') \times \Omega(y, \beta')$, было бы $(\varrho \times \sigma)_q(K, L) = \gamma_q < 2c$.

Как известно, метрика $\varrho\colon P^2 \to R^\Delta$ называется *направленной* [1], если множество Δ направленно относительно порядка $q < q' \Leftrightarrow \forall x \forall y\colon \varrho_q(x,y) \leqslant \varrho_{q'}(x, y)$. Известна операция (введенная, по существу, еще Мрувкой в [6]), соотносящая каждой метрике $\varrho\colon P^2 \to R^\Delta$ направленную метрику $\varrho^d\colon P^2 \to R^{\Delta_d}$, где Δ_d — множество всех конечных подмножеств Δ, причем при $\Lambda \in \Delta_d$ считается $\varrho_\Lambda(x, y) = \max\{\varrho_q(x, y) | q \in \Lambda\}$. Если метрика ϱ направлена, то близости $\delta(\varrho)$ и $\mathfrak{d}(\varrho)$ совпадают, причем оба определения в этом случае эквивалентны такому: $A\,\delta\,B \Leftrightarrow \varrho(A, B) = 0$ (*). В самом деле, пусть,

(*) Именно такое определение использовалось в [2], где была установлена метризуемость пространств близости в классе направленных метрик.

A нет δ B, то есть, в соответствии с определением, $\lambda_{ij} = \varrho(A_i, B_j) \neq 0$. Подберем $q_{ij} \in \Delta$ с $(\lambda_{ij})_{q_{ij}} > 0$. Пусть, $q > q_{ij}$, тогда $(\lambda_{ij})_q > (\lambda_{ij})_{q_{ij}} > 0$ и $(\inf\{\lambda_{ij}\})_q = \min\{(\lambda_{ij})_q\} > 0$. Поэтому $\varrho(A, B) = \inf\{\lambda_{ij}\} \neq 0$.

Теорема 4. *Поправления (*) пространств близости $P = X^{\delta(\varrho)}$, $Q = X^{\mathfrak{d}(\varrho)}$ и $T = X^{\delta(\varrho^d)}$ совпадают: $P! = Q! = T!$*

Доказательство. Справедливо $P < Q < X^{\mathfrak{d}(\varrho^d)} = T$, поэтому $P! < Q! < T!$ Покажем, что, наоборот, $P! > T$ и, следовательно, $P! > T!$

Действительно, по определению, $\varrho \in \mathfrak{M}(P) \subset \mathfrak{B}(P)$, поэтому все „координатные" псевдометрики $\varrho_q\colon P^2 \to R^1$ также принадлежат $\mathfrak{B}(P)$ ввиду $\varrho_q < \varrho$ и тем более $\varrho_q \in \mathfrak{B}(P!)$ при всех $q \in \Delta$. Пусть теперь $\Lambda \in \Delta_d$, то есть $\Lambda \subset \Delta$ и $|\Lambda| < \aleph_0$. Ввиду правильности $P!$ справедливо $\sigma = \Sigma_{q\in\Lambda}\varrho_q \in \mathfrak{B}(P!)$ (см. [7]) и, следовательно, $\varrho_\Lambda \in \mathfrak{B}(P!)$, поскольку $\varrho_\Lambda < \sigma$. Метрика ϱ^d, являясь сочетанием всех ϱ_Λ, также принадлежит классу $\mathfrak{B}(P!)$.

Следствие. *Если $P = P!$, то все три класса метрик $\mathfrak{B}(P)$, $\mathfrak{M}(P)$ и $\mathfrak{W}(P)$ замкнуты относительно операции d; обратное вытекает из заключительной теоремы.*

Как известно, всякое пространство близости можно, согласно [3], метризовать направленной метрикой; выше было показано, что среди метрик пространства близости имеются истинные. Пересекаются же эти подклассы далеко не всегда.

Теорема 5. *Пространство близости правильно тогда и только тогда, когда среди его истинных метрик есть хотя бы одна направленная.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $P = P!$ и $\varrho \in \mathfrak{W}(P)$. Согласно предыдущей теореме, $\varrho^d \in \mathfrak{B}(P!) = \mathfrak{B}(P)$. Ввиду $\varrho < \varrho^d$ получается $\varrho^d \in \mathfrak{W}(P!)$

Достаточность. Пусть G и H — произвольные пространства близости, а отображения $P \to G$ и $P \to H$ эквинепрерывны. Метризуем G и H метриками ϱ и σ над полуполями R^Δ и R^Σ соответственно, и пусть метрики ξ и η на множестве P определяются как суперпозиции $P^2 \to G^2 \to R^\Delta$ и $P^2 \to H^2 \to R^\Sigma$. Справедливо $\xi, \eta \in \mathfrak{B}(P)$, а отображения $(P, \xi) \to (G, \varrho)$ и $(P, \eta) \to (H, \sigma)$ удовлетворяют лемме 1, поскольку, очевидно, расстояния между произвольными двумя точками (и множествами) равны расстояниям между их образами; по той же причине $(P \times P, \xi \times \eta) \to (G \times H, \varrho \times \sigma)$ также удовлетворяет условиям этой леммы.

Покажем, что лемме 1 удовлетворяет диагональное вложение $(P, \tau) \to (P \times P, \xi \times \eta)$, каковы бы ни были $\xi, \eta \in \mathfrak{B}(P)$ при условии, что метрика

(*) Пространство близости P называется *правильным*, если вместе с любыми двумя эквинепрерывными отображениями $P \to X$ и $P \to Y$ эквинепрерывна также „вектор-функция" $P \to X \times Y$. Под X и Y можно здесь понимать произвольные пространства близости или произвольные метрические пространства. Правильные пространства близости образуют корефлективную подкатегорию среди всех пространств близости, а ее корефлектор „!" называется *поправлением* (подробнее см. в [7]).

$\tau\colon P \to R^T$ направленна и истинна. Действительно, пусть A и B — подмножества диагонали в $P \times P$, идентифицируе мые с множествами пространства P, и $(\xi \times \eta)(A, B) = \gamma \neq 0$. Мы утверждаем, что существуют $\alpha \in R_+^{\Delta}$ и $\beta \in R_+^{\Sigma}$, оба не равные 0, с $(x, y) \in A \times B \Rightarrow \xi(x, y) > \alpha \vee \eta(x, y) > \beta$: в противном случае для любого $q = (q', q'') \in \Delta \times \Sigma$ с $\gamma_q \neq 0$ можно было б подобрать $(x, y) \in A \times B$ с $\xi_{q'}(x, y) < \gamma > \eta_{q''}(x, y)$, то есть получилось бы

$$(\xi \times \eta)_q \times (x, y) < \gamma_q.$$

Ввиду истинности τ справедливо $\tau > \xi$ и $\tau > \eta$ и, следовательно, существуют $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in R_+^T$, для которых $(x, y) \in A \times B \Rightarrow \tau(x, y) > \varepsilon_1 \vee \tau(x, y) > \varepsilon_2$. Пусть $(\varepsilon_1)_{q_1} = a \neq 0$, $(\varepsilon_2)_{q_2} = b \neq 0$; пользуясь направленностью τ, выбираем $q \in \tau$ с $q > q_1, q_2$. Итак,

$$(x, y) \in A \times B \Rightarrow \tau_q(x, y) \geqslant (\varepsilon_1)_{q_1} \vee \tau_q(x, y) \geqslant (\varepsilon_2)_{q_2},$$

то есть $\tau_q(A, B) \geqslant \min\{a, b\} > 0$ и, таким образом, $\tau(A, B) \neq 0$.

Теперь мы можем заключить, что в суперпозиции

$$P = P^{\delta(\tau)} \to (P \times P)^{\delta(\xi \times \eta)} \to (G \times H)^{\delta(\varrho \times \sigma)}$$

все составляющие отображения эквинепрерывны и, таким образом, $P \to (G \times H)^{\delta(\varrho \times \sigma)}$ эквинепрерывно, каковы бы ни были метрики ϱ и σ в пространствах близости G и H. Предполагая эти метрики истинными, получаем эквинепрерывность $P \to G \times H$ и, следовательно, правильность пространства P.

Автор благодарен проф. М. Я. Антоновскому, консультации которого были весьма полезными, за постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Я. Антоновский, В. Г. Болтянский и Т. А. Сарымсаков, *Очерк теории топологических полуполей* 21 (4) (1966).

[2] — — *Тихоновские полуполя и некоторые проблемы общей топологии* 25 (3) (1970).

[3] — *Гомоморфизмы тихоновских полуполей и обобщенные полуметрики* 69 (2) (1970).

[4] A. Weil, *Sur les éspaces à structure uniforme et sur la topologie générale*, Paris 1937.

[5] S. Mrówka, *A necessary and sufficient condition for m-almost-metrizability*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 6 (1957), pp. 627–629.

[6] В. З. Поляков, *Правильность, произведение и спектры пространств близости* 154 (1) (1964).

[7] — *Правильность и произведение пространств близости*, Матем. сб. 67 (3) (1965).

[8] — *Равномерные свойства пространств близости*, Москва 1968.

Reçu par la Rédaction le 22. 5. 1972

Discrete ordered rings

by

G. A. Heuer (*) (Moorhead, Minn.)

Abstract. A fully ordered ring is called *discrete* if the positive class has a least element; otherwise it is dense. The paper studies the embedding of a discrete ordered ring in a discrete ordered ring with unity; conditions for the existence of a discrete ring in a discrete ordered ring with unity; discrete orders in direct sums; nonisomorphic discrete orders for the same full order; discrete orders in direct sums; nonisomorphic discrete orders for the same full order; embedding discrete ordered rings in dense ones, and vice versa; discrete subrings of ordered rings; rings with well ordered positive class, and rings with Archimedean order; order in quadratic extensions of ordered rings. Special attention is given to integral domains.

1. Introduction. The integers have been somewhat popularly characterized as constituting the unique ordered (commutative) integral domain (with unity) with well-ordered positive class. They constitute, in fact, the unique ordered ring with unity having well-ordered positive class, as we show in Corollary 10.4. However, ordered rings (with or without unity) in which the positive class is not necessarily well-ordered, but has a least element, abound, and these are the subject of the present study.

If the positive class has a least element e, then each element r of the ring has an immediate successor $r+e$ and an immediate predecessor $r-e$. If the positive class has no least element, then between any two distinct elements of the ring lie infinitely many ring elements. Thus the order type of an ordered ring (indeed, any ordered group) is either discrete throughout or dense throughout. We shall call ordered rings *discrete* or *dense* according as the positive class has or has not a least element.

Except in Section 4, where we consider the extension of discrete partial orders to discrete full orders, only fully ordered rings are considered, and hereafter "ordered ring" is understood to mean "fully-ordered ring".

In Section 3 we show that whenever a discrete ordered ring is order-embeddable in an ordered ring with unity, it is order-embeddable in a discrete ordered ring with unity. In Section 4 we obtain a criterion for the existence of a discrete full order, analogous to that of Fuchs for the existence of a full order. Section 5 gives necessary conditions, and suf-

(*) Research supported by NSF Grant GY7675. Roger Bjorgan served as a very valuable student assistant in this project.