STUDIA MATHEMATICA, T. LV. (1976)

Minimale Elemente auf Hyperebenen und konjugierte Funktionen

von

MICHAEL WRIEDT (Kiel)

Abstract. Let E be a real locally convex space and $f\colon E\to R$ a continuous convex function. Let $H = \ker u$ $(u\in E')$ a hyperplane with the following property: for each $x\in E$ the set

$$P_H(x, f) = \{h_0\in H \mid f(x-h_0) = \inf_{h\in H} f(x-h)\}$$

consists of exactly one element. f^* denotes the conjugate function. Connections between $P_H(\cdot, f)$ and the restriction $f^*|\langle u_0\rangle$ are studied. Particulary a criterion for continuity of $P_H(\cdot, f)$ is proved.

In dieser Arbeit ist E ein reeller lokalkonvexer Raum und $f\colon E\to \boldsymbol{R}$ eine stetige konvexe Funtion.

Sei $u_0\in E'$ und $H = \operatorname{Kern} u_0$. Ist H eine *f-Chebychev-Hyperebene*, besteht also die Menge

$$P_H(x, f) = \{h_0\in H \mid f(x-h_0) = \inf_{h\in H} f(x-h) =: f(x+H)\}$$

für jedes $x\in E$ aus genau einem Element, so wird die Abbildung

$$P_H(\cdot, f)\colon x\mapsto P_H(x, f)$$

metrische Projektion auf H genannt.

Die zu f konjugierte Funktion ist

$$f^*\colon \begin{array}{l} u\mapsto \sup_{x\in E}\big(u(x)-f(x)\big), \\ E'\mapsto (-\infty, \infty]. \end{array}$$

Untersucht werden Zusammenhänge zwischen $P_H(\cdot, f)$ und $f^*|\langle u_0\rangle$.

Satz 1. *Sei $H = \operatorname{Kern} u_0$. Es ist $x\in\big(P_H(\cdot, f)\big)^{-1}(0)$ genau dann wenn $\lambda\in\boldsymbol{R}$ existiert mit $\lambda u_0(x) = f(x)+f^*(\lambda u_0)$.*

Beweis. Ist $x\in\big(P_H(\cdot, f)\big)^{-1}(0)$, so ist $(x+H)\times\{f(x)\}$ eine abgeschlossene Stützmannigfaltigkeit von $\operatorname{Epi} f$ $(:= \{(y, r) \mid r\geqslant f(y)\})$. Sei $(u_1, -1)\in E'\times\boldsymbol{R}$ ein nach dem Trennungssatz von Mazur existierendes Funktional mit

$$(x+H)\times\{f(x)\}\subset\{(x, r) \mid u_1(x)-r = c\},$$

$$\operatorname{Epi} f\subset\{(x, r) \mid u_1(x-r\leqslant c\}.$$

Wir erhalten

$$u_1(x+h)-f(x) = c \quad \text{für } h\in H,$$

folglich $u_1(h) = 0$ für alle $h\in H$. Also gibt es λ, für das $u_1 = \lambda u_0$. Schließlich ergibt sich sofort $c=f^*(\lambda u_0)$. Gibt es andererseits ein λ mit den geforderten Eigenschaften, so gilt für jedes $h\in H$

$$f(x) = \lambda u_0(x)-f^*(\lambda u_0) = \lambda u_0(x+h)-f^*(\lambda u_0) \leqslant f(x+h).$$

KOROLLAR. *Sei* Epi f *flach konvex, so gibt es zu* $x\in\big(P_H(\cdot,f)\big)^{-1}(0)$ *genau ein* λ *mit* $\lambda u_0(x) = f(x)+f^*(\lambda u_0)$.

Beweis. Für jedes λ, das die Gleichung erfüllt, definiert $\lambda u_0(y)-r = f^*(\lambda u_0)$ eine Stützhyperebene von Epi f in $\big(x, f(x)\big)$. Aus der flachen Konvexität von Epi f folgt die Behauptung.

Die folgenden Überlegungen beruhen auf Eigenschaften von konvexen Funktionen von $\boldsymbol{R}$ in $(-\infty, \infty]$. Sei $u_0\in E'$, $u_0(x_0) = 1$ und $H = \operatorname{Kern} u_0$ eine f-Chebychev-Hyperebene. Die Funktionen

$$f(\cdot x_0+H)\colon \lambda\mapsto f(\lambda x_0+H),$$
$$f^*(\cdot u_0)\colon \lambda\mapsto f^*(\lambda u_0)$$

sind konvex. $f(\cdot x_0+H)$ ist auf ganz $\boldsymbol{R}$ endlich und damit stetig. Weiter gilt

$$\begin{aligned}\big(f(\cdot x_0+H)\big)^*(\lambda^*) &= \sup_{\lambda\in\boldsymbol{R}}\big(\lambda^*\lambda-f(\lambda x_0+H)\big)\\ &= \sup_{\lambda\in\boldsymbol{R}}\sup_{h\in H}\big(\lambda^* u_0(\lambda x_0+h)-f(\lambda x_0+h)\big)\\ &= \sup_{x\in E}\lambda^* u_0(x)-f(x) = f^*(\lambda^* u_0).\end{aligned}$$

Also gilt $\big(f(\cdot x_0+H)\big)^* = f^*(\cdot u_0)$.

Den Endlichkeitsbereich (effective domain) von $f^*(\cdot u_0)$ bezeichnen wir mit $\Lambda(u_0)$, also

$$\Lambda(u_0) = \{\lambda\,|\,f^*(\lambda u_0)<\infty\}.$$

SATZ 2. *Sei* f *strikt konvex,* $0\neq u_0\in E'$ *und* $\operatorname{Kern} u_0 = H$ *eine* f*-Chebychev-Hyperebene. Es gilt*

$$\mathring{\Lambda}(u_0) = \{\lambda\,|\,\exists x\colon f^*(\lambda u_0)+f(x) = \lambda u_0(x)\}.$$

Beweis. Sei wieder $u_0(x_0) = 1$. $f(\cdot x_0+H)$ ist stetig und auch strikt konvex, denn f ist strikt konvex und H f-Chebychev. Die konjugierte Funktion ist daher wesentlich flach konvex ([4], Th. 26.3).

Sei nun $\lambda_0^*\in\mathring{\Lambda}(u_0)$, so ist $f^*(\cdot u_0)$ in λ_0^* differenzierbar. Für die Ableitung λ_0 gilt dann ([4], Th. 23.5)

$$f^*(\lambda_0^*)+f(\lambda_0x_0+H) = \lambda_0\lambda_0^*,$$

also für $h_0 = P_H(\lambda_0x_0, f)$

$$f^*(\lambda_0^* u_0)+f(\lambda_0x_0-h_0) = \lambda_0^* u_0(\lambda_0x_0-h_0).$$

Ist andererseits

$$f^*(\lambda_0^* u_0)+f(x) = \lambda_0^* u_0(x)$$

und $x = \lambda_0x_0+h_0$, so folgt aus Satz 1 $\lambda_0x_0+h_0\in\big(P_H(\cdot,f)\big)^{-1}(0)$, d.h.

$$f(x) = f(\lambda_0x_0+h_0) = f(\lambda_0x_0+H),$$

womit sich

$$\lambda_0\in\partial\big(f^*(\cdot u_0)\big)(\lambda_0^*) \qquad ([4],\ \text{Th. } 23.5)$$

ergibt.

Insbesondere

$$\partial\big(f^*(\cdot u_0)\big)(\lambda_0^*) \neq \emptyset.$$

Da $f^*(\cdot u_0)$ wesentlich flach konvex ist, muß sein $\lambda_0^*\in\mathring{\Lambda}(u_0)$ ([4], Th. 26.1).

SATZ 3. *Sei* f *strikt konvex und* Epi f *flach konvex. Weiter sei* $u_0(x_0) = 1$ *und* $H = \operatorname{Kern} u_0$ f*-Chebychev. Dann ist die durch*

$$\lambda^*\mapsto\lambda, \quad \textit{wobei} \quad f^*(\lambda^* u_0)+f(\lambda x_0+H) = \lambda\lambda^*$$

definierte Abbildung

$$\varphi\colon \mathring{\Lambda}(u_0)\to\boldsymbol{R}$$

eine Homöomorphie.

Beweis. $f^*(\cdot u_0)$ ist auf $\mathring{\Lambda}(u_0)$ differenzierbar, daher auch stetig differenzierbar ([4], Cor. 25.5.1), also ist die Ableitung $\big(f^*(\cdot u_0)\big)' = \varphi$ auf $\mathring{\Lambda}(u_0)$ monoton und surjektiv. Die Injektivität, also die strenge Monotonie von φ folgt aus dem Korollar zu Satz 1.

Es seien die Voraussetzungen von Satz 3 erfüllt. Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{tikzcd} E \arrow[d, "\pi"] \arrow[dr, "\omega"] & \\ \boldsymbol{R} \arrow[r, "\hat{\omega}"] & \big(P_H(\cdot,f)\big)^{-1}(0) \\ \mathring{\Lambda}(u_0) \arrow[u, "\varphi"] \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

$\omega(x) = x-P_H(x,f)$, $\hat{\omega}(\lambda) = \lambda x_0-P_H(\lambda x_0, f)$, $\psi(\lambda) = x$, wobei $f^*(\lambda u_0)+ +f(x) = \lambda u_0(x)$, $\pi(x) = \lambda$, wobei $\lambda x_0-x\in H$. (Man vergleiche hierzu [1] und [3]).

π ist identifizierend (Quotientenabbildung) und da das Diagramm kommutativ ist, wie man leicht nachrechnet, sind die drei Abbildungen ω, $\hat{\omega}$, ψ genau dann stetig, wenn eine von ihnen stetig ist. Insbesondere ist $P_H(\cdot,f)$ genau dann stetig, wenn ψ stetig ist.

THEOREM. *Sei f strikt konvex und* Epi f *flach konvex. Die Hyperebene* $H =$ Kern u_0 *sei f-Chebychev. Dann ist die metrische Projektion* $P_H(\cdot, f)$ *genau dann stetig, wenn die Abbildung*

$$\psi: \begin{array}{l} \lambda \mapsto x, \quad \textit{wobei} \quad f^*(\lambda u_0) + f(x) = \lambda u_0(x), \\ \mathring{A}(u_0) \mapsto \big(P_H(\cdot, f)\big)^{-1}(0) \end{array}$$

stetig ist.

KOROLLAR. *f und H mögen die Voraussetzungen des Theorems erfüllen. Ist f außerdem differenzierbar, so ist $P_H(\cdot,f)$ genau dann stetig, wenn* $(f')^{-1}|\mathring{A}(u_0)\cdot u_0$ *stetig ist.*

Beweis. In [2], Seite 59, wird gezeigt, daß

$$\psi(\lambda) = (f')^{-1}(\lambda u_0).$$

Literaturverzeichnis

[1] F. Deutsch, W. Pollul and I. Singer; *On set-valued metric projections, Hahn–Banach extension maps, and spherical image maps*, Duke Math. J. 40 (1973), S. 355–370.

[2] R. B. Holmes; *A course on optimization and best approximation*, Lect. Notes in Math. 257, Springer, 1972.

[3] — *On the continuity of best approximation operators*, Sympos. on infinite dimensional topology, Princeton, Princeton University Press, 1972.

[4] R. T. Rockafellar; *Convex analysis*, Princeton, Princeton University Press, 1970.

MATHEMATISCHES SEMINAR DER UNIVERSITÄT, KIEL

Received July 10, 1974 (859)

STUDIA MATHEMATICA, T. LV. (1976)

Some permanence properties of locally convex spaces defined by norm space ideals of operators

by

HEIKKI APIOLA (Helsinki)

Abstract. The concept of an $\mathscr{A}$-space, $\mathscr{A}$ an ideal of operators between normed spaces, as introduced by A. Pietsch allows one to treat simultaneously many important classes of locally convex spaces. In this paper necessary and sufficient conditions are given for the space $\mathscr{L}(E, F)$ of continuous linear maps between locally convex spaces E and F and the tensor product $E \otimes_\alpha F$ ($\alpha = \varepsilon$ or π) to be spaces of type $\mathscr{A}$ provided that $\mathscr{A}$ possesses certain stability properties. As an application of our results to "concrete" $\mathscr{A}$-spaces some known results of A. Grothendieck and D. Randtke on (strongly) nuclear and Schwartz spaces are derived.

1. INTRODUCTION

Let $\mathscr{A}$ be an ideal of operators between normed spaces. A. Pietsch [11] has introduced the concept of an $\mathscr{A}$-space, which unifies the treatment of various important classes of locally convex spaces. For example, if $\mathscr{A}$ is chosen to be the ideal of nuclear (resp. precompact) operators, the corresponding $\mathscr{A}$-spaces are the nuclear (resp. Schwartz) spaces. Nuclear and Schwartz spaces share many remarkable stability properties. Subspaces, quotients, arbitrary products and countable direct sums of these spaces are of the respective type. In fact, as pointed out by A. Pietsch [11], all the above mentioned properties are shared by all $\mathscr{A}$-spaces under certain general assumptions about the ideal $\mathscr{A}$.

In this paper spaces of linear operators and topological tensor products will be dealt with. We shall introduce the concepts of "Hom-stability" and "$\otimes_\alpha$-stability" of an ideal $\mathscr{A}$ and prove necessary and sufficient conditions for $\mathscr{L}(E, F)$ and $E \otimes_\alpha F$ ($\alpha = \varepsilon$ or π) to be $\mathscr{A}$-spaces provided that $\mathscr{A}$ possesses the respective stability.

We shall include the proof of Hom-stability of the ideals of nuclear and type s operators, which is essentially contained in an unpublished manuscript of K. Vala, who has kindly let me make use of his material. The $\otimes_\alpha$-stability ($\alpha = \varepsilon$ or π) of these ideals and the ideal of precompact operators and also the Hom-stability of the latter all follow from results