Задача А. Н. Тихонова о классификации H-замкнутых расширении

В. В. Федорчук (Москва)

Abstract. In 1956 A. N. Tychonoff asked how one could describe by means of proximity structures all H-closed extensions of a Hausdorff space. In this paper we answer the question in the classe of all semiregular spaces.

A family of θ-proximities on a Hausdorff space is called *H-structure*, if it satisfies the axiom of compatibility with topology, the axiom of separability and the axiom of completeness. The main theorem of this paper (Theorem 3) says that the partially ordered set of all H-structures on a semiregular space X is isomorphic to the partially ordered set of all semiregular H-closed extensions of X.

Theorem 2 shows that all semiregular H-closed extensions of the discrete countably infinite space N cannot be described by means of proximity structures (i.e. binary relations on the power set of N).

Theorem 4 shows that all H-closed extensions of the space N cannot be described by means of families of binary relations on the power set of N.

Введение. С *Мемуара о компактных топологических пространствах* П. С. Александрова и П. С. Урысона, написанного в 1922-1923 г. г., (см. [2]) ведет свое начало теория H-замкнутых пространств. П. С. Александров и П. С. Урысон доказали, что бикомпактные подмножества хаусдорфовых пространств замкнуты, и определили абсолютно замкнутые или H-замкнутые пространства, как пространства, замкнутые во всяком объемлющем их хаусдорфовом пространстве. В 1929 г. А. Н. Тихонов доказал [10], что всякое хаусдорфово пространство содержится в H-замкнутом, а в 1937 г. М. Стоун доказал [9], что всякое хаусдорфово пространство имеет H-замкнутое расширение. В дальнейшем H-замкнутые пространства изучали М. Катетов [5], [6], А. Д. Александров [1], С. В. Фомин [16], [17] и целый ряд других математиков. М. Катетов доказал, в частности, что всякое хаусдорфово пространство X имеет наибольшее H-замкнутое расширение τX.

В 1956 г. А. Н. Тихонов поставил задачу построить все H-замкнутые расширения данного хаусдорфова пространства аналогично тому, как

Ю. М. Смирнов построил [8] все бикомпактные расширения вполне регулярного пространства с помощью пространств близости.

Задачу А. Н. Тихонова наиболее общим образом можно сформулировать так:

Аксиоматически определить на хаусдорфовом пространстве X близостные структуры так, чтобы каждой близостной структуре η соответствовало одно и только одно H-замкнутое расширение $h_\eta X$, (единственная) близостная структура которого порождает структуру η.

Эту задачу можно конкретизировать следующим образом: Искомые близостные структуры, как и обычные близости, должны быть бинарными отношениями на множестве всех подмножеств данного пространства.

В первом случае будем говорить об обобщенной задаче А. Н. Тихонова, во втором — о классической задаче А. Н. Тихонова.

В § 1 изучается классическая задача А. Н. Тихонова. Теорема 1 показывает, что близость имеет естественное и (при некоторых предположениях) единственное продолжение с бикомпактных пространств на H-замкнутые. Из этой теоремы вытекает, что при решении задачи А. Н. Тихонова естественно ограничиться классом полурегулярных пространств. Полурегулярные пространства — пространства, базу которых образуют канонически открытые множества, — были введены М. Стоуном в уже цитированной работе [9].

Основной результат первого параграфа, теорема 2, показывает, что классическая задача А. Н. Тихонова не имеет решения и в классе полурегулярных пространств.

Во втором параграфе решается обобщенная задача А. Н. Тихонова в классе полурегулярных пространств. При этом используется понятие θ-близости, введенное и изученное в работах [11], [12], [13], [14]. Семейство η θ-близостей, удовлетворяющее трем аксиомам (согласования с топологией, отделимости и полноты), называется H-структурой. Простые примеры H-структур: 1° семейство η_δ θ-близостей, мажорирующих данную близость δ на вполне регулярном пространстве; 2° семейство $\eta(X)$ всех θ-близостей на H-замкнутом пространстве X — единственная H-структура на X. При этом нижняя грань семейства $\eta(X)$ совпадает с бинарным отношением, определенным в теореме 1. Таким образом первый пример показывает, что H-структуры — это естественное продолжение близостей на хаусдорфовы пространства. А из второго примера следует, что это продолжение на H-замкнутые пространства изоморфно построенному в теореме 1. Кроме того, ограничение H-структуры на всюду плотное подпространство будет H-структурой. Поэтому H-замкнутое расширение hX хаусдорфова пространства X порождает на X H-структуру η_h.

Основной результат работы, теорема 3, утверждает, что для всякой H-структуры η на полурегулярном пространстве X существует единственное полурегулярное H-замкнутое расширение $h_\eta X$, H-структура которого порождает структуру η. Таким образом, существует взаимно однозначное соответствие между множеством H-структур на данном полурегулярном пространстве X и множеством его полурегулярных H-замкнутых расширений. Для произвольного хаусдорфова пространства X множество H-структур на нем находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством неуплотняемых H-замкнутых его расширений.

Теорема 4, в которой, как и в теореме 2, подсчитывается мощность множества H-замкнутых расширений, показывает, что для описания всех H-замкнутых расширений даже такого простого пространства, как множество N натуральных чисел, не хватает и семейств близостей.

Теперь об употребляемых здесь обозначениях и понятиях. Замыкание множества A обозначается через $[A]$, внутренность — через $\langle A\rangle$. Через $[A]^\theta$ обозначается θ-замыкание множества $A\subset X$, т. е. $[A]^\theta=\{x\in X|\ [Ox]\cap A\neq\emptyset$ для любой окрестности Ox точки $x\}$ (см. Н. В. Величко [4]). Через OA, Ox обозначается открытая окрестность множества A, точки x. Если $f\colon X\to Y$ — отображение и $A\subset X$, то через $f^\# A$ (обозначение В. И. Пономарева) обозначается малый образ множества A, т. е. $f^\# A=\{y\in Y|\ f^{-1}(y)\subset A\}$. Через $|A|$ обозначается мощность множества A. Что касается употребляемого здесь понятия θ-близости, то подробности можно найти в работах [13], [14]. Напомним еще, что отображение $f\colon X\to Y$ называется θ-непрерывным (С. В. Фомин [16]), если для любой точки $x\in X$ и любой окрестности Ofx существует такая окрестность Ox, что $f[Ox]\subset[Ofx]$.

Основные результаты этой работы сформулированы в заметке [15].

§ 1. Классическая задача А. Н. Тихонова решения не имеет. Сначала попробуем продолжить категорию $\mathcal{B}_0$ бикомпактных пространств близости на все H-замкнутые пространства. В предположении, что мы уже задали H-близости, естественно назвать H-близостно непрерывным отображением всякое отображение, при котором прообразы далеких множеств далеки. Чтобы продолжение $\mathcal{K}_0$ категории $\mathcal{B}_0$ было достаточно хорошим, естественно наложить на него следующие требования:

1. Все морфизмы θ-непрерывны.

2. Морфизмов достаточно много.

3. Бикомпакты достаточно хорошо апроксимируют H-замкнутые пространства.

Следующая теорема существования и единственности достаточно полно отражает эти требования.

Теорема 1. *Бинарное отношение η, определенное на всяком H-замкнутом пространстве X условием*

$$A\,\bar{\eta}\,B\Leftrightarrow[A]^\theta\cap[B]^\theta=\emptyset$$

задает единственное продолжение $\mathcal{K}_0$ категории $\mathcal{B}_0$ бикомпактных пространств близости на все H-замкнутые пространства, обладающие следующими свойствами:

1° *Все морфизмы категории $\mathcal{K}_0$ θ-непрерывны.*

2° *Все θ-непрерывные отображения бикомпактов являются морфизмами категории $\mathcal{K}_0$.*

3° *Всякие два H-близкие множества имеют близкие прообразы в бикомпакте.*

Доказательство. Сначала проверим, что определенное выше отношение η удовлетворяет условиям 1°, 2°, 3°. Для этого предварительно докажем вспомогательное утверждение.

Лемма 1. *Отображение $f\colon X\to Y$ θ-непрерывно тогда и только тогда, когда для любых подмножеств A и B пространства Y из $[A]^\theta\cap[B]^\theta=\varnothing$ вытекает $[f^{-1}A]^\theta\cap[f^{-1}B]^\theta=\varnothing$.*

Доказательство. Пусть отображение $f\colon X\to Y$ θ-непрерывно и $x\in[f^{-1}A]^\theta\cap[f^{-1}B]^\theta$. Тогда замыкание $[Ox]$ произвольной окрестности точки x пересекается как с $f^{-1}A$, так и с $f^{-1}B$. Это означает, что $f[Ox]\cap A\neq\varnothing$ и $f[Ox]\cap B\neq\varnothing$. Но тогда из θ-непрерывности отображения f вытекает, что $fx\in[A]^\theta\cap[B]^\theta$.

Теперь проверим достаточность. Пусть x-произвольная точка пространства X. Для произвольной окрестности Ofx имеем $[fx]^\theta\cap[Y\setminus[Ofx]]^\theta=\varnothing$, поскольку θ-замыкание открытого множества совпадает с его замыканием. Следовательно, $[f^{-1}fx]^\theta\cap[f^{-1}(Y\setminus[Ofx])]^\theta=\varnothing$. Тогда $x\notin[f^{-1}(Y\setminus[Ofx])]^\theta$ и, значит, существует такая окрестность Ox, что $[Ox]\cap f^{-1}(Y\setminus[Ofx])=\varnothing$. Таким образом $f[Ox]\subset[Ofx]$, и лемма 1 доказана.

Из этой леммы вытекает, что отношение η удовлетворяет условиям 1° и 2°. Теперь докажем еще одно вспомогательное утверждение, которое понадобится нам и в дальнейшем.

Лемма 2. *Отношение δ_x, определенное следующим образом:*

$A\,\bar\delta_x\,B\Leftrightarrow$ существуют такие непересекающиеся окрестности OA и OB, что

$$x\notin[OA]\cap[OB]$$

является θ-близостью.

Доказательство. Аксиомы симметрии ($A\,\bar\delta_x\,B\Rightarrow B\,\bar\delta_x\,A$) и монотонности ($A\,\bar\delta_x\,(B_1\cup B_2)\Rightarrow A\,\bar\delta_x\,B_i$, $i=1,2$) выполнены очевидным образом. Пусть теперь $A\,\bar\delta_x\,B_i$, $i=1,2$. Существуют такие окрестности O_1A, OB_1, O_2A, OB_2, что $O_iA\cap OB_i=\varnothing$, $[O_iA]\cap[OB_i]\not\ni x$, $i=1,2$. Положим $OA=O_1A\cap O_2A$ и $O(B_1\cup B_2)=OB_1\cup OB_2$. Очевидно, что $OA\cap O(B_1\cup B_2)=\varnothing$ и $x\notin[OA]\cap[O(B_1\cup B_2)]$.

Аксиомы III ($\varnothing\,\bar\delta_x\,X$) и IV ($\{y\}\bar\delta_x\{y'\}\Leftrightarrow y\neq y'$) очевидны. Проверим теперь аксиому V ($A\,\bar\delta_x\,B\Rightarrow$ существует такое канонически открытое множество $C\supset A$, что $C\,\bar\delta_x\,B$ и $A\,\bar\delta_x\,(X\setminus[C])$). Если $A\,\bar\delta_x\,B$, то существуют такие (канонически открытые) окрестности OA и OB, что $OA\cap OB=\varnothing$ и $x\notin[OA]\cap[OB]$. Если $x\notin[OA]$, то полагаем $C=OA$, а если $x\notin[OB]$, то полагаем $C=X\setminus[OB]$. Тогда во втором (более интересном) случае имеем $X\setminus[C]=OB$, $OA\cap(X\setminus[C])=\varnothing$, $C\cap OB=\varnothing$, $x\notin[OA]\cap[X\setminus[C]]=[OA]\cap[OB]$.

Осталось проверить аксиому VI (если существуют непересекающиеся окрестности Oy и OA, то $\{y\}\,\bar\delta_x\,A$). Пусть $Oy\cap OA=\varnothing$. Если при этом $y=x$, то $x\notin[OA]$ и, значит, $\{y\}\,\bar\delta_x\,A$. Если же $y\neq x$, то можно считать $[Oy]\not\ni x$, и опять $\{y\}\,\bar\delta_x\,A$. Лемма 2 доказана.

Пусть теперь множества A и B H-близки в H-замкнутом пространстве X, т. е. $[A]^\theta\cap[B]^\theta\neq\varnothing$. Возьмем произвольную точку $x\in[A]^\theta\cap[B]^\theta$ и рассмотрим на пространстве X θ-близость $\delta=\delta_x$. В силу основной теоремы о θ-близости (см. [13], теорема 2), существует такое вполне регулярное пространство X_δ и такая θ-совершенная неприводимая проекция $\pi_\delta\colon X_\delta\to X$, что θ-близость δ порождается некоторой близостью на пространстве X_δ. Пространство X_δ, как θ-совершенный неприводимый прообраз H-замкнутого пространства, H-замкнуто (см. [14], предложение 2) и, следовательно, бикомпактно. Покажем, что прообраз $\pi_\delta^{-1}(x)$ состоит из одной точки. Предположим, что в бикомпакте $\pi_\delta^{-1}(x)$ существуют две различные точки y_1 и y_2. Возьмем две далекие окрестности Oy_1 и Oy_2. Так как θ-близость δ порождается близостью бикомпакта X_δ, имеем $\pi_\delta^\#Oy_1\,\bar\delta_x\,\pi_\delta^\#Oy_2$. Но в силу неприводимости отображения π_δ имеем $x\in[\pi_\delta^\#Oy_i]$, $i=1,2$. Тогда $\pi_\delta^\#Oy_1\,\delta_x\,\pi_\delta^\#Oy_2$ по определению θ-близости δ_x. Полученное противоречие доказывает одноточечность множества $\pi_\delta^{-1}(x)$.

Теперь докажем, что множества $\pi_\delta^{-1}A$ и $\pi_\delta^{-1}B$ близки, а точнее, что $\pi_\delta^{-1}(x)\in[\pi_\delta^{-1}A]\cap[\pi_\delta^{-1}B]$. Предположив противное, найдем окрестность $O\pi_\delta^{-1}(x)$, замыкание которой не пересекается, например, с множеством $\pi_\delta^{-1}A$. Тогда $\pi_\delta[O\pi_\delta^{-1}(x)]\cap A=\varnothing$. Но множество $\pi_\delta[O\pi_\delta^{-1}(x)]$ замкнуто и содержит окрестность $\pi_\delta^\#O\pi_\delta^{-1}(x)$ точки x. Следовательно, $x\notin[A]^\theta$. Получили противоречие с тем, что $x\in[A]^\theta\cap[B]^\theta$. Таким образом, для H-близких множеств A и B найден бикомпакт X_δ и такая проекция $\pi_\delta\colon X_\delta\to X$, что прообразы $\pi_\delta^{-1}A$ и $\pi_\delta^{-1}B$ близки в X_δ. Значит, отношение η удовлетворяет условию 3°.

Теперь докажем единственность H-близости η, удовлетворяющей условиям 1°, 2°, 3°. Пусть подмножества A и B пространства X H-близки. В силу условия 3°, существует такой бикомпакт Y и такое H-близостно непрерывное отображение $f\colon Y\to X$, что множества $f^{-1}A$ и $f^{-1}B$ близки в Y. Пусть $y\in[f^{-1}A]\cap[f^{-1}B]$ и Ox — произвольная окрестность точки $x=fy$. В силу условия 1°, отображение f θ-непрерывно, поэтому существует такая окрестность Oy, что $f[Oy]\subset[Ox]$. Следовательно, замыкание любой окрестности точки x пересекается с множествами A и B, т. е. $x\in[A]^\theta\cap[B]^\theta\neq\varnothing$. Осталось доказать, что $A\bar\eta B\Rightarrow[A]^\theta\cap[B]^\theta=\varnothing$. Предположим, что $x\in[A]^\theta\cap[B]^\theta$, и рассмотрим отображение $\pi_\delta\colon X_\delta\to X$, где $\delta=\delta_x$. Тогда, как и при проверке пункта 3°, показывается, что множества $\pi_\delta^{-1}A$ и $\pi_\delta^{-1}B$ близки. Но, в силу условия 2°, отображение π_δ H-близостно непрерывно, и поэтому множества $\pi_\delta^{-1}A$ и $\pi_\delta^{-1}B$ далеки. Полученное противоречие показывает, что $[A]^\theta \cap [B]^\theta = \emptyset$. Теорема 1 доказана.

Таким образом, найдено достаточно хорошее продолжение близости с бикомпактных на H-замкнутые пространства, и доказана его единственность. Но продолжить эту близость на все хаусдорфовы пространства так, чтобы получить решение классической задачи А. Н. Тихонова, уже невозможно. В самом деле, θ-гомеоморфные H-замкнутые пространства имеют одинаковые θ-замыкания и, значит, одну H-близость. Поэтому θ-гомеоморфные H-замкнутые расширения порождают на данном хаусдорфовом пространстве одну и ту же H-близость. Следовательно, нельзя установить взаимно однозначное соответствие между H-близостями на данном хаусдорфовом пространстве и его H-замкнутыми расширениями, порождающими эти H-близости.

Поэтому приходится ограничиться лишь такими пространствами, все θ-гомеоморфизмы которых являются гомеоморфизмами, т. е. в точности полурегулярными пространствами (см. [14], предложение 1).

Но и в классе полурегулярных пространств классическая задача А. Н. Тихонова решения не имеет. В самом деле, имеет место

Теорема 2. *Бесконечное дискретное пространство N имеет $2^{2^{2^{|N|}}}$ полурегулярных H-замкнутых расширений.*

В то же время количество бинарных отношений на множестве всех подмножеств множества N равно $2^{2^{|N|}}$. Следовательно бинарных отношений не хватает даже для описания всех полурегулярных H-замкнутых расширений.

Доказательство теоремы 2. Пусть hN — полурегулярное H-замкнутое расширение пространства N и βN — максимальное бикомпактное его расширение. Абсолют пространства hN, как экстремально несвязное бикомпактное расширение пространства N, совпадает с βN. Существует θ-совершенная неприводимая проекция $\pi\colon \beta N \to hN$. Таким образом, всякому H-замкнутому расширению hN соответствует разбиение нароста $\beta N \setminus N$ на непересекающиеся замкнутые множества $\pi^{-1}y$, $y \in hN \setminus N$. При этом разным полурегулярным H-замкнутым расширениям соответствуют разные разбиения. В самом деле, поскольку оператор $\pi^{\#}$ осуществляет изоморфизм между алгебрами $\mathfrak{A}(\beta N)$ и $\mathfrak{A}(hN)$ канонически открытых подмножеств (см. [14], предложение 4), а пространство hN полурегулярно, разбиение $\{\pi^{-1}y \mid y \in hN\}$ определяет на фактор-множестве единственное полурегулярное пространство, естественная проекция на которое θ-совершенна и неприводима. С другой стороны, всякое разбиение нароста $\beta N \setminus N$ на замкнутые множества будучи дополнено одноточечными элементами разбиения из N, определяет полурегулярное пространство X и θ-совершенную неприводимую проекцию $\pi\colon \beta N \to X$ (см. [14], § 3). При этом отображение π является гомеоморфизмом на множестве N, так что пространство X является расширением пространства N, H-замкнутым, как θ-непрерывный образ бикомпакта βN. Итак, множество полурегулярных H-замкнутых расширений пространства N находится во взаимно однозначном соответствии с множеством P разбиений нароста $\beta N \setminus N$ на непересекающиеся замкнутые множества, и нам остается подсчитать мощность множества P.

Поскольку бикомпакт βN имеет вес $\leqslant 2^{|N|}$, мощность множества $\exp(\beta N \setminus N)$ замкнутых подмножеств нароста $\beta N \setminus N$ не превосходит $2^{2^{|N|}}$. Тогда множество P, содержась в множестве всех подмножеств множества $\exp(\beta N \setminus N)$, имеет мощность $\leqslant 2^{2^{2^{|N|}}}$.

С другой стороны, по теореме Поспишила (см. [7]) нарост $\beta N \setminus N$ имеет мощность $2^{2^{|N|}}$. Разобьем нарост $\beta N \setminus N$ на два равномощных непересекающихся подмножества A и B. Тогда всякая биекция f множества A на B определяет разбиение нароста на двухточечные множества. Разным биекциям очевидно соответствуют разные разбиения. Таким образом, уже двухточечных разбиений нароста $\beta N \setminus N$ имеется по крайней мере $2^{2^{2^{|N|}}}$. Тем более $|P| \geqslant 2^{2^{2^{|N|}}}$. Теорема доказана.

Таким образом классическая задача А. Н. Тихонова не имеет решения даже в классе полурегулярных пространств.

§ 2. Решение обобщенной задачи А. Н. Тихонова в классе полурегулярных пространств. Пусть X — хаусдорфово пространство и η — некоторое семейство θ-близостей на пространстве X. Пусть $\xi = \{V\}$ — фильтр открытых множеств или открытый фильтр. Открытое множество $G \subset X$ назовем *η-окрестностью фильтра* ξ, если существует такой открытый фильтр $\tau \supset \xi$, что для любой θ-близости $\delta \in \eta$ некоторый элемент U фильтра τ δ-подчинен множеству G, т. е. $U\bar{\delta}(X \setminus [G])$. Семейство η может состоять из одной θ-близости δ. В этом случае мы будем говорить о $\{\delta\}$-окрестностях.

Основное определение. Семейство θ-близостей η называется *H-структурой* на топологическом пространстве X, если выполнены следующие аксиомы:

I_H. Если открытые фильтры ξ_1 и ξ_2 имеют непересекающиеся η-окрестности, то для любой точки $x \in X$ существует такие η-окрестности G_i фильтров ξ_i, $i = 1, 2$, что $x \notin [G_1] \cap [G_2]$.

II_H. Если существует η-окрестность открытого фильтра ξ_1, не пересекающаяся с некоторым элементом открытого фильтра ξ_2, то фильтры ξ_1 и ξ_2 имеют непересекающиеся η-окрестности.

III_H. Если $\delta \notin \eta$, то существует такой открытый фильтр ξ, что некоторая его η-окрестность не является $\{\delta\}$-окрестностью.

Предложение 1. *Для любой H-структуры η на пространстве X имеем $\delta_x \in \eta$ для всех $x \in X$* (1).

Доказательство. Предположим, что $\delta_x \notin \eta$ для некоторой точки $x \in X$. Тогда согласно аксиоме III_H существует такой открытый фильтр ξ, что некоторая его η-окрестность G не является $\{\delta_x\}$-окрестностью. Это означает, что как только множество U δ_x-подчинено множеству G, оно не пересекается с некоторым элементом V фильтра ξ. Без ограничения общности можно считать множество G каноническим. Тогда точка x необходимо принадлежит границе множества G, т. к. в противном случае множество G δ_x-подчинено самому себе и, следовательно, является $\{\delta_x\}$-окрестностью фильтра ξ. По определению η-окрестности существует такой открытый фильтр $\tau \supset \xi$, что для всякой θ-близости $\delta \in \eta$ некоторый элемент W фильтра τ δ-подчинен множеству G и, в частности, в нем содержится. Пусть Ox — произвольная каноническая окрестность точки x, тогда множество $G\setminus[Ox]$ δ_x-подчинено множеству G и поэтому не пересекается с некоторым элементом V фильтра ξ, т. е. $V \subset Ox \cup (X\setminus[G])$. Тогда элемент $V \cap W$ фильтра τ содержится в $Ox \cap G$ и, в частности, фильтр τ мажорирует фильтр канонических окрестностей точки x и содержит множество G. Поскольку x-граничная точка канонического множества G, существует открытый ультрафильтр σ, мажорирующий фильтр канонических окрестностей точки x и содержащий множество $X\setminus[G]$. Заметим, что по определению фильтра τ множество G является его η-окрестностью. Таким образом, η-окрестность G фильтра τ не пересекается с элементом $X\setminus[G]$ открытого фильтра σ. В силу аксиомы II_H существуют непересекающиеся η-окрестности фильтров τ и σ. Применив теперь аксиому I_H, найдем такую η-окрестность G_1 фильтра τ и такую η-окрестность G_2 фильтра σ, что $x \notin [G_1] \cap [G_2]$. Но это противоречит тому, что оба фильтра τ и σ мажорируют фильтр канонических окрестностей точки x. Полученное противоречие и доказывает предложение 1.

Предложение 2. *Для любой θ-близости δ на H-замкнутом пространстве имеем $[A]^\theta \cap [B]^\theta = \emptyset \Rightarrow A\,\bar\delta\,B$.*

Доказательство. Сначала покажем, что $\{x\}\,\bar\delta\,A$, если $x \notin [A]^\theta$. Для всех $y \in [A]^\theta$ имеем $\{x\}\,\bar\delta\,\{y\}$. В силу аксиомы V θ-близости, для всякой точки $y \in [A]^\theta$ существует такая окрестность Oy, что $\{x\}\,\bar\delta\,Oy$. Для произвольной точки $x' \notin [A]^\theta$ возьмем такую окрестность Ox', что $[Ox'] \cap A = \emptyset$. Семейство $\omega = \{Ox' |\ x' \notin [A]^\theta\} \cup \{Oy |\ y \in [A]^\theta\}$ является покрытием H-замкнутого пространства X. Существует конечное подсемейство $\{Ox'_1, \dots, Ox'_m, Oy_1, \dots, Oy_n\}$, являющееся θ-покрытием пространства X. Так как $[Ox'_i] \cap A = \emptyset$ для $i = 1, \dots, m$, то множество $V = X\setminus \bigcup_{i=1}^{m} [Ox'_i]$ является окрестностью множества A. Кроме того $V \subset \bigcup_{i=1}^{n} [Oy_i] = [\bigcup_{i=1}^{n} Oy_i]$. Имеем $\{x\}\,\bar\delta \bigcup_{i=1}^{n} Oy_i$ и, в силу аксиомы V θ-близости, $\{x\}\,\bar\delta\,\langle[\bigcup_{i=1}^{n} Oy_i]\rangle$. Но $V \subset \langle[\bigcup_{i=1}^{n} Oy_i]\rangle$, следовательно, $\{x\}\,\bar\delta\,V$ и тем более $\{x\}\,\bar\delta\,A$ (2).

---

(1) Напомним, что θ-близость δ_x определена в лемме 2.

Повторив этот процесс, покажем, что $A\,\bar\delta\,B$. Для любой точки $x \in [B]^\theta$ уже показано, что $\{x\}\,\bar\delta\,A$. Существует такая окрестность Ox, что $Ox\,\bar\delta\,A$. Взяв для любой точки $y \notin [B]^\theta$ такую окрестность Oy, что $[Oy] \cap B = \emptyset$, получаем покрытие $\omega = \{Ox |\ x \in [B]^\theta\} \cup \{Oy |\ y \notin [B]^\theta\}$. Выбрав из этого покрытия конечное θ-покрытие $\{Ox_1, \dots, Ox_n, Oy_1, \dots, Oy_n\}$, как и выше получаем, что множество $\langle[\bigcup_{i=1}^{m} Ox_i]\rangle$ является окрестностью множества B, далекой от A. Предложение 2 доказано.

Если η — произвольное семейство θ-близостей на пространстве X, то через δ_η обозначим бинарное отношение на подмножествах пространства X, равное нижней грани θ-близостей $\delta \in \eta$, т. е. $A\,\bar\delta_\eta\,B \Leftrightarrow A\,\bar\delta\,B$ для всех $\delta \in \eta$.

Предложение 3. *На произвольном H-замкнутом пространстве X существует единственная H-структура η, состоящая из всех θ-близостей на X. При этом*

$$A\,\bar\delta_\eta\,B \Leftrightarrow [A]^\theta \cap [B]^\theta = \emptyset\,.$$

Доказательство. Сначала докажем, что для семейства $\eta = \eta(X)$, состоящего из всех θ-близостей на X, имеем $A\,\bar\delta_\eta\,B \Leftrightarrow [A]^\theta \cap [B]^\theta = \emptyset$. Импликация $\Leftarrow$ вытекает из предложения 2. Проверим импликацию $\Rightarrow$. Если $A\,\bar\delta_\eta\,B$, то в частности $A\,\bar\delta_x\,B$. Это означает существование таких непересекающихся окрестностей OA и OB, что $x \notin [OA] \cap [OB]$. Пусть, например, $x \notin [OA]$. Тогда существует такая окрестность Ox точки x, что $[Ox] \cap A = \emptyset$. Следовательно, $x \notin [A]^\theta$ и тем более $x \notin [A]^\theta \cap [B]^\theta$. Таким образом $x \notin [A]^\theta \cap [B]^\theta$ для любой точки $x \in X$, т. е. $[A]^\theta \cap [B]^\theta = \emptyset$.

Теперь проверим, что семейство $\eta = \eta(X)$ удовлетворяет аксиомам I_H, II_H, III_H. Пусть открытые фильтры ξ_1 и ξ_2 таковы, что существует η-окрестность G_1 фильтра ξ_1, не пересекающаяся с некоторым элементом G_2 фильтра ξ_2. В силу H-замкнутости пространства X, множества $K_i = \bigcap \{[G] |\ G \in \xi_i\}$ не пусты. Докажем сначала, что множество $K_1 \cup K_2$ состоит более чем из одной точки. Предположим, что это не так, т. е. $K_1 = K_2 = \{x\}$. Из определения η-окрестности вытекает, что множество G_1 пересекается со всеми элементами фильтра ξ_1, и поэтому $x \in [G_1]$, в силу центрированности системы $\xi_1 \cup \{G_1\}$ и H-замкнутости пространства X. Поскольку G_1 — η-

---

(2) Данный факт составляет содержание аксиомы VI θ-близости. Приведенное здесь доказательство, метод которого будет использован ниже, показывает, что для H-замкнутых пространств аксиома VI θ-близости вытекает из остальных аксиом.

окрестность фильтра ξ_1, существует открытое множество Γ, пересекающееся со всеми элементами фильтра ξ_1 и δ_x-подчиненные множеству G_1. Как и для множества $[G_1]$, получаем $x \in [\Gamma]$. В силу δ_x-подчиненности множества Γ множеству G_1 и определения θ-близости δ_x имеем $[\Gamma] \cap [X \setminus [G_1]] \not\ni x$. Значит $x \notin [X \setminus [G_1]] = X \setminus \langle [G_1] \rangle$, т. е. $x \in \langle [G_1] \rangle$. Но $G_1 \cap G_2 = \emptyset$, значит, и $\langle [G_1] \rangle \cap [G_2] = \emptyset$. Следовательно, $x \in X \setminus [G_2]$, что противоречит равенству $\{x\} = K_2$. Полученное противоречие показывает, что множество $K_1 \cup K_2$ содержит более одной точки и, значит существуют различные точки $x_1 \in K_1$ и $x_2 \in K_2$. Теперь заметим, что для открытого фильтра ξ окрестность любой точки $x \in K = \bigcap \{[G] |\ G \in \xi\}$ является $\{\delta\}$-окрестностью фильтра ξ для любой θ-близости δ на X. Значит, существованием непересекающихся окрестностей точек x_1 и x_2 закончена проверка аксиомы II_H. Аксиома I_H следует из того, что если $x_1 \neq x_2$, то для любой точки x_3 существуют такие окрестности G_i точек x_i, $i = 1, 2, 3$, что $[G_1] \cap [G_2] \cap G_3 = \emptyset$. Аксиома III_H для семейства $\eta = \eta(X)$ выполнена автоматически.

Осталось доказать единственность H-структуры на X. Для этого надо показать, что любая θ-близость δ содержится в данной H-структуре η. Для этого в свою очередь согласно аксиоме III_H достаточно доказать, что всякая η-окрестность G открытого фильтра ξ является его $\{\delta\}$-окрестностью. Возьмем фильтр $\tau \supset \xi$ из определения η-окрестности. Пусть точка x принадлежит множеству $T = \bigcap \{[V] |\ V \in \tau\}$. Покажем, что $x \in \langle [G] \rangle$. Из определения η-окрестности вытекает, что $x \in [G]$. По предложению 1 имеем $\delta_x \in \eta$. Поэтому существует такое множество $V \in \tau$, что $V\, \bar\delta_x\, (X \setminus [G])$. Значит, $x \notin [V] \cap [X \setminus [G]]$, и, поскольку $x \in [V]$, имеем $x \notin [X \setminus [G]] = X \setminus \langle [G] \rangle$, т. е. $x \in \langle [G] \rangle$. В силу сделанного выше замечания, множество $\langle [G] \rangle$ является $\{\delta\}$-окрестностью фильтра τ и тем более фильтра ξ. Но тогда и множество G является $\{\delta\}$-окрестностью фильтра ξ. Предложение 3 полностью доказано.

Таким образом, указан первый пример H-структур. Эти H-структуры интересны тем, что они определяются бинарным отношением — нижней гранью входящих в них θ-близостей.

Пусть X — топологическое пространство и δ — θ-близость на нем. Если Y — всюду плотное подпространство, пространства X, то ограничение δ_Y отношения δ на Y является θ-близостью (см. [14]) лемма 3), которую иногда также будем обозначать через δ. Если η — семейство θ-близостей на X, то семейство индуцированных θ-близостей на Y будем обозначать через η_Y (и лишь иногда через η).

Предложение 4. *Пусть η есть H-структура на пространстве X и Y всюду плотное в X подпространство. Тогда семейство η_Y является H-структурой на Y.*

Доказательство. Надо проверить что семейство η_Y удовлетворяет аксиомам H-структуры. Пусть ξ — открытый в Y фильтр. Обозначим через $\tilde\xi$ семейство всех таких открытых в X множеств V, что $V \cap Y \in \xi$. Очевидно, что $\tilde\xi$ — открытый фильтр в X. Если теперь, G — η_Y-окрестность фильтра ξ, то максимальное открытое в X множество $\tilde G$, высекающее на Y множество G, является η-окрестностью фильтра $\tilde\xi$ и, наоборот, если Γ есть η-окрестность фильтра $\tilde\xi$, то множество $\Gamma \cap Y$ является η_Y — окрестностью фильтра ξ. Кроме того, для открытых в Y множеств G_1 и G_2 имеем $G_1 \cap G_2 = \emptyset \Rightarrow \tilde G_1 \cap \tilde G_2 = \emptyset$. Эти замечания показывают, что аксиомы I_H и II_H для семейства η_Y выполнены. Проверим аксиому III_H. Пусть δ — такая θ-близость на Y, что всякая η_Y-окрестность является $\{\delta\}$-окрестностью. Надо показать, что $\delta \in \eta_Y$. Покажем сначала, что δ продолжается на X, т. е. существует такая θ-близость δ^X на X, что $(\delta^X)_Y = \delta$. Для подмножеств A и B пространства X положим $A\, \bar\delta^X\, B \Leftrightarrow$ существуют такие окрестности OA и OB, что $(OA \cap Y)\, \bar\delta\, (OB \cap Y)$. Проверим, что отношение δ^X удовлетворяет аксиомам θ-близости. Аксиомы I-IV проверяются автоматически. Проверка аксиомы V не доставляет затруднений. Надо лишь проверить аксиому VI (аксиому согласования с топологией). Итак, пусть точка $x \in X$ и множество A имеют непересекающиеся окрестности Ox и OA. Пусть ξ — произвольный открытый ультрафильтр, мажорирующий фильтр окрестностей точки x. Множество Ox является η-окрестностью фильтра ξ. Но тогда множество $Ox \cap Y$ является η_Y-окрестностью фильтра $\xi_Y = \{V \cap Y |\ V \in \xi\}$. Поскольку всякая η_Y-окрестность является $\{\delta\}$-окрестностью, существует элемент $G_\xi \in \xi_Y$, δ-подчиненный множеству $Ox \cap Y$. Тогда $\tilde G_\xi \in \xi$. Существует такой конечный набор $\xi_1, \ldots, \xi_n$ открытых в X ультрафильтров, мажорирующих фильтр окрестностей точки x, что $\langle \bigcup_{i=1}^{n} [\tilde G]_{\xi_i} \rangle \in x$. В силу аксиомы суммы, имеем $\bigcup_{i=1}^{n} G_{\xi_i}\, \bar\delta\, (Y \setminus [Ox \cap Y]_Y)$, а в силу аксиомы V, $\langle [\bigcup_{i=1}^{n} G_{\xi_i}]_Y \rangle_Y\, \bar\delta\, (Y \setminus [Ox \cap Y]_Y)$. Тогда по определению отношения δ^X имеем $\langle \bigcup_{i=1}^{n} [\tilde G_{\xi_i}] \rangle\, \bar\delta^X\, (X \setminus [Ox])$. Но множества $\langle \bigcup_{i=1}^{n} [\tilde G_{\xi_i}] \rangle$ и $X \setminus [Ox]$ являются такими окрестностями точки x и множества A, что $\langle \bigcup_{i=1}^{n} [\tilde G_{\xi_i}] \rangle \cap Y = \langle \bigcup_{i=1}^{n} [G_{\xi_i}]_Y \rangle_Y$, а $(X \setminus [Ox]) \cap Y = Y \setminus [Ox \cap Y]_Y$. Следовательно $\{x\}\, \bar\delta^X A$ и аксиома VI проверена.

Теперь покажем, что всякая η-окрестность является и $\{\delta^X\}$-окрестностью. Пусть ξ — открытый фильтр и G — его η-окрестность. Тогда множество $G \cap Y$ является η_Y-окрестностью фильтра ξ_Y, и следовательно его $\{\delta\}$-окрестностью. Это означает, что в Y существует такое открытое множество Γ, пересекающееся со всеми элементами фильтра ξ_Y, что $\Gamma\, \bar\delta\, (Y \setminus [G \cap Y]_Y)$. Тогда $\tilde\Gamma$ — открыто в X и пересекается со всеми элементами фильтра ξ. Кроме того $\tilde\Gamma\, \bar\delta^X (X \setminus [G])$, поскольку

$$(X \setminus [G]) \cap Y = Y \setminus [G \cap Y]_Y.$$

Следовательно, $\tilde{\Gamma}$ δ^X-подчинено множеству G, которое, таким образом, является $\{\delta^X\}$-окрестностью фильтра ξ. По аксиоме III_H, выполненной для η, мы получаем, что $\delta^X \in \eta$. Следовательно $\delta \in \eta_Y$. Аксиома III_H для семейства η_Y также проверена. Предложение 4 доказано.

Из существования H-замкнутых расширений хаусдорфовых пространств, предложений 3 и 4 вытекает

Следствие 1. *На всяком хаусдорфовом пространстве существуют H-структуры.*

Другое важное следствие последних утверждений состоит в том, что мы можем указать еще один пример H-структур.

Предложение 5. *Пусть δ — близость на вполне регулярном пространстве X. Тогда семейство η_δ, состоящее из всех θ-близостей на X, мажорирующих близость δ, является H-структурой*

Доказательство. Семейство $\eta = \eta(b_\delta X)$ всех θ-близостей на бикомпактном расширении $b_\delta X$ пространства близости (X, δ) согласно предложению 3 есть H-структура на $b_\delta X$. Ограничение η_X этого семейства на X согласно предложению 4 является H-структурой на X. Покажем, что $\eta_\delta = \eta_X$. Очевидно, что всякая θ-близость из η_X принадлежит семейству η_δ. Пусть теперь наоборот $\delta_1 \in \eta_\delta$. Тогда тождественное отображение $f\colon (X, \delta_1) \to (X, \delta)$ θ-близостно непрерывно. По теореме 6 работы [13] существует такое неприводимое отображение f_{δ_1} бикомпакта $b_{\delta_1}X_{\delta_1}$ на бикомпакт $b_\delta X$, что $f_{\delta_1}^{-1}X = X_{\delta_1}$ и коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} b_{\delta_1}X_{\delta_1} \arrow[r, "f_{\delta_1}"] & b_\delta X \\ X_{\delta_1} \arrow[u, "i_1"] \arrow[r, "f'_{\delta_1}"] \arrow[d, "\pi_{\delta_1}"'] & X \arrow[u, "i"'] \\ X \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

где f'_{δ_1} — ограничение отображения f_{δ_1} на X_{δ_1}, i_1 и i — вложения. Поскольку f — тождественное отображение, коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} b_{\delta_1}X_{\delta_1} \arrow[r, "f_{\delta_1}"] & b_\delta X \\ X_{\delta_1} \arrow[u, "i_1"] \arrow[r, "\pi_{\delta_1}"] & X \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

Следовательно θ-близость δ_1 продолжается на бикомпакт $b_\delta X$ и поэтому принадлежит семейству η_X. Предложение 5 тем самым доказано.

Таким образом каждой близости δ на вполне регулярном пространстве X естественным образом соответствует H-структура, и поэтому понятие H-структуры является обобщением понятия близости. В то же время ниже будет показано, что данную близость δ могут порождать разные H-структуры.

Теорема 3. *Пусть η есть H-структура на полурегулярном пространстве X. Тогда существует и притом единственное полурегулярное H-замкнутое расширение $h_\eta X$, которое порождает на X данную H-структуру η.*

Доказательство. Назовем η-системой всякое центрированное семейство γ канонически открытых множеств пространства X, удовлетворяющее следующему условию: для любого множества $G \in \gamma$ и для любой θ-близости $\delta \in \eta$ существует такое множество $G' \in \gamma$, что $G' \bar{\delta} (X \setminus [G])$. Всякая η-система содержится в максимальной η-системе (η-конце).

Это легко доказывается трансфинитной индукцией, так как объединение растущей последовательности η-систем является η-системой.

Множество Γ всех η-концов, топологизированное обычным образом (базу образуют множества вида $O_G = \{\gamma \mid G \in \gamma\}$) (3) обозначим через $h_\eta X$. Пространство $h_\eta X$ хаусдорфово. В самом деле если бы для двух η-концов γ_1 и γ_2 всегда имели $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$ при условии $G_i \in \gamma_i$, то система $\gamma = \{G_1 \cap G_2 \mid G_i \in \gamma_i\}$ была бы η-системой, мажорирующей оба η-конца γ_1 и γ_2, что невозможно. Таким образом, существуют такие множества $G_i \in \gamma_i$, что $G_1 \cap G_2 = \emptyset$, т. е. $O_{G_1} \cap O_{G_2} = \emptyset$ и пространство $h_\eta X$ хаусдорфово.

Теперь покажем, что пространство $h_\eta X$ является расширением пространства X. Фильтр γ_x всех канонических окрестностей точки x, в силу аксиом V и VI θ-близости, является η-системой. Теперь предположим, что η-система γ_x не максимальна. Пусть существует η-система $\gamma \supset \gamma_x$ и пусть $G \in \gamma \setminus \gamma_x$. Тогда множество $X \setminus [G]$ касается точки x. В силу предложения 1, имеем $\delta_x \in \eta$. Значит, существует такое множество $G' \in \gamma$, что $G' \bar{\delta}_x (X \setminus [G])$. Имеем $x \notin [G'] \cap [X \setminus [G]]$. Но $x \in [X \setminus [G]] = X \setminus G$. Следовательно $x \notin [G']$, но это противоречит тому, что система γ мажорирует фильтр окрестностей точки x.

Итак, отображение $\gamma\colon x \to \gamma_x$ является взаимно однозначным отображением пространства X в пространство $h_\eta X$. Очевидно, кроме того, что $\gamma G = O_G \cap \gamma X$. Таким образом, база пространства X отображается на базу пространства γX. Следовательно, отображение $\gamma\colon X \to h_\eta X$ — вложение. Очевидно также, что γX всюду плотно в $h_\eta X$, т. е. $h_\eta X$ — расширение пространства X.

Пространство $h_\eta X$ полурегулярно. Для этого достаточно показать, что множество O_G канонически открыто. Пусть точка z вместе с некоторой своей окрестностью Oz содержится в $[O_G]$. Покажем, что в этом случае $z \in O_G$. Окрестность Oz содержит окрестность вида $O_{G'}$, где $G' \in z$. Пред-

(3) Множества вида O_G образуют базу топологии, т. к. очевидно $O_{G_1} \cap O_{G_2} = O_{G_1 \cap G_2}$.

положим, что $G' \not\subset G$. Тогда, в силу каноничности множества G, множество $G'' = G' \setminus [G]$ не пусто. Для любой точки $x \in G''$ имеем $\gamma_x \in O_{G''}$, значит, $O_{G''} \neq \emptyset$, $O_{G''} \cap O_G = \emptyset$. Тогда $O_{G''} \cap [O_G] = \emptyset$, что противоречит включениям $O_{G''} \subset O_{G'} \subset [O_G]$. Таким образом $G' \subset G$ и $O_{G'} \subset O_G$, т. е. множество O_G канонически открыто.

Теперь покажем, что пространство $h_\eta X$ H-замкнуто. Для этого заметим сначала, что $[O_G] \cap X = [G]$ (мы отождествляем пространство X с γX и считаем X подпространством пространства $h_\eta X$). В самом деле, т. к. $O_{X\setminus[G]} \cap [O_G] = \emptyset$, то $(O_{X\setminus[G]} \cap X) \cap ([O_G] \cap X) = \emptyset$, т. е. $(X \setminus [G]) \cap ([O_G] \cap X) = \emptyset$, поскольку $U \subset O_U \cap X$ для любого открытого $U \subset X$. Таким образом, $[O_G] \cap X$ — канонически замкнутое множество, содержащее G и не пересекающееся с $X \setminus [G]$, т. е. $[O_G] \cap X = [G]$. Отсюда вытекает также, что $O_G \cap X = G$. Пусть теперь $\omega = \{O_\alpha\}$ — произвольное покрытие пространства $h_\eta X$. Для каждой точки $z \in h_\eta X$ выберем такое множество $G_z \in z$, что базисная окрестность O_{G_z} содержится в некотором элементе O_α покрытия ω. Тогда семейство $\omega' = \{O_{G_z} | \ z \in h_\eta X\}$ является покрытием пространства $h_\eta X$, вписанным в покрытие ω. Предположим, что из покрытия ω (и тогда тем более из покрытия ω') нельзя выбрать конечного θ-покрытия. Тогда для любого конечного множества $K \subset h_\eta X$ семейство $\omega'_k = \{O_{G_z} | \ z \in K\}$ не является θ-покрытием пространства $h_\eta X$, т. е. $h_\eta X \setminus \bigcup_{z \in K} [O_{G_z}] \neq \emptyset$. Поскольку X всюду плотно в $h_\eta X$, то $X \cap (h_\eta X \setminus \bigcup_{z \in K} [O_{G_z}]) \neq \emptyset$. Но $X \cap (h_\eta X \setminus \bigcup_{z \in K} [O_{G_z}]) = X \setminus \bigcup_{z \in K} (X \cap [O_{G_z}]) = X \setminus \bigcup_{z \in K} [G_z]$. Таким образом, для любого конечного множества $K \subset h_\eta X$ множество $U_K = X \setminus \bigcup_{z \in K} [G_z]$ не пусто. Семейство $u = \{U_K | \ K \subset h_\eta X, |K| < \aleph_0\}$ очевидно центрировано. Пусть ξ — произвольный открытый ультрафильтр, мажорирующий систему u. Ультрафильтр ξ очевидно обладает следующим свойством:

(*) Для любого η-конца $z \in h_\eta X$ существует такое множество $\Gamma_z \in \xi$, что $\Gamma_z \cap G_z = \emptyset$.

Приведем это к противоречию. Сначала докажем вспомогательную лемму.

Лемма 3. *Система ξ_η всех η-окрестностей открытого ультрафильтра ξ является единственным η-концом, содержащимся в ξ.*

Доказательство. *Сначала единственность.* Предположим, что некоторый ультрафильтр ξ содержит два η-конца γ_1 и γ_2. Тогда система $\gamma = \{G_1 \cap G_2 | \ G_i \in \gamma_i\}$ будет центрированной, потому что $G_i \in \xi$. Очевидно также, что γ является η-системой. Кроме того $\gamma \supset \gamma_i$, $i = 1, 2$. Полученное противоречие показывает, что $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$.

Теперь существование. Пусть множество G является η-окрестностью ультрафильтра ξ и пусть θ-близость δ принадлежит H-структуре η. Если открытый ультрафильтр τ содержит множество $X \setminus [G]$, то в силу аксиомы II_H ультрафильтры τ и ξ имеют непересекающиеся η-окрестности V и G_τ, соответственно. Для каждого ультрафильтра $\tau \ni X \setminus [G]$ выберем еще такое множество $V' \in \tau$, что $V' \bar{\delta} (X \setminus [V])$ (такое множество V' существует по определению η-окрестности). Существует такой конечный набор $\tau_1, \ldots, \tau_n$ ультрафильтров, содержащих множество $X \setminus [G]$, что для соответствующих множеств $V'_1, \ldots, V'_n$ имеем $X \setminus [G] \subset \bigcup_{i=1}^{n} [V'_i]$. В самом деле, в противном случае, система $v = \{(X \setminus [G]) \setminus \bigcup_{i=1}^{n} [V'_i]\}$, взятая по всем конечным наборам $\{\tau_i\}$ ультрафильтров, содержащих $X \setminus [G]$, была бы центрированной. Тогда любой открытый ультрафильтр τ_0, содержащий систему v, с одной стороны содержал бы множество $X \setminus [G]$, а с другой — не мог совпадать ни с одним из ультрафильтров τ, содержащих $X \setminus [G]$. Полученное противоречие показывает, что требуемый набор $\tau_1, \ldots, \tau_n$ ультрафильтров существует. Тогда из соотношений $V'_i \bar{\delta} (X \setminus [V_i])$, $i = 1, \ldots, n$, в силу аксиомы II θ-близости вытекает соотношение

$$\bigcup_{i=1}^{n} V'_i \bar{\delta} \bigcap_{i=1}^{n} (X \setminus [V_i]) .$$

В силу аксиомы V θ-близости (аксиомы нормальности) имеем

$$\langle [\bigcup_{i=1}^{n} V'_i] \rangle \bar{\delta} \bigcap_{i=1}^{n} (X \setminus [V_i]) .$$

Но

$$\langle [\bigcup_{i=1}^{n} V'_i] \rangle = \langle \bigcup_{i=1}^{n} [V'_i] \rangle \supset X \setminus [G] ,$$

а

$$\bigcap_{i=1}^{n} (X \setminus [V_i]) = X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} [V_i] .$$

Таким образом $(X \setminus [G]) \bar{\delta} (X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} [V_i])$. Заметим теперь, что пересечение конечного числа η-окрестностей ультрафильтра ξ будет вновь η-окрестностью ультрафильтра ξ. Значит, множество $\bigcap_{i=1}^{n} G_{\tau_i} = G_0$ является η-окрестностью ультрафильтра ξ. Но $G_{\tau_i} \cap [V_i] = \emptyset$, значит, $(\bigcap_{i=1}^{n} G_{\tau_i}) \cap (\bigcup_{i=1}^{n} [V_i]) = \emptyset$, т. е. $G_0 \subset X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} [V_i]$. Отсюда вытекает, что $(X \setminus [G]) \bar{\delta} G_0$. Таким образом, множество G_0 является η-окрестностью ультрафильтра ξ, δ-подчиненной η-окрестности G. Следовательно множество ξ_η является η-системой. Предположим, что η-система ξ_η не максимальна и пусть γ — какой-нибудь η-конец, содержащий систему ξ_η. Существует множество $G_0 \in \gamma$, не содержащееся в ультрафильтре ξ. В самом деле, в противном случае $\gamma \subset \xi$ и всякий элемент η-системы γ являлся бы η-окрестностью ξ, т. е. $\gamma \subset \xi_\eta$. Таким образом, некоторое множество $G_0 \in \xi$ не пересекается с некоторым $G \in \xi$. В силу аксиомы II_H существуют непересекающиеся η-окрестности G_0' и G' фильтров γ и ξ соответственно. Но $G' \in \xi_\eta \subset \gamma$, поэтому мы получим противоречие, если покажем, что $G_0' \in \gamma$. По определению η-окрестности существует такой открытый фильтр $\tau \supset \gamma$ (который можно считать ультрафильтром), что для всякого множества $U \in \gamma$ и для всякой θ-близости $\delta \in \eta$ некоторый элемент V ультрафильтра τ δ-подчинен U. Система τ_η всех η-окрестностей ультрафильтра τ, как было показано выше, является η-системой. Кроме того каждый элемент ультрафильтра $\tau \supset \gamma$ пересекается с каждым элементом системы γ. Тем более этим свойством обладает каждый элемент системы τ_η. Но в таком случае η-система τ_η содержится в η-конце γ и, следовательно, $G_0' \in \gamma$. Лемма 3 доказана.

Возвращаемся к доказательству H-замкнутости пространства $h_\eta X$. Мы видели, что существует открытый ультрафильтр ξ, обладающий свойством $(*)$, и, следовательно, не содержащий ни одного η-конца. Это противоречит лемме 3. Полученное противоречие доказывает H-замкнутость пространства $h_\eta X$.

Таким образом, пространство $h_\eta X$ является полурегулярным H-замкнутым расширением пространства X. Покажем, что единственная H-структура, существующая на H-замкнутом пространстве $h_\eta X$, порождает данную на X H-структуру η.

Пусть сначала δ есть θ-близость на пространстве $h_\eta X$. Покажем, что $\delta_X \in \eta$. Для этого воспользуемся аксиомой III_H. Пусть ξ — открытый в X фильтр и G — его η-окрестность. Тогда существует такой открытый ультрафильтр $\tau \supset \xi$, что для любой θ-близости $\delta_1 \in \eta$ некоторый элемент V фильтра τ δ_1-подчинен множеству G. Пусть x — единственная точка прикосновения ультрафильтра $\tilde{\tau}$, состоящего из всех таких открытых в $h_\eta X$ множеств U, что $U \cap X \in \tau$. Из определения топологии на $h_\eta X$ вытекает, что $x \in \langle [G]_{h_\eta X} \rangle_{h_\eta X}$. Следовательно, существует элемент $\tilde{V}$ фильтра $\tilde{\tau}$, δ-подчиненный множеству $\langle [G]_{h_\eta X} \rangle_{h_\eta X}$. Но тогда элемент V фильтра τ δ_X-подчинен множеству G, т. е. G является $\{\delta_X\}$-окрестностью фильтра ξ. В силу аксиомы III_H, $\delta_X \in \eta$.

Осталось показать, что всякая θ-близость $\delta \in \eta$ продолжается на расширение $h_\eta X$. Если A и B — подмножества пространства $h_\eta X$, то положим $A\,\bar{\delta}'\,B \Leftrightarrow$ существуют такие (канонически) открытые подмножества U и V пространства X, что $U\,\bar{\delta}\,V$ и $O_U \supset A$, $O_V \supset B$.

Покажем, что так определенное отношение δ' является θ-близостью на пространстве $h_\eta X$. Для этого надо проверить выполнение всех аксиом I—VI θ-близости (см. лемму 2).

Аксиома I выполнена очевидным образом.

Аксиома II. Пусть $A\,\bar{\delta}'\,(B_1 \cup B_2)$. Существуют такие (канонически) открытые подмножества U и V пространства X, что $U\,\bar{\delta}\,V$ и $O_U \supset A$, $O_V \supset B_1 \cup B_2$. Тогда $O_V \supset B_1$, $O_V \supset B_2$ и, следовательно, $A\,\bar{\delta}'\,B_1$, $A\,\bar{\delta}'\,B_2$.

Пусть теперь наоборот $A\,\bar{\delta}'\,B_1$, $A\,\bar{\delta}'\,B_2$. Тогда существуют такие (канонически) открытые множества $U_i, V_i \subset X$, что $U_i\,\bar{\delta}\,V_i$ и $O_{U_i} \supset A$, $O_{V_i} \supset B_i$, $i = 1, 2$. Положим $U = U_1 \cap U_2$, $V = \langle [V_1 \cup V_2] \rangle$. Тогда $U\,\bar{\delta}\,V$. С другой стороны, $A \subset O_{U_1} \cap O_{U_2} = O_{U_1 \cap U_2} = O_U$. Кроме того, $B_1 \cup B_2 \subset O_{V_1} \cup O_{V_2} \subset O_V$. Таким образом, $A\,\bar{\delta}'\,(B_1 \cup B_2)$. Аксиома II полностью проверена.

Аксиома III ($\emptyset\,\bar{\delta}'\,h_\eta X$) выполнена очевидным образом.

Аксиома IV. Пусть η-концы $x, y \in h_\eta X$ таковы, что — $\{x\}\,\bar{\delta}'\,\{y\}$. Тогда существуют такие (канонически) открытые подмножества $U, V \subset X$, что $U\,\bar{\delta}\,V$ и $x \in O_U$, $y \in O_V$. Это означает, что $U \in x$, $V \in y$ и, так как $U \cap V = \emptyset$, $x \neq y$.

Аксиома V. Пусть $A\,\bar{\delta}'\,B$. Существуют такие (канонически) открытые множества $U, V \subset X$, что $O_U \supset A$, $O_V \supset B$ и $U\,\bar{\delta}\,V$. В силу аксиомы V, выполненной для θ-близости δ, существует такое канонически открытое множество $W \supset U$, что $U\,\bar{\delta}(X \setminus [W])$ и $W\,\bar{\delta}\,V$. Положим $C = O_W$. Множество C канонически открыто и очевидно, что $C \supset A$ ($C = O_W \supset O_U \supset A$). Поскольку $C \subset O_W$ и $W\,\bar{\delta}\,V$, то $C\,\bar{\delta}'\,B$. Кроме того $h_\eta X \setminus [C] = h_\eta X \setminus [O_W] = O_{X \setminus [W]}$. Следовательно, $A\,\bar{\delta}'(h_\eta X \setminus [C])$, потому что $h_\eta X \setminus [C] \subset O_{X \setminus [W]}$ и $U\,\bar{\delta}(X \setminus [W])$. Аксиома V проверена.

Аксиома VI. Пусть у η-конца x и множества $A \subset h_\eta X$ существуют непересекающиеся окрестности, т. е. существуют такие канонически открытые множества $U, V \subset X$, что $U \cap V = \emptyset$ и $x \in O_U$, $A \subset O_V$ (4). Так как x есть η-конец и $U \in x$, то существует такой элемент $U_1 \in x$, что $U_1\,\bar{\delta}(X \setminus [U])$ и тем более $U_1\,\bar{\delta}\,V$. Тогда $x \in O_{U_1}$ и, следовательно, $\{x\}\,\bar{\delta}'\,A$. Аксиома VI также проверена.

Таким образом, отношение δ' является θ-близостью на пространстве $h_\eta X$. Поскольку $G = X \cap O_G$ и $G_1\,\bar{\delta}\,G_2 \Leftrightarrow O_{G_1}\,\bar{\delta}'\,O_{G_2}$, то θ-близость δ' порождает на X θ-близость δ. Следовательно, θ-близость δ' является продолжением θ-близости δ.

Таким образом, мы доказали, что полурегулярное H-замкнутое расширение $h_\eta X$ порождает на X данную H-структуру η. Осталось показать единственность такого расширения. Для этого достаточно доказать, что всякое полурегулярное H-замкнутое расширение hX, порождающее на X данную H-структуру η, совпадает с $h_\eta X$.

Пусть hX — такое расширение и пусть $z \in h_\eta X$, $z = \{G\}$, где множества G канонически открыты в X. Множество $fz = \bigcap \{[G]_{hX} |\ G \in z\}$ не пусто,

(4) Это верно в силу того, что соответствие $G \leftrightarrow O_G$ является изоморфизмом между алгебрами канонически открытых множеств пространств X и $h_\eta X$.

как пересечение центрированной системы канонически замкнутых подмножеств H-замкнутого пространства hX. Пусть y — какая-нибудь точка из fz. Если O — произвольная канонически открытая окрестность точки y, то множество $O \cap X$ пересекается с любым элементом G η-конца z. В самом деле, если $O \cap X \cap G = \emptyset$ для некоторого $G \in z$, то $O \cap G = \emptyset$. Тогда $O \cap [G]_{hX} = \emptyset$, что противоречит включению $y \in [G]_{hX}$. Таким образом, система $\gamma_y = \{O \cap X \cap G\}$, где G — произвольный элемент η-конца z, а O — произвольная канонически открытая окрестность точки y, является центрированной.

Система γ_y является η-системой. В самом деле, пусть θ-близость δ принадлежит H-структуре η. Так как z есть η-конец, то для произвольного множества $G \in z$ существует такое множество $G' \in z$, что $G' \bar{\delta} (X \setminus [G])$. Обозначим через δ' продолжение θ-близости δ на расширение hX (такое продолжение существует, потому что расширение hX порождает на X данную H-структуру η). Тогда для данной (канонически открытой) окрестности O точки y существует такая окрестность O', что $O' \bar{\delta}' (hX \setminus [O]_{hX})$. Тогда $(O' \cap X) \bar{\delta} \{(hX \setminus [O]_{hX}) \cap X\}$. Но

$$(hX \setminus [O]_{hX}) \cap X = X \setminus X \cap [O]_{hX} = X \setminus [O \cap X]_X .$$

Следовательно, $(O' \cap X) \bar{\delta} (X \setminus [O \cap X]_X)$. Сравнивая это с $G' \bar{\delta} (X \setminus [G])$, получаем

$$O' \cap X \cap G' \bar{\delta} \{(X \setminus [O \cap X]_X) \cup (X \setminus [G])\} .$$

Но

$$(X \setminus [O \cap X]_X) \cup (X \setminus [G]) = X \setminus [O \cap X]_X \cap [G] .$$

Обозначим это открытое множество через A. Так как, $O' \cap X \cap G' \bar{\delta} A$, то $O' \cap X \cap G' \bar{\delta} \langle [A] \rangle$. Имеем

$$\begin{aligned}\langle [A] \rangle &= \langle [X \setminus [O \cap X] \cap [G]] \rangle = \langle X \setminus \langle [O \cap X] \cap [G] \rangle \rangle = \\ &= \langle X \setminus \langle [O \cap X] \rangle \cap \langle [G] \rangle \rangle = \langle X \setminus (O \cap X) \cap G \rangle = \\ &= X \setminus [O \cap X \cap G]\end{aligned}$$

(предпоследнее равенство верно, в силу того, что множество $O \cap X$ канонически открыто). Таким образом, $O' \cap X \cap G' \bar{\delta} (X \setminus [O \cap X \cap G])$. Значит, семейство γ_y является η-системой.

Очевидно также, что система γ_y содержит η-конец z и, следовательно, $\gamma_y = z$. Отсюда вытекает, что множество fz состоит из одной точки. В противном случае, взяв две различные точки $y_1, y_2 \in fz$, получим две различные η-системы γ_{y_1} и γ_{y_2}, мажорирующие η-конец z (системы γ_{y_1} и γ_{y_2} различны в силу хаусдорфовости пространства hX). Таким образом, определено отображение $f\colon h_\eta X \to hX$ расширения $h_\eta X$ в расширение hX, являющееся очевидно тождественным на пространстве X.

Вернемся к доказанному выше равенству $\gamma_y = z$. Из него вытекает, что отображение f взаимно однозначно. В самом деле если $fz_1 = fz_2 = y$, то $z_1 = \gamma_y = z_2$ и, следовательно, $z_1 = z_2$.

Теперь покажем, что отображение f θ-непрерывно. Пусть $fz = y$ и O — произвольная (канонически открытая) окрестность точки y. Так как $z = \gamma_y$, то существует такое множество $G \in z$, что $G = O \cap X$. Для θ-непрерывности отображения f достаточно показать, что $f[O_G]_{h_\eta X} \subset [O]_{hX}$. Пусть $z \in [O_G]_{h_\eta X}$. Это означает, что для любого множества $G_1 \in z$ имеем $O_{G_1} \cap O_G \neq \emptyset$ или, что то же самое $G_1 \cap G \neq \emptyset$. Следовательно, система $\{G_1 \cap G |\ G_1 \in z_1\}$ центрирована. Тогда множество $\tilde{z}_1 = \bigcap \{[G_1 \cap G]_{hX} |\ G_1 \in z_1\}$ не пусто, как пересечение центрированной системы канонически замкнутых подмножеств H-замкнутого пространства hX. Но $[G_1 \cap G]_{hX} \subset [G_1] \cap [G]_{hX}$. Поэтому $\tilde{z}_1 \subset [G]_{hX} \cap (\bigcap \{[G_1] |\ G_1 \in z_1\}) = [G]_{hX} \cap fz_1$. Таким образом, непустое множество $\tilde{z}_1$ состоит из одной точки fz_1, которая принадлежит множеству $[G]_{hX}$. Но $G = O \cap X$, поэтому $[G]_{hX} = [O \cap X]_{hX} = [O]_{hX}$. Окончательно имеем $fz_1 \in [O]_{hX}$. Включение $f[O_G]_{h_\eta X} \subset [O]_{hX}$, а вместе с ним и θ-непрерывность отображения f доказаны.

Множество $f(h_\eta X) \subset hX$ H-замкнуто, как θ-непрерывный образ H-замкнутого пространства $h_\eta X$. Кроме того $f(h_\eta X) \supset X$ и, так как X всюду плотно в hX, имеем $f(h_\eta X) = hX$. Таким образом, отображение f является θ-непрерывным и взаимно однозначным отображением полурегулярного H-замкнутого пространства $h_\eta X$ на полурегулярное H-замкнутое пространство hX. Следовательно, f — гомеоморфизм.

Таким образом, H-замкнутое расширение $h_\eta X$ пространства X отображается на H-замкнутое расширение hX посредством гомеоморфизма, тождественного на X. Это означает, что расширения $h_\eta X$ и hX совпадают. Теорема 3 полностью доказана.

Из этой теоремы и предложения 4 вытекает

Следствие 2. *Существует взаимно однозначное соответствие между множеством всех H-структур на данном полурегулярном пространстве и множеством всех его полурегулярных H-замкнутых расширений.*

Если теперь $h_1 X$ и $h_2 X$ — два θ-гомеоморфных H-замкнутых расширения произвольного хаусдорфова пространства X, то они порождают на X одну и ту же H-структуру, поскольку θ-близости на пространствах $h_1 X$ и $h_2 X$ одни и те же (см. [14], предложение 5). С другой стороны H-структура η на хаусдорфовом пространстве X является H-структурой и на полурегулярном пространстве μX, θ-гомеоморфном пространством X. В самом деле, по уже цитированному предложению 5 из работы [14], θ-близости на пространствах X и μX одни и те же, а аксиомы H-структуры формулируются в терминах канонически открытых (замкнутых) множеств. Поэтому H-структуре η на хаусдорфовом пространстве X согласно теореме 3 можно поставить в соответствие некоторое H-замкнутое расширение $h\mu X$ пространства μX. В то же время расширение $h\mu X$ определяет целый класс θ-гомеоморфных H-замкнутых расширений пространства X. Таким образом H-структуре на хаусдорфовом пространстве X соответствует целый класс θ-гомеоморфных между собой H-замкнутых расширений пространства X. В каждом таком классе существует (единственное) расширение, не уплотняемое ни на какое расширение пространства X (см. [3]). Тем самым доказано

Предложение 6. *Для каждой H-структуры η на хаусдорфовом пространстве X существует и притом единственное неуплотняемое H-замкнутое расширение $h_\eta X$ пространства X, порождающее на X данную H-структуру η* (5).

Стоит отметить, что предложение 6, являющееся формально более сильным результатом, чем теорема 3, фактически есть следствие этой теоремы.

Замечание 1. В отличие от H-структуры на H-замкнутом пространстве нельзя утверждать единственность H-структуры, нижней гранью которой является данная близость δ на вполне регулярном пространстве X. В самом деле, пусть $W(\omega_1)$ — пространство всех счетных трансфинитов. Пространство $W(\omega_1)$ имеет единственное бикомпактное расширение $W(\omega_1+1)$ и, следовательно, единственную близость δ. Поскольку пространство $W(\omega_1)$ нормально, а δ — максимальная близость, множества A и B δ-далеки тогда и только тогда, когда их замыкания в $W(\omega_1)$ не пересекаются. Возьмем какое-нибудь полурегулярное H-замкнутое расширение $hW(\omega_1)$ пространства $W(\omega_1)$ и H-структуру η на $W(\omega_1)$, соответствующую этому расширению. Тогда бинарное отношение δ_η, являющееся нижней гранью отношения η, совпадает с близостью δ. В самом деле, если подмножества A и B $W(\omega_1)$ δ_η-близки, то они близки и в расширении $hW(\omega_1)$ пространства $W(\omega_1)$ δ_η-близки, т. е. $[A]^\theta_{hW(\omega_1)} \cap [B]^\theta_{hW(\omega_1)} \neq \emptyset$. Тогда $[A]_{W(\omega_1)} \cap [B]_{W(\omega_1)} \neq \emptyset$, поскольку в противном случае одно из множеств $[A]_{W(\omega_1)}$ и $[B]_{W(\omega_1)}$ было бы счетным компактом и его θ-замыкание в $hW(\omega_1)$ совпадало бы с ним. Таким образом, $A\,\delta_\eta\,B \Rightarrow A\,\delta\,B$, т. е. $\delta_\eta \leqslant \delta$. С другой стороны расширение $hW(\omega_1)$ отображается на минимальное расширение $W(\omega_1+1) = b_\delta W(\omega_1)$, и поэтому $\delta_\eta \geqslant \delta$. Окончательно получаем $\delta_\eta = \delta$. Теперь осталось заметить, что у пространства $W(\omega_1)$ имеются полурегулярные H-замкнутые расширения, отличные от $W(\omega_1+1)$ (подсчет, аналогичный, проведенному в теореме 2, показывает, что у пространства $W(\omega_1)$ имеется $2^{2^{\aleph_1}}$ различных полурегулярных H-замкнутых расширений). Поэтому, в силу теоремы 3, на пространстве $W(\omega_1)$ существуют H-структуры, отличные от η_δ, и все они имеют нижней гранью близость δ.

Итак теорема 3 дает решение обобщенной задачи А. Н. Тихонова в классе полурегулярных пространств. Ограничение на класс пространств представляется довольно естественным, поскольку всякое более или менее

(5) В случае полурегулярного пространства X пространство $h_\eta X$ также полурегулярно и по теореме Катетова является неуплотняемым пространством.

удовлетворительное близостное описание H-замкнутых расширений тем или иным образом связано с аппроксимацией H-замкнутых пространств бикомпактами (как, например, в теореме 1). Но только пространства с различными полурегулярными представителями имеют различные классы бикомпактных прообразов при θ-непрерывных отображениях (см. [13], теорема 2 и [14], предложение 5).

Кроме того, следующая теорема показывает, что для описания произвольных H-замкнутых расширений не хватает и семейств бинарных отношений.

Теорема 4. *Бесконечное дискретное пространство N имеет $2^{2^{2^{|N|}}}$ H-замкнутых расширений.*

Доказательство. Мощность множества P точек произвольного хаусдорфова расширения пространства N не превосходит $2^{2^{|N|}}$. Это вытекает из того, что фильтры окрестностей различных точек из P высекают на N различные фильтры. В то же время на множестве P существует не более чем $2^{2^{|P|}}$ различных топологий. Таким образом, оценка сверху получена.

Для того чтобы получить оценку снизу, покажем, что существует по крайней мере $2^{2^{2^{|N|}}}$ H-замкнутых расширений, θ-гомеоморфных максимальному бикомпактному расширению βN. Пусть ξ — произвольный свободный ультрафильтр на множестве $\beta N \setminus N$. Построим H-замкнутое расширение $h_\xi N$, θ-гомеоморфное βN. Обозначим через $x(\xi)$ предельную точку фильтра ξ. Базу окрестностей в точке $x(\xi)$ образуют множества вида $\{x(\xi)\} \cup \cup \big(Ox(\xi) \cap N\big) \cup K$, где $Ox(\xi)$ — окрестность точки $x(\xi)$ в βN, а K — произвольный элемент фильтра ξ, содержащийся в $Ox(\xi)$. Окрестности остальных точек нароста такие же как и в катетовском расширении τN, т. е. имеют вид $(Ox \cap N) \cup Y$, где $x \in Y \subset Ox \cap (\beta N \setminus N)$. Очевидно, что тождественное отображение катетовского расширения τN на расширение $h_\xi N$ непрерывно (и является локальным гомеоморфизмом во всех точках за исключением $x(\xi)$). Таким образом, $h_\xi N$ есть H-замкнутое расширение пространства N, θ-гомеоморфное расширению τN, а значит и βN. Очевидно также, что нарост $h_\xi N \setminus N$ есть топологическое пространство с единственным сходящимся свободным ультрафильтром ξ. Поэтому для различных свободных ультрафильтров ξ_1 и ξ_2 расширения $h_{\xi_1} N$ и $h_{\xi_2} N$ различны. Для завершения доказательства теоремы остается заметить (применив два раза вышеупомянутую теорему Поспишила), что на множестве $\beta N \setminus N$ существует ровно $2^{2^{2^{|N|}}}$ свободных ультрафильтров.

Замечание 2. Поскольку произвольное хаусдорфово расширение hN имеет не более континуума гомеоморфизмов на себя, из теоремы 2 и 4 вытекает, что пространство N имеет $2^{2^{|N|}}$ полурегулярных H-замкнутых и $2^{2^{2^{|N|}}}$ H-замкнутых расширений, различных как топологические пространства.

Литература

[1] А. Д. Александров, *О расширении хаусдорфора пространства до H-замкнутого*, ДАН СССР 37 (4) (1942), стр. 138–141.

[2] П. С. Александров и П. С. Урысон, *Мемуар о компактных топологических пространствах*, „Наука", Москва 1971.

[3] В. К. Бельнов, *Классификация хаусдорфовых расширений*, Вестн. МГУ, сер. мат. 5 (1967), стр. 23–28.

[4] Н. В. Величко, *H-замкнутые топологические пространства*, Мат. Сбор. 70 (1) (1966), стр. 98–112.

[5] M. Katětov, *Über H-abgeschlossene und bikompakte Räume*, Časopis Mat. Fys. 69 (1940), стр. 36–49.

[6] — *On H-closed extensions of topological spaces*, Časopis Mat. Fys. 72 (1947), стр. 17–32.

[7] B. Pospišil, *Sur la puissance d'un espace contenant une partie deux de puissance donnée*, Časopis Mat. Fys. 67 (1938), стр. 89–96.

[8] Ю. М. Смирнов, *О пространствах близости*, Мат. Сбор. 31 (1952), стр. 543–576.

[9] M. H. Stone, *Application of the theory of Boolean rings to general topology*, Trans. Amer. Math. Soc. 41 (1937), стр. 375–481.

[10] А. Н. Тихонов, *Über die topologische Erweiterung von Räumen*, Math. Ann. 102 (1929), стр. 544–561.

[11] В. В. Федорчук, *θ-пространства и совершенные неприводимые отображения топологических пространств*, ДАН СССР 174 (4) (1967), стр. 757–759.

[12] — *θ-близости и θ-абсолюты*, ДАН СССР 180 (3) (1968), стр. 546–549.

[13] — *Совершенные неприводимые отображения и обобщенные близости*, Мат. Сбор. 76 (4) (1968), стр. 513–538.

[14] — *Об H-замкнутых расширениях пространств θ-близости*, Мат. Сбор. 89 (3) (1972), стр. 400–418.

[15] — *Об одной задаче А. Н. Тихонова*, ДАН СССР 210 (6) (1973), стр. 1297–1299.

[16] С. В. Фомин, *Расширения топологических пространств*, ДАН СССР 32 (2) (1941), стр. 114–116.

[17] — *Extensions of topological spaces*, Ann. of Math. 44 (1943), стр. 471–480.

Reçu par la Rédaction le 2. 5. 1973