Contents of volume LVII, number 1

	Pages
I. Z. Gochberg und J. Leiterer, Über Algebren stetiger Operatorfunktionen	1–26
J. L. Clerc, Une formule asymptotique du type Melher–Heine pour les zonoles d'un espaces riemannien symétrique	27–32
D. Waterman, On Λ-bounded variation	33–45
J.-T. Lapreste, Operateurs sommants et factorisations. A travers les espaces L^p	47–83
Ch. Swartz, Unconditionally converging and Dunford–Pettis operators on $C_X(S)$	85–90
A. Cordoba, On the Vitali covering properties of a differentiation basis	91–95
A. Cordoba and C. Fefferman, A weighted norm inequality for singular integrals	97–101

STUDIA MATHEMATICA

Managing editors: **Z. Ciesielski, W. Orlicz** (*Editor-in-Chief*), **A. Pełczyński, W. Żelazko**

The journal prints original papers in English, French, German and Russian, mainly on functional analysis, abstract methods of mathematical analysis and on the theory of probabilities. Usually 3 issues constitute a volume.

The papers submitted should be typed on one side only and they should be accompanied by abstracts, normally not exceeding 200 words. The authors are requested to send two copies, one of them being the typed, not Xerox copy. Authors are advised to retain a copy of the paper submitted for publication.

Manuscripts and the correspondence concerning editorial work should be addressed to

STUDIA MATHEMATICA
ul. Śniadeckich 8
00-950 Warszawa, Poland

Correspondence concerning exchange should be addressed to:

INSTITUTE OF MATHEMATICS,
POLISH ACADEMY OF SCIENCES,
ul. Śniadeckich 8
00-950 Warszawa, Poland

The journal is available at your bookseller or at

ARS POLONA
Krakowskie Przedmieście 7
00-068 Warszawa, Poland

PRINTED IN POLAND

WROCŁAWSKA DRUKARNIA NAUKOWA

Über Algebren stetiger Operatorfunktionen

von

I. Z. GOCHBERG (Kischinjow, UdSSR) und J. LEITERER (Jena, DDR)

Zusammenfassung. Sei $K \subset \boldsymbol{R}^n$ ein Kompaktum und L die Algebra der linearen beschränkten Operatoren in einem Banachraum B; GL bezeichne die Gruppe der invertierbaren Operatoren aus L. Weiter sei eine Algebra A stetiger L-wertiger Funktionen auf K gegeben, welche die folgenden beiden Eigenschaften besitzt:

1. In A gibt es beliebig feine Zerlegungen der Einheit.
2. Liegen alle Werte einer Funktion T aus A in GL, so gehört auch T^{-1} zur Algebra A.

In der Arbeit werden Sätze vom folgenden Typ bewiesen: Sei T eine Funktion aus A, deren sämtliche Werte Fredholm-Operatoren sind. Gibt es dann eine stetige Funktion $S: K \to GL$ und Vektoren $x_1, \ldots, x_k$, so daß die Bilder $S(z)x_1, \ldots, S(z)x_k$ für alle $z \in K$ eine Basis des Kerns von $T(z)$ bilden, so kann man die Funktion S stets so auswählen, daß sie außerdem zur Algebra A gehört.

Sei K eine kompakte Teilmenge des n-dimensionalen reellen Raumes $\boldsymbol{R}^n$, $L = L(X)$ die Banachalgebra der linearen beschränkten Operatoren in einem Banachraum X, $GL = GL(X)$ die Gruppe der invertierbaren Operatoren aus L und $C = C(K, L)$ die Algebra der stetigen Funktionen auf K mit Werten in L. Weiter sei A eine gewisse Unteralgebra von C.

Es sei T eine Operatorfunktion aus A, deren sämtliche Werte Φ-Operatoren (1) sind, wobei die Dimension des Nullraumes $\operatorname{Ker} T(\zeta)$ nicht von ζ abhänge. Dann entstehen die folgenden Fragen:

1) Gibt es Vektoren $x_1, \ldots, x_k \in X$ sowie eine Operatorfunktion $S: K \to GL$ aus A, so daß die Vektoren $S(\zeta)x_1, \ldots, S(\zeta)x_k$ für alle $\zeta \in K$ eine Basis von $\operatorname{Ker} T(\zeta)$ bilden?

2) Gibt es Vektoren $y_1, \ldots, y_m \in X$ sowie eine Operatorfunktion $R: K \to GL$ aus A, so daß die Vektoren $R(\zeta)y_1, \ldots, R(\zeta)y_m$ für alle $\zeta \in K$ eine Basis des Faktorraumes $X/\operatorname{Im} R(\zeta)$ erzeugen?

Im Fall, daß A die Algebra aller analytischen Funktionen auf K ist (hierbei ist n als gerade vorauszusetzen und $\boldsymbol{R}^n$ mit dem $n/2$-dimensionalen komplexen Raum $\boldsymbol{C}^{n/2}$ zu identifizieren), wurden diese und ähnliche Fragen bereits ausführlich untersucht (vgl., z.B., [1], [4], [10], [15], [17], [18], [21]). Im analytischen Fall reduzieren sich — für $n > 2$ allerdings

(1) Ein Operator $E \in L$ heißt Φ-Operator, wenn sein Bildraum abgeschlossen ist und außerdem $\dim \operatorname{Ker} E < \infty$ und $\operatorname{codim} \operatorname{Im} E < \infty$ gilt.

nur unter zusätzlichen Voraussetzungen über K — die Fragen 1) und 2) auf die entsprechenden topologischen Probleme, d.h., die Aufgabe 1) bzw. 2) ist genau dann mit einer analytischen Funktion S bzw. R lösbar, wenn dies mit einer stetigen Funktion S bzw. R möglich ist; insbesondere besitzen für $n = 2$ beide Fragen stets eine positive Antwort.

Wir bemerken, daß der Beweis dieser Aussage für allgemeines n recht kompliziert ist. In der im wesentlichen methodischen Arbeit [14] wurde daher der Fall $n = 2$ mit elementaren Mitteln gesondert behandelt; dabei wurde zusätzlich gezeigt, daß die Funktion S bzw. R so gewählt werden kann, daß für einen gewissen endlichcodimensionalen Projektor $P \in L$ die Beziehung $S(\zeta)P = P$ bzw. $PR(\zeta) = P$ gilt.

In der vorliegenden Arbeit werden die Fragen 1) und 2) sowie ähnliche Probleme für eine gewisse Klasse anderer Algebren A untersucht: Zu dieser Klasse gehören z.B.: 1) die Algebra C; 2) die Algebra C^∞ aller in einer gewissen Umgebung von K unendlich oft differenzierbaren Funktionen; 3) falls K die Einheitskreislinie ist, die Algebra aller Funktionen mit absolut konvergenter Fourierreihe; 4) falls K eine glatte Kurve ist, die Algebra aller α-hölderstetigen Funktionen, $0 < \alpha < 1$.

Die von uns betrachteten Algebren zeichnen sich im wesentlichen dadurch aus, daß sie eine Zerlegung der Eins besitzen, was die Situation — im Vergleich zum analytischen Fall — soweit vereinfacht, daß eine elementare Behandlung auch für beliebiges n möglich wird.

Wir zeigen (für die betrachtete Klasse von Algebren) daß die Aufgabe 1) bzw. 2) genau dann mit einer Funktion S bzw. R aus A lösbar ist, wenn sie mit einer stetigen Funktion S bzw. R gelöst werden kann (vgl. Theorem 4.2). Hieraus ergibt sich mit Hilfe bekannter Sätze aus der Theorie der topologischen Faserbündel, daß die Fragen 1) und 2) z.B. stets eine positive Antwort besitzen, wenn $n = 2$ oder das Kompaktum K zusammenziehbar ist. Ist dagegen K die Oberfläche einer Kugel im $\boldsymbol{R}^3$ so ist die Antwort auf die Fragen 1) und 2) im allgemeinen bereits negativ (vgl. §5).

Um die vorliegende Arbeit unabhängig von der topologischen Literatur zu machen, wo die von uns benötigten fasertheoretischen Resultate — soweit uns bekannt — stets nur in wesentlich allgemeinerer und damit komplizierterer Form behandelt werden, geben wir am Ende der Arbeit in einem Anhang direkte Beweise für diese an.

Wir untersuchen auch unendlichdimensionale Analoga der Aufgaben 1) und 2); z.B. kann man sich die folgende Frage stellen:

3) Gibt es für jede Funktion $P \in A$, deren Werte Projektoren sind, eine Funktion $T: K \to GL$ aus A, so daß der Projektor $P_0 \overset{\text{def}}{=} T^{-1}(\zeta)P(\zeta)T(\zeta)$ nicht mehr von ζ abhängt?

Auch diese Aufgabe ist wieder genau dann mit einer Funktion $T \in A$ lösbar, wenn dies mit einer Funktion $T \in C$ möglich ist (vgl. Theorem 4.2).

Aus topologischen Gründen ergeben sich jedoch einige Unterschiede im Vergleich zu den Fragen 1) und 2). So besitzt die Frage 3) bereits im Fall $n = 2$ für „hinreichend schlechte" Banachräume X eine negative Antwort (vgl. Satz 5.2). Dies hängt damit zusammen, daß die Isomorphismengruppe eines Banachraumes nicht immer linear zusammenhängend ist. Andererseits besitzt die Frage 3) — im Unterschied zu 1) und 2) für beliebiges n — stets eine positive Antwort, wenn X ein Hilbertraum ist und $\dim \operatorname{Ker} P(\zeta) = \dim \operatorname{Im} P(\zeta) = \infty$ gilt. Dies kommt daher, daß die Isomorphismengruppe eines unendlichdimensionalen Hilbertraumes (im Unterschied zu endlichdimensionalen Matrizengruppen) zusammenziehbar ist.

Um die Aufgaben 1)–3) zu lösen, zeigen wir zuerst die Existenz lokaler Lösungen, um dann aus einem überdeckenden System lokaler Lösungen eine globale Lösung zu konstruieren. Der Hauptschritt ist dabei der Übergang vom Lokalen zum Globalen, wobei wir wohlbekannte Methoden der Fasertheorie benutzen. Um jedoch wieder unabhängig von der entsprechenden Literatur zu bleiben, entwickeln wir diese Methoden in dem von uns benötigten elementaren Umfang selbst.

Die vorliegende Arbeit besteht aus fünf Paragraphen und dem bereits erwähnten topologischen Anhang. In §1 formulieren wir das Hauptergebnis in der Sprache der Fasertheorie, welches in §2 bewiesen wird. In §3 werden Familien von Unterräumen untersucht, welche lokal als Bild gewisser Operatorfunktionen aus A darstellbar sind. Im vierten Paragraphen schließlich wenden wir die Ergebnisse aus §3 auf Operatorfunktionen an. Der fünfte Paragraph enthält zwei Gegenbeispiele, welche zeigen, daß die Hauptresultate aus §4 nicht verbessert werden können.

Wir danken A. S. Markus für eine anregende Diskussion.

§1. A-Cozyklen. Sei B eine Banachalgebra mit Einselement e, K eine kompakte Teilmenge des n-dimensionalen reellen Raumes $\boldsymbol{R}^n$ und $C = C(K, B)$ die Algebra aller stetigen Funktionen auf K mit Werten in B. Eine Teilmenge U von K heißt *relativ offen*, wenn sie in der Topologie von K offen ist; eine Überdeckung $\{U_j\}_{j \in J}$ des Kompaktums K heißt *relativ offen*, wenn die U_j relativ offene Teilmengen von K sind.

Im vorliegenden Paragraphen bezeichnen wir mit $A = A(K, B)$ eine gewisse Teilalgebra von $C(K, B)$, welche die folgenden beiden Eigenschaften besitzt:

1) Für jede endliche relativ offene Überdeckung $\{V_j\}_{j=1}^n$ von K gibt es ein System reeller nichtnegativer Funktionen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ auf K, so daß: $\varphi_1(\zeta) + \ldots + \varphi_n(\zeta) = 1$ $(\zeta \in K)$, $\varphi_j(\zeta) = 0$ $(\zeta \in K \setminus V_j)$ und $\varphi_j x \in A$ für alle $x \in B$.

2) Sind alle Werte einer Funktion $a \in A$ invertierbare Elemente der Algebra B, so gehört auch die Funktion a^{-1} zu A.

Wir nennen einige Beispiele. Offenbar besitzen die Algebra C sowie die Algebra C^∞ aller in einer gewissen Umgebung von K unendlich oft differenzierbaren Funktionen die Eigenschaften 1) und 2).

Ist $n = 2$ und K die Einheitskreislinie, so besitzt die Algebra W aller Funktionen $f: K \to B$ der Form

$$f(\zeta) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \zeta^j f_j \quad \text{mit} \quad \sum_{j=-\infty}^{\infty} \|f_j\| < \infty$$

(ζ^j ist hierbei im Sinne der komplexen Multiplikation zu verstehen) offenbar die Eigenschaft 1). Daß die Algebra W auch die Eigenschaft 2) besitzt, wurde in [2] bewiesen (vgl. auch [13]); im skalaren Fall ($B = \boldsymbol{C}$) fällt diese Aussage mit dem bekannten Satz von Wiener über absolut konvergente Fourierreihen zusammen.

Ein weiteres Beipiel für eine Algebra mit den Eigenschaften 1) und 2) bildet offenbar die Menge H_α $(0 < \alpha < 1)$ aller α-hölderstetigen Funktionen auf einer glatten Kurve.

Wir kehren zum allgemeinen Fall zurück. Für jede Teilmenge M von K und jede Teilmenge D von B bezeichnen wir mit $A(M, D)$ die Menge aller Funktionen $h: M \to D$, für die eine Funktion $f \in A$ mit $f|M = h$ existiert.

Es seien nun für den weiteren Verlauf dieses Paragraphen eine relativ offene Überdeckung $\mathfrak{U} = \{U_j\}_{j \in J}$ von K sowie eine offene Untergruppe G der Gruppe aller invertierbaren Elemente aus B fest gegeben.

Definition 1.1. Eine Abbildung f, die jedem geordneten Paar j, k von Indizes aus J eine Funktion $f_{jk} \in A(\overline{U}_j \cap \overline{U}_k, G)$ zuordnet, heißt *$A_G^{\mathfrak{U}}$-Cozyklus*, wenn die folgenden Verträglichkeitsbedingungen erfüllt sind:

$$f_{jk} f_{kl} = f_{jl} \quad \text{auf} \quad \overline{U}_j \cap \overline{U}_k \cap \overline{U}_l \quad (j, k, l \in J).$$

Definition 1.2. Ein $A_G^{\mathfrak{U}}$-Cozyklus f heißt *A-trivial*, wenn es ein Funktionensystem $h_j \in A(\overline{U}_j, G)$ $(j \in J)$ gibt, so daß

$$f_{jk} = h_j h_k^{-1} \quad \text{auf} \quad \overline{U}_j \cap \overline{U}_k \quad (j, k \in J).$$

Offenbar ist jeder A-triviale $A_G^{\mathfrak{U}}$-Cozyklus insbesondere C-trivial. Das folgende Theorem zeigt, daß diese Aussage umkehrbar ist, und stellt das Schlüsselresultat der vorliegenden Arbeit dar.

Theorem 1.1. *Jeder C-triviale $A_G^{\mathfrak{U}}$-Cozyklus ist A-trivial.*

Dem Beweis dieses Theorems ist der folgende Paragraph gewidmet. Wir ziehen hier noch einige Schlußfolgerungen.

Sei E^k $(k = 1, 2, \ldots)$ die k-dimensionale Einheitskugel und S^{k-1} ihre Oberfläche. Wir erinnern daran, daß ein topologischer Raum Z *m-fach zusammenhängend* heißt $(m \geqslant 0)$, wenn jede stetige Abbildung $h: S^k \to Z$ $(k \leqslant m)$ stetig auf E^{k+1} fortsetzbar ist. Aus der Topologie sind die folgenden beiden Lemmata wohlbekannt (vgl. z.B. [6]):

Lemma 1.1. *Für $n = 1$ ist jeder $C_G^{\mathfrak{U}}$-Cozyklus C-trivial. Ist $n \geqslant 2$ und die Gruppe G $(n-2)$-fach zusammenhängend, so ist ebenfalls jeder $C_G^{\mathfrak{U}}$-Cozyklus C-trivial,*

Lemma 1.2. *Ist das Kompaktum K zusammenziehbar, so ist jeder $C_G^{\mathfrak{U}}$-Cozyklus C-trivial.*

Die Lemmata 1.1 und 1.2 werden in der topologischen Literatur — soweit uns bekannt — stets in einem wesentlich allgemeineren und somit komplizierteren Zusammenhang bewiesen. Da die hier formulierten Spezialfälle jedoch vergleichsweise elementar sind, geben wir am Ende dieser Arbeit in einem Anhang direkte Beweise für sie an.

Aus Theorem 1.1 folgt nun aufgrund von Lemma 1.1 das

Theorem 1.2. *Für $n = 1$ ist jeder $A_G^{\mathfrak{U}}$-Cozyklus A-trivial. Ist $n \geqslant 2$ und die Gruppe G $(n-2)$-fach zusammenhängend, so ist ebenfalls jeder $A_G^{\mathfrak{U}}$-Cozyklus A-trivial.*

Folgerung 1.1. *Ist $n \leqslant 2$ und die Gruppe G linear* (d.h. 0-fach) *zusammenhängend, so ist jeder $A_G^{\mathfrak{U}}$-Cozyklus A-trivial.*

Wir bemerken, daß für alle $s = 1, 2, \ldots$ die Gruppe $GL(s, \boldsymbol{C})$ der regulären komplexen Matrizen s-ter Ordnung linear zusammenhängend ist; andererseits ist die Gruppe $GL(s, \boldsymbol{C})$ nicht 1-zusammenhängend und die Behauptung aus Folgerung 1.1 ist für $n = 3$ und $G = GL(s, \boldsymbol{C})$ bereits falsch (vgl. Satz 5.1).

Folgerung 1.2. *Ist die Gruppe G zusammenziehbar, so ist jeder $A_G^{\mathfrak{U}}$-Cozyklus A-trivial.*

Hierzu sei bemerkt, daß die Isomorphismengruppe $GL(X)$ für eine ganze Reihe unendlichdimensionaler Banachräume X zusammenziehbar ist (vgl. z.B. [20]); insbesondere ist dies für alle unendlichdimensionalen Hilberträume X der Fall [8].

Aus Lemma 1.2 erhält man mit Theorem 1.1 das folgende

Theorem 1.3. *Ist das Kompaktum K zusammenziehbar, so ist jeder $A_G^{\mathfrak{U}}$-Cozyklus A-trivial.*

§ 2. Beweis von Theorem 1.1. In diesem Paragraphen seien die folgenden Objekte fest gegeben: B ist eine Banachalgebra mit Einselement e, G ist eine offene Untergruppe der Gruppe aller invertierbaren Elemente aus B, K ist eine kompakte Teilmenge de $\boldsymbol{R}^n$ und $A = A(K, B)$ ist eine Algebra mit den Eigenschaften 1), 2) aus §1.

Aus Eigenschaft 1) der Algebra A ergeben sich unmittelbar drei einfache Aussagen, die wir in dem folgenden Lemma zusammenfassen:

Lemma 2.1. *Sei M eine abgeschlossene Teilmenge von K.*

(a) *Besitzt eine Funktion $h: M \to B$ die Eigenschaft, daß für jedes $\eta \in M$ eine Funktion $h_\eta \in A$ und eine relativ offene Umgebung U_η von η existieren, so daß $h = h_\eta$ auf $U_\eta \cap M$, so gehört die Funktion h zu $A(M, B)$.*

(b) *Jede stetige Funktion auf M mit Werten aus B ist auf M gleichmäßig durch Funktionen aus A approximierbar.*

(c) *Für jede Funktion $h \in A(M, B)$ und jedes $\varepsilon > 0$ gibt es eine Funktion $\tilde{h} \in A$ mit $\tilde{h}|M = h|M$ und*

$$\max_{\zeta \in K} \|\tilde{h}(\zeta)\| \leqslant \max_{\zeta \in M} \|h(\zeta)\| + \varepsilon.$$

Weiter benötigen wir das folgende

Lemma 2.2. *Sei M eine abgeschlossene Teilmenge von K. Dann gehört für jede Funktion $h \in A(M, G)$ auch die Funktion h^{-1} zu $A(M, G)$.*

Beweis. Sei η ein beliebiger Punkt aus M und $\tilde{h}$ eine Funktion aus A mit $\tilde{h}|M = h$. Dann gehört auch die Funktion $g \overset{\text{def}}{=} \tilde{h}[h(\eta)]^{-1}$ zu A und es gilt $g(\eta) = e$. Wir wählen eine relativ offene Umgebung U von η mit

$$\max_{\zeta \in \overline{U}} \|g(\zeta) - e\| < 1.$$

Dann gibt es wegen Lemma 2.1 (c) eine Funktion $m \in A$ mit $m = g - e$ auf $\overline{U}$ und

$$\max_{\zeta \in K} \|m(\zeta)\| < 1.$$

Nach Eigenschaft 2) der Algebra A ist $(e+m)^{-1} \in A$ und für die Funktion $a \overset{\text{def}}{=} [h(\eta)]^{-1}(e+m)^{-1}$ aus A gilt dann offenbar $a = h^{-1}$ auf $U \cap M$. Da der Punkt $\eta \in M$ beliebig gewählt war, folgt die Behauptung nun aus Lemma 2.1 (a). Damit ist der Beweis beendet.

Es seien $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ und $\mathfrak{V} = \{V_j\}_{j \in J}$ zwei relativ offene Überdeckungen von K; dabei sei $\mathfrak{V}$ eine Verfeinerung von $\mathfrak{U}$, d. h. es existiere eine Abbildung $q: J \to I$ mit $V_j \subset U_{q(j)}$. Dann erzeugt offenbar jeder $A_G^{\mathfrak{U}}$-Cozyklus f durch

$$\tilde{f}_{sr} \overset{\text{def}}{=} f_{q(s)q(r)} \quad \text{auf} \quad \overline{V}_s \cap \overline{V}_r \quad (s, r \in J)$$

einen $A_G^{\mathfrak{V}}$-Cozyklus $\tilde{f}$. Jeder auf diese Art erzeugte $A_G^{\mathfrak{V}}$-Cozyklus $\tilde{f}$ heißt durch f induziert. Natürlich gibt es im allgemeinen mehrere durch f induzierte $A_G^{\mathfrak{V}}$-Cozyklen, denn die Abbildung q muß nicht eindeutig bestimmt sein. Es gilt aber das folgende wohlbekannte (vgl. z.B., [5])

Lemma 2.3. *Ist f ein $A_G^{\mathfrak{U}}$-Cozyklus, so ist f genau dann A-trivial, wenn $\tilde{f}$ A-trivial ist.*

Beweis. Die Notwendigkeit der Bedingung ist offensichtlich. Wir zeigen ihre Hinlänglichkeit. Sei $\tilde{f}$ A-trivial, d.h. es existiere ein Funktionensystem $\tilde{h}_j \in A(\overline{V}_j, G)$ mit

$$\tilde{f}_{sr} = \tilde{h}_s \tilde{h}_r^{-1} \quad \text{auf} \quad \overline{V}_s \cap \overline{V}_r \quad (s, r \in J).$$

Weiter sei $q: J \to I$ eine Abbildung mit $\tilde{f}_{sr} = f_{q(s)q(r)}$ auf $\overline{V}_s \cap \overline{V}_r$. Dann gilt für $j \in I$ und $r, s \in J$

$$f_{q(s)j} f_{jq(r)} = \tilde{h}_s \tilde{h}_r^{-1} \quad \text{auf} \quad \overline{V}_s \cap \overline{V}_r \cap \overline{U}_j,$$

d.h. es gibt korrekt definierte Funktionen $h_j: \overline{U}_j \to G$ mit $h_j = f_{jq(s)} \tilde{h}_s$ auf $\overline{U}_j \cap \overline{V}_s$. Nach Lemma 2.1 (a) gilt $h_j \in A(\overline{U}_j, G)$. Offenbar ist $f_{jk} = h_j h_k^{-1}$ auf $\overline{U}_j \cap \overline{U}_k$. Damit ist das Lemma bewiesen.

Lemma 2.4. *Seien M_1, M_2 zwei abgeschlossene Teilmengen von K und h eine Funktion aus $A(M_1 \cap M_2, G)$. Gibt es dann stetige Funktionen $c_1: M_1 \to G$, $c_2: M_2 \to G$ mit $h = c_1 c_2^{-1}$ auf $M_1 \cap M_2$, so gibt es auch Funktionen $a_1 \in A(M_1, G)$, $a_2 \in A(M_2, G)$ mit $h = a_1 a_2^{-1}$ auf $M_1 \cap M_2$.*

Beweis. Sei $\tilde{h}$ eine Funktion aus A mit $h = \tilde{h}$ auf $M_1 \cap M_2$. Nach Lemma 2.1 (b) gibt es Funktionen $b_j \in A$ $(j = 1, 2)$, die c_j auf M_j so gut gleichmäßig approximieren, daß $b_j \in A(M_j, G)$ und

$$\max_{\zeta \in M_1 \cap M_2} \|b_1^{-1}(\zeta) \tilde{h}(\zeta) b_2(\zeta) - e\| < 1.$$

Aus dieser Ungleichung und Lemma 2.1 (c) folgt die Existenz einer Funktion $m \in A$ mit $m = b_1^{-1} \tilde{h} b_2 - e$ auf $M_1 \cap M_2$ und

$$\max_{\zeta \in K} \|m(\zeta)\| < 1. \tag{2.1}$$

Wegen Eigenschaft 2) der Algebra A gehört $(e+m)^{-1}$ und somit auch die Funktion $a_2 \overset{\text{def}}{=} b_2(e+m)^{-1}$ zur Algebra A. Da die Gruppe G offen ist, folgt aus (2.1), daß die Funktion $(e+m)^{-1}$ nur Werte aus G annimmt und somit $a_2 \in A(M_2, G)$ gilt. Setzt man nun noch $a_1 = b_1$, so gilt offenbar $a_1^{-1} h a_2 = e$ auf $M_1 \cap M_2$, womit das Lemma bewiesen ist.

Beweis von Theorem 1.1. Da K kompakt ist, genügt es aufgrund von Lemma 2.3 den Beweis für endliche Überdeckungen zu führen. Sei also $\mathfrak{U} = \{U_j\}_{j=1}^{p}$ eine endliche relativ offene Überdeckung von K und f ein C-trivialer $A_G^{\mathfrak{U}}$-Cozyklus, d.h. es existiere ein System stetiger Funktionen $c_j: \overline{U}_j \to G$ mit

$$f_{jk} = c_j c_k^{-1} \quad \text{auf} \quad \overline{U}_j \cap \overline{U}_k. \tag{2.2}$$

Sei $\mathfrak{V} = \{V_j\}_{j=1}^{p}$ eine zweite relativ offene Überdeckung von K mit $\overline{V}_j \subset U_j$ $(j = 1, \ldots, p)$. Nach Lemma 2.3 reicht es aus, die A-trivialität des durch $\tilde{f}_{jk} = f_{jk}|\overline{V}_j \cap \overline{V}_k$ definierten $A_G^{\mathfrak{V}}$-Cozyklus $\tilde{f}$ zu beweisen. Dafür wiederum genügt es offenbar zu zeigen, daß für $s = p$ die folgende Aussage gilt:

Es gibt relativ offene Mengen $W_j \subset U_j$ $(j = 1, \ldots, s)$ mit $\overline{V}_j \subset W_j$ sowie ein Funktionensystem $a_j \in A(W_j, G)$ $(j = 1, \ldots, s)$, so daß

$$f_{jk} = a_j a_k^{-1} \quad \text{auf} \quad W_j \cap W_k \quad (j,\ k = 1, \ldots, s). \tag{2.3}$$

Für $s = 1$ ist diese Aussage wegen $f_{11} = e$ trivial. Wir setzen nun voraus, daß sie für ein $1 \leqslant s \leqslant p-1$ bereits bewiesen ist. Dann gilt für $j, k = 1, \ldots, s$ die Beziehung $a_j^{-1} f_{j,s+1} = a_k^{-1} f_{k,s+1}$ auf $W_j \cap W_k \cap U_{s+1}$. Folglich gibt es eine korrekt definierte Funktion $h\colon (W_1 \cup \ldots \cup W_s) \cap U_{s+1} \to G$ mit $h = a_j^{-1} f_{j,s+1}$ auf $W_j \cap U_{s+1}$ $(j = 1, \ldots, s)$. Wir wählen relativ offene Mengen $W'_1, \ldots, W'_{s+1}$ aus, so daß $\overline{V}_j \subset W'_j$ und $\overline{W}'_j \subset W_j$ für $j = 1, \ldots, s$ sowie $\overline{V}_{s+1} \subset W_{s+1}$ und $\overline{W}'_{s+1} \subset U_{s+1}$. Dann folgt aus den Lemmata 2.1 (a) und 2.2 die Beziehung $h \in A([\overline{W}'_1 \cup \ldots \cup \overline{W}'_s] \cap \overline{W}'_{s+1}, G)$.

Aus (2.2) und (2.3) folgt für $j, k = 1, \ldots, s$ die Gleichung $a_j^{-1} c_j = a^{-1} c_k$ auf $\overline{W}'_j \cap \overline{W}'_k$. Folglich existiert eine korrekt definierte stetige Funktion $c\colon \overline{W}'_1 \cup \ldots \cup \overline{W}'_s \to G$ mit $c = a_j^{-1} c_j$ auf W_j. Wegen (2.2) gilt:

$$h = c c_{s+1}^{-1} \quad \text{auf} \quad (\overline{W}'_1 \cup \ldots \cup \overline{W}'_s) \cap \overline{W}'_{s+1}.$$

Nach Lemma 2.4 gibt es nun Funktionen $u \in A(\overline{W}'_1 \cup \ldots \cup \overline{W}'_s, G)$ und $v \in A(\overline{W}'_{s+1}, G)$ mit

$$h = uv^{-1} \quad \text{auf} \quad (\overline{W}'_1 \cup \ldots \cup \overline{W}'_s) \cap \overline{W}'_{s+1}.$$

Setzt man $a'_j = a_j u$ $(j = 1, \ldots, s)$ und $a_{s+1} = v$, so gilt offenbar $a'_j \in A(W'_j, G)$ $(j = 1, \ldots, s+1)$ und

$$f_{jk} = a'_j (a'_k)^{-1} \quad \text{auf} \quad W'_j \cap W'_k \quad (j,\ k = 1, \ldots, s+1).$$

Damit ist Theorem 1.1 bewiesen.

§ 3. Familien von Unterräumen eines Banachraumes. In diesen Paragraphen sei X ein Banachraum, $L = L(X)$ die Banachalgebra der linearen beschränkten Operatoren in X und $GL = GL(X)$ die Gruppe der invertierbaren Operatoren aus L. Weiter sei K eine zusammenhängende kompakte Teilmenge des $\boldsymbol{R}^n$ und $C = C(K, L)$ die Algebra der stetigen Funktionen auf K mit Werten aus L. Mit $A = A(K, L)$ bezeichnen wir eine Unteralgebra von C mit den Eigenschaften 1) und 2) aus § 1.

Definition 3.1. (a) Eine Familie $\{M(\zeta)\}_{\zeta \in K}$ von Unterräumen [2] des Raumes X heißt *A-Familie*, wenn es für jeden Punkt $\eta \in K$ eine relativ offene Umgebung $U \subset K$ von η, eine Funktion $T \in A(U, GL)$ und einen Unterraum M_0 von X gibt, so daß

$$M(\zeta) = T(\zeta) M_0, \quad \zeta \in U.$$

[2] Mit „Unterraum" ist stets ein abgeschlossener Unterraum gemeint.

(b) Eine A-Familie $\{M(\zeta)\}_{\zeta \in K}$ von Unterräumen aus X heißt *A-trivial*, wenn es eine Funktion $T \in A(K, GL)$ und einen Unterraum M_0 von X gibt, so daß

$$M(\zeta) = T(\zeta) M_0 \quad \text{für alle } \zeta \in K.$$

Bemerkung 3.1. Wie in § 4 an einem Beispiel gezeigt wird, gibt es bereits für $n = 2$ A-Familien von Unterräumen aus X, die nicht C-trivial sind.

Theorem 3.1. *Sei $M = \{M(\zeta)\}_{\zeta \in K}$ eine Familie stetig projizierter Unterräume von X. Dann ist M genau eine A-Familie, wenn es eine Operatorfunktion $P \in A(K, L)$ gibt, deren sämtliche Werte Projektoren sind, so daß*

$$M(\zeta) = \operatorname{Im} P(\zeta), \quad \zeta \in K.$$

Beweis. Wir setzen zuerst voraus, daß eine solche Funktion P existiert. Dann ist für jeden Punkt $\eta \in K$ die Funktion

$$T(\zeta) \overset{\text{def}}{=} P(\zeta) P(\eta) + \big(I - P(\zeta)\big)\big(I - P(\eta)\big), \quad \zeta \in K,$$

in einer gewissen relativ offenen Umgebung von η invertierbar und es gilt dort offenbar $M(\zeta) = \operatorname{Im} P(\zeta) = T(\zeta)[\operatorname{Im} P(\eta)]$. Damit ist die Hinlänglichkeit der Bedingung gezeigt; wir zeigen ihre Notwendigkeit.

Es sei $\mathfrak{U} = \{U_j\}_1^p$ eine endliche relativ offene Überdeckung von K mit der Eigenschaft, daß für jedes U_j eine Funktion $T_j \in A(\overline{U}_j, GL)$ und ein Unterraum M_j mit $M(\zeta) = T_j(\zeta) M_j$, $\zeta \in \overline{U}_j$, existieren. Da die Räume $M(\zeta)$ stetig projiziert sind, gibt es Projektoren $R_j \in L$ mit $\operatorname{Im} R_j = M_j$. Nach Lemma 2.2 werden durch

$$P_j(\zeta) \overset{\text{def}}{=} T_j(\zeta) R_j T_j^{-1}(\zeta), \quad \zeta \in \overline{U}_j,$$

Funktionen $P_j \in A(\overline{U}_j, L)$ definiert; offenbar sind alle ihre Werte Projektoren und es gilt $M(\zeta) = \operatorname{Im} P_j(\zeta)$ für $\zeta \in \overline{U}_j$.

Nach Eigenschaft 1) der Algebra A gibt es nun nichtnegative reelle Funktionen φ_j auf K mit $\varphi_j | (K \setminus U_j) = 0$, $\sum \varphi_j = 1$ und $\varphi_j I \in A$, wobei I der Einheitsoperator in X ist. Setzt man $\varphi_j P_j$ außerhalb von U_j gleich 0, so gilt $\varphi_j P_j \in A$; somit wird durch $P = \sum \varphi_j P_j$ eine Funktion P aus A korrekt definiert. Wegen $P_k P_j = P_j$ auf $U_j \cap U_k$ ist $P^2 = P$. Schließlich sieht man leicht, daß $M(\zeta) = \operatorname{Im} P(\zeta)$, $\zeta \in K$. Damit ist Theorem 3.1 bewiesen.

Der in Definition 3 (a) auftretende Raum M_0 kann vom Punkt η abhängen. Der folgende Satz zeigt jedoch, daß M_0 auch unabhängig von η gewählt werden kann.

Satz 3.1. *Sei $\{M(\zeta)\}_{\zeta \in K}$ eine A-Familie von Unterräumen aus X. Dann gibt es einen Unterraum M_0 von X mit der folgenden Eigenschaft:*

(Ass) *Für jeden Punkt $\eta \in K$ gibt es eine relativ offene Umgebung U von η und eine Funktion $T \in A(U, GL)$, so daß $M(\zeta) = T(\zeta) M_0$ für $\zeta \in U$.*

Beweis. Für jedes $\eta \in K$ gibt es nach Definition eine relativ offene Umgebung U_η von η, einen Unterraum M_η von X und eine Funktion $T_\eta \in A(U_\eta, GL)$, so daß $M(\zeta) = T_\eta(\zeta) M_\eta$, $\zeta \in U_\eta$. Wir fixieren einen Punkt $\eta_0 \in K$ und setzen $M_0 = M_{\eta_0}$. Offenbar genügt es zu zeigen, daß für jeden Punkt $\eta \in K$ ein Operator $F_\eta \in GL$ mit

$$M_\eta = F_\eta M_0 \tag{3.1}$$

existiert.

Für jeden Punkt $\eta \in K$ gibt es endlich viele Punkte $\eta_1, \ldots, \eta_s \in K$, so daß $U_{\eta_j} \cap U_{\eta_{j+1}} \neq \emptyset$ für $j = 0, 1, \ldots, s$, wobei $\eta_{s+1} \overset{\text{def}}{=} \eta$. Wir wählen für alle $j = 0, 1, \ldots, s$ einen Punkt $\zeta_j \in U_{\eta_j} \cap U_{\eta_{j+1}}$. Dann gilt $M_{\eta_{j+1}} = T^{-1}_{\eta_{j+1}}(\zeta_j) T_{\eta_j}(\zeta_j) M_{\eta_j}$ und somit die Gleichung (3.1), wenn man

$$F_\eta = T^{-1}_{\eta_{s+1}}(\zeta_s) T_{\eta_s}(\zeta_s) \ldots T^{-1}_{\eta_1}(\eta_0) T_{\eta_0}(\eta_0)$$

setzt. Damit ist Satzt 3.1 bewiesen.

Wir werden sagen, daß ein Unterraum M_0 von X zu einer A-Familie $\{M(\zeta)\}_{\zeta \in K}$ assoziiert ist, wenn er die Eigenschaft (Ass) aus Satz 3.1 besitzt.

Sei $M = \{M(\zeta)\}_{\zeta \in K}$ eine A-Familie von Unterräumen aus X und M_0 ein zu M assoziierter Unterraum. Wir bezeichnen mit LM_0 die Unteralgebra aller Operatoren aus L, die auf M_0 invariant sind; GLM_0 sei die Gruppe der invertierbaren Elemente der Algebra LM_0. Weiter sei $\mathfrak{U} = \{U_j\}_{j \in J}$ eine relativ offene Überdeckung von K so fein, daß für alle $j \in J$ eine Funktion $T_j \in A(\overline{U}_j, GL)$ mit $M(\zeta) = T_j(\zeta) M_0$, $\zeta \in \overline{U}_j$, existiert. Wegen Lemma 2.2 wird dann durch die Gleichungen

$$R_{jk} = T_j^{-1} T_k \quad \text{auf} \quad \overline{U}_j \cap \overline{U}_k$$

ein $A^{\mathfrak{U}}_{GLM_0}$-Cozyklus R definiert. Jeden auf diese Art erzeugten $A^{\mathfrak{U}}_{GLM_0}$-Cozyklus werden wir im weiteren zu M assoziiert nennen. Umgekehrt werden wir auch sagen, daß M zu R assoziiert ist.

Satz 3.2. *Sei $M = \{M(\zeta)\}_{\zeta \in K}$ eine A-Familie von Unterräumen aus X, $\mathfrak{U} = \{U_j\}_{j \in J}$ eine relativ offene Überdeckung von K, M_0 ein zu M assoziierter Unterraum und R ein zu M assoziierter $A^{\mathfrak{U}}_{GLM_0}$-Cozyklus. Dann ist M genau A-trivial, wenn R A-trivial ist.*

Beweis. Sei zuerst M als A-trivial vorausgesetzt, d.h. es existiere eine Funktion $T \in A(K, GL)$ mit $M(\zeta) = T(\zeta) M_0$, $\zeta \in K$. Weiter seien $T_j \in A(\overline{U}_j, GL)$ Funktionen mit $M(\zeta) = T_j(\zeta) M_0$, $\zeta \in \overline{U}_j$, und $R_{jk} = T_j^{-1} T_k$. Setzt man $H_j = T_j^{-1} T$, so gilt offenbar $H_j \in A(\overline{U}_j, GLM_0)$ und $H_j^{-1} R_{jk} H_k = I$, d.h. R ist A-trivial.

Es sei nun R als A-trivial vorausgesetzt; T_j seien die gleichen Funktionen wie oben. Dann gilt es Funktionen $H_j \in A(\overline{U}_j, GLM_0)$ mit

$$H_j^{-1} T_j^{-1} T_k H_k = I \quad \text{auf} \quad \overline{U}_j \cap \overline{U}_k.$$

Somit gilt $T_j H_j = T_k H_k$ auf $\overline{U}_j \cap \overline{U}_k$ und es existiert eine korrekt definierte Funktion $T: K \to GL$ mit $T = T_j H_j$ auf U_j, die nach Lemma 2.1 (a) zur Algebra A gehört. Offenbar gilt $M(\zeta) = T(\zeta) M_0$ für alle $\zeta \in K$. Damit ist Satz 3.2 bewiesen.

Theorem 3.2. *Jede C-triviale A-Familie von Unterräumen aus X ist A-trivial.*

Beweis. Der Beweis folgt unmittelbar aus Theorem 1.1 und Satz 3.2.

Ist $M = \{M(\zeta)\}_{\zeta \in K}$ eine A-Familie von Unterräumen aus X, so hängen die Zahlen $\dim M(\zeta)$ und $\operatorname{codim} M(\zeta)$ offenbar nicht von $\zeta \in K$ ab, denn K war als zusammenhängend vorausgesetzt. Wir nennen diese Zahlen Dimension bzw. Codimension von M und bezeichnen sie mit $\dim M$ bzw. $\operatorname{codim} M$.

Aus dem Satz von Kuiper über die Zusammenziehbarkeit der Isomorphismengruppe eines unendlichdimensionalen Hilbertraumes erhält man des folgende

Theorem 3.3. *Ist X ein unendlichdimensionaler Hilbertraum, so ist jede A-Familie M von Unterräumen aus X mit $\dim M = \operatorname{codim} M = \infty$ A-trivial.*

Beweis. Aufgrund von Satz 3.2 genügt es zu zeigen, daß für jeden Unterraum M_0 von X mit $\dim M_0 = \operatorname{codim} M_0 = \infty$ und jede relativ offene Überdeckung $\mathfrak{U}$ von K alle $A^{\mathfrak{U}}_{GLM_0}$-Cozyklen A-trivial sind. Hierfür wiederum reicht es wegen Folgerung 1.2 aus zu zeigen, daß die Gruppe GLM_0 für alle Unterräume $M_0 \subset X$ mit $\dim M_0 = \operatorname{codim} M_0 = \infty$ zusammenziehbar ist.

Sei P der Orthoprojektor von X auf M_0, $Q = I - P$ und $\tilde{G}$ die Untergruppe aller Operatoren aus GLM_0, die auch auf dem Unterraum $\operatorname{Ker} P$ invariant sind. Nach dem Satz von Kuiper [8] sind die Isomorphismengruppen $GL(M_0)$ und $GL(\operatorname{Ker} P)$ und somit auch die Gruppe $\tilde{G}$ zusammenziehbar. Hieraus folgt, daß die durch

$$H_0(N) = NP + QNQ, \quad N \in GLM_0,$$

definierte Abbildung $H_0: GLM_0 \to \tilde{G}$ homotop zu einer konstanten Abbildung ist. Weiter wird durch

$$H(N, t) = H_0(N) + tPNQ \quad (N \in GLM_0,\ 0 \leqslant t \leqslant 1)$$

eine Homotopie zwischen H_0 und der identischen Abbildung von GLM_0 definiert. Damit ist Theorem 3.3 bewiesen.

Bemerkung 3.2. Aus Gegenbeispiel 1, §5, folgt insbesondere, daß Theorem 3.3 falsch wird, wenn man auf eine der Voraussetzungen $\dim M = \infty$ oder $\operatorname{codim} M = \infty$ verzichtet.

Eine A-Familie von Unterräumen aus X heißt *kompakt*, wenn die Abbildung T aus Definition 3.1 (a) in der Form $T = I + V$ gewählt werden kann, wobei die Funktion V nur kompakte Werte aus L annimmt.

THEOREM 3.4. *Ist $n = 2$, so sind alle kompakten A-Familien $M = \{M(\zeta)\}_{\zeta \in K}$ von Unterräumen aus X A-trivial. Dabei kann die Funktion T aus Definition* 3.1 (b) *in der Form $T = I + V$ gewählt werden, wobei alle Werte von V kompakt sind.*

Beweis. Wir bezeichnen mit GLM_0 die Untergruppe aller Operatoren N aus GLM_0 der Form $N = I + S$, wobei S kompakt ist. Da die Familie M kompakt ist, gibt es dann eine relativ offene Überdeckung $\zeta = \{U_j\}_{j \in J}$ von K, einen Unterraum M_0 von X und Funktionen $T_j \in A(U_j, GLM_0)$, so daß $M(\zeta) = T_j(\zeta) M_0$ für $\zeta \in U_j$.

Da die Gruppe GLM_0 offenbar linear zusammenhängend ist, ergibt sich aus Folgerung 1.1, daß der durch $R_{jk}E = T_j T_k^{-1}$ auf $U_j \subset U_k$ definierte A_{GLM_0}-Cozyklus R A-trivial ist. Daß sogar die zweite Behauptung des Theorems gilt, erkennt man am Beweis von Satz 3.2. Damit ist Theorem 3.4 bewiesen.

Bemerkung 3.3. Theorem 3.4 gilt auch, wenn man das Ideal der kompakten Operatoren durch gewisse andere Operatorenideale ersetzt, z.B. durch das Ideal aller nuklearen Operatoren oder — im Hilbertraum — durch das Ideal der Hilbert–Schmidt-Abbildungen.

THEOREM 3.5. *Sei $n \leqslant 2$ und $M = \{M(\zeta)\}_{\zeta \in K}$ eine A-Familie von Unterräumen aus X, für welche mindestens eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

(a) $\dim M < \infty$.

(b) $\operatorname{codim} M < \infty$.

Dann ist M A-trivial. Dabei kann die Funktion T aus Definition 3.1 (b) *so ausgewählt werden, daß für einen gewissen endlichcodimensionalen Projektor $P \in L(X)$ im Fall* (a) *die Beziehung $A(\zeta)P = P$, $\zeta \in K$, und im Fall* (b) *die Beziehung $PA(\zeta) = P$, $\zeta \in K$, gilt.*

Beweis. (a) Sei zuerst $\dim M < \infty$. Man sieht, leicht, daß die Familie M kompakt ist. Folglich ist sie nach Theorem 3.4 A-trivial; sei S eine Funktion aus $A(K, GL)$ und M_0 ein Unterraum von X, so daß $M(\zeta) = S(\zeta) M_0$, $\zeta \in K$. Weiter gibt es für jeden Punkt η aus K einen endlichcodimensionalen Unterraum N_η von X, so daß $N_\eta \cap M(\zeta) = \{0\}$ für alle ζ aus einer gewissen relativ offenen Umgebung U_η von η. Wir wählen endlich viele Punkte η aus, so daß die dazugehörigen Umgebungen U_η das Kompaktum K überdecken, und bezeichnen mit N den Durchschnitt der dazugehörigen Räume N_η.

Dann ist $\operatorname{codim} N < \infty$ und $M(\zeta) \cap N = \{0\}$ für alle $\zeta \in K$. Sei $P \in L$ ein Projektor auf N und $Q = I - P$.

Offenbar ist $\{M(\zeta) + N\}_{\zeta \in K}$ eine kompakte A-Familie von Unterräumen aus X; somit existiert nach Theorem 3.4 eine Funktion $R \in A(K, GL)$ und einen Unterraum M_1 von X, so daß $M(\zeta) + N = R(\zeta) M_1$ für $\zeta \in K$. Durch Multiplikation der Funktionen S und R mit je einem geeigneten konstanten Isomorphismus von rechts kann man erreichen, daß $M_1 = N + M_0$ gilt. Sei M_2 eine direkte Ergänzung zu M_1 in X. Wir bezeichnen mit P_0 den zu $N + M_2$ parallelen Projektor auf M_0 und mit P_2 den zu M_1 parallelen Projektor auf M_2. Dann besitzt die Funktion

$$T(\zeta) \overset{\text{def}}{=} S(\zeta) P_0 + R(\zeta) P_2 + P$$

offenbar die gewünschten Eigenschaften, womit das Theorem im Fall (a) bewiesen ist.

(b) Sei nun $\operatorname{codim} M < \infty$. Nach Theorem 3.1 gibt es eine Funktion $R \in A(K, L)$, deren Werte Projektoren sind, so daß $M(\zeta) = \operatorname{Im} R(\zeta)$. Wiederum nach Theorem 3.1 ist $\{\operatorname{Ker} R(\zeta)\}_{\zeta \in K}$ eine A-Familie. Da sie endlichdimensional ist, gibt es nach dem bereits bewiesenem Teil des Theorems eine Funktion $T_1 \in A(K, GL)$, einen endlichdimensionalen Unterraum M_1 und einen endlichcodimensionalen Projektor $P_0 \in L$, so daß $\operatorname{Ker} R(\zeta) = T_1(\zeta) M_1$ und $T_1(\zeta) P_0 = P_0$. O.B.d.A. sei $M_1 \subset \operatorname{Ker} P_0$. Aus Eigenschaft 1) der Algebra $A(K, L)$ folgt leicht, daß für alle $\varepsilon > 0$ eine Operator-funktion $T_2 \in A(K, L)$ existiert, deren Werte zu einem gewissen endlichdimensionalen Teilraum von L gehören, so daß

$$\|T_2(\zeta) - T_1(\zeta)\| \leqslant \varepsilon, \quad \zeta \in K.$$

Wir wählen ε so klein, daß alle Werte der Funktion

$$T_3(\zeta) \overset{\text{def}}{=} P_0 + T_2(\zeta)(I - P_0), \quad \zeta \in K, \tag{3.2}$$

zu GL gehören und außerdem die Beziehung

$$X = M(\zeta) + T_3(\zeta) M_1, \quad \zeta \in K, \tag{3.3}$$

gilt.

Da die Werte von T_3 zu einem endlichdimensionalen Teilraum von L gehören, gibt es einen endlichdimensionalen Teilraum M_2 von X, so daß

$$T_3(\zeta)(\operatorname{Ker} P_0) \subset M_2, \quad \zeta \in K, \tag{3.4}$$

Wir wählen M_2 so groß, daß außerdem $\operatorname{Ker} P_0 \subset M_2$ gilt. Dann folgt aus (3.2) und (3.4)

$$T_3(\zeta) M_2 = M_2, \quad \zeta \in K. \tag{3.5}$$

Weiter sei N ein endlichcodimensionaler Teilraum von $\operatorname{Im} P_0$ mit $X = N + M_2$ und M_3 sei ein Unterraum von M_2 mit $M_2 = M_3 + M_1$. Wir

bezeichnen mit P_1 den zu $N+M_3$ parallelen Projektor auf M_1. Dann wird durch

$$T_4(\zeta) = R(\zeta)T_3(\zeta)(I-P_1)+T_3(\zeta)P_1$$

wegen (3.3) eine Funktion $T_4 \in A(K, GL)$ mit

$$M(\zeta) = T_4(\zeta)(\operatorname{Ker} P_1) \quad \text{und} \quad T_3(\zeta)(\operatorname{Im} P_1) = T_4(\zeta)(\operatorname{Im} P_1)$$

definiert. Weiter ist dann

$$\tilde{R}(\zeta) \overset{\text{def}}{=} T_4(\zeta)(I-P_1)T_4^{-1}(\zeta)$$

eine Projektionfunktion aus $A(K, L)$ mit

$$\operatorname{Im}\tilde{R}(\zeta) = M(\zeta) \quad \text{und} \quad \operatorname{Ker}\tilde{R}(\zeta) = T_3(\zeta)(\operatorname{Im} P_1);$$

wegen (3.4) und $\operatorname{Im} P_1 = M_1 \subset \operatorname{Im} P_0$ ist also

$$\operatorname{Ker}\tilde{R} \subset M_2. \tag{3.6}$$

Setzt man

$$T(\zeta) = \tilde{R}(\zeta)T_3(\zeta)(I-P_1)+T_3(\zeta)P_1,$$

so erhält man wegen (3.3) eine Funktion $T \in A(K, GL)$ mit

$$M(\zeta) = T(\zeta)(\operatorname{Ker} P_1), \quad \zeta \in K.$$

Sei P der zu M_2 parallele Projektor auf N. Dann gilt $P\tilde{R}(\zeta) = P$ wegen (3.6) und $PT_3(\zeta) = PT_3(\zeta)P = P$ wegen (3.5) und (3.2); somit ist

$$PT(\zeta) = P(I-P_1)+PP_1 = P.$$

Damit ist Theorem 3.5 bewiesen.

THEOREM 3.6. *Ist das Kompaktum K zusammenziehbar, so ist jede A-Familie von Unterräumen aus X A-trivial.*

Beweis. Der Beweis folgt unmittelbar aus Satz 3.2 und Theorem 1.3.

§ 4. Anwendung auf Operatorfunktionen. Sind E, F zwei Banachräume, so bezeichnen wir mit $L(E, F)$ den Banachraum der linearen beschränkten Operatoren von E in F; wir setzen $L(E) = L(E, E)$ und $GL(E)$ sei die Gruppe der invertierbaren Operatoren aus $L(E)$. Für jeden topologischen Raum T bezeichnen wir mit $C(T, E)$ die Algebra der stetigen Funktionen auf T mit Werten in E.

In diesem Paragraphen seien X, Y zwei fest gegebene Banachräume und K eine zusammenhängende kompakte Teilmenge des n-dimensionalen reellen Raumes $\boldsymbol{R}^n$. Weiter seien gewisse Unterräume $A_X = A(K, L(X))$, $A_Y = A(K, L(Y))$, $A_{XY} = A(K, L(X, Y))$ und $A_{YX} = A(K, L(Y, X))$ von $C(K, L(X))$, $C(K, L(Y))$, $C(K, L(X, Y))$ bzw. $C(K, L(Y, X))$ ausgezeichnet, so daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1) Die Räume A_X, A_Y, A_{XY} und A_{YX} besitzen die Eigenschaft 1) aus § 1.

2) A_X und A_Y sind Algebren und besitzen die Eigenschaft 2) aus § 1.

3) Ist $T_X \in A_X$, $T_Y \in A_Y$, $T_{XY} \in A_{XY}$ und $T_{YX} \in A_{YX}$, so gelten die Beziehungen $T_X T_{YX} T_Y \in A_{XY}$, $T_Y T_{XY} T_X \in A_{YX}$, $T_{YX} T_{XY} \in A_X$ und $T_{XY} T_{YX} \in A_Y$.

Einen Operator $N \in L(X, Y)$ soll verallgemeinert invertierbar heißen, wenn ein Operator $M \in L(Y, X)$ mit $NMN = N$ existiert. Ein Operator $N \in L(X, Y)$ ist genau dann verallgemeinert invertierbar, wenn sein Bild und sein Kern stetig projizierte Unterräume sind [9].

Für $N \in L(X, Y)$ sei

$$k(N) \overset{\text{def}}{=} \sup_{y \in \operatorname{Im}(N), \|y\|=1} \inf_{Nx=y} \|x\|.$$

Aus dem Satz vom abgeschlossenen Graphen folgt, daß die Zahl $k(N)$ genau dann endlich ist, wenn der Operator N einen abgeschlossenen Bildraum besitzt (vgl., z.B., [7]).

Als Öffnung [12], [16] zweier Unterräume E, F eines Banachraumes Z bezeichnet man die Zahl

$$\Theta(E, F) \overset{\text{def}}{=} \max\{\sup_{x \in U_E} d(x, U_F), \sup_{x \in U_F} d(x, U_E)\},$$

wobei U_E die Einheitskugel des Raumes E ist und $d(x, U_E) = \inf_{y \in U_E} \|x-y\|$ gilt. Die Funktion Θ definiert eine vollständige Metrik auf der Menge aller Unterräume von Z [16].

A. S. Markus [19] hat gezeigt, daß für eine stetige Operatorfunktion $T: K \to L(X, Y)$, deren Werte alle verallgemeinert invertierbar sind, die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i_1) Die Funktion $k[T(\zeta)]$, $\zeta \in K$, ist stetig.

(i_2) Die Funktion $k[T(\zeta)]$, $\zeta \in K$, ist beschränkt.

(i_3) Die Funktion $\operatorname{Im} T(\zeta)$, $\zeta \in K$, ist stetig im Sinne der Öffnungsmetrik Θ.

(i_4) Die Funktion $\operatorname{Ker} T(\zeta)$, $\zeta \in K$, ist stetig im Sinne der Offnungsmetrik Θ.

Gilt $\operatorname{codim} \operatorname{Im} T(\zeta) < \infty$ bzw. $\dim \operatorname{Ker} T(\zeta) < \infty$ für mindestens ein $\zeta \in K$, so kann man zu den Aussagen (i_1)–(i_4) noch die folgende Aussage (i_5) bzw. (i_6) hinzufügen.

(i_5) Die Codimension des Raumes $\operatorname{Im} T(\zeta)$ hängt nicht von $\zeta \in K$ ab.

(i_6) Die Dimension des Raumes $\operatorname{Ker} T(\zeta)$ hängt nicht von $\zeta \in K$ ab.

Wir werden im weiteren sagen, daß eine stetige Operatorfunktion $T: K \to L(X, Y)$ mit verallgemeinert invertierbaren Werten die Eigenschaft (i) besitzt, wenn sie einer der äquivalenten Bedingungen (i_1)–(i_6) genügt.

Bemerkung 4.1. Man sieht leicht, daß z.B. jede stetige Operatorfunktion $P: K \to L(X)$, deren sämtliche Werte Projektoren sind, die Eigenschaft (i) besitzt.

SATZ 4.1. *Für jede Operatorfunktion T aus $A(K, L(X, Y))$, die nur verallgemeinert invertierbare Werte annimmt, sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) $\{\operatorname{Im} T(\zeta)\}_{\zeta \in K}$ *ist eine A_Y-Familie von Unterräumen aus Y.*

(b) $\{\operatorname{Ker} T(\zeta)\}_{\zeta \in K}$ *ist eine A_X-Familie von Unterräumen aus X.*

(c) *Die Operatorfunktion T besitzt die Eigenschaft* (i).

Beweis. Die Aussagen (a) $\Rightarrow$ (i_3) und (b) $\Rightarrow$ (i_4) sind offensichtlich. Wir nehmen nun an, daß die Operatorfunktion T die Eigenschaft (i) besitzt. Sei $\eta \in K$. Dann folgt aus (i_3) bzw. (i_4) die Existenz gewisser Unterräume Y_0 von Y und X_0 von X, so daß

$$Y = \operatorname{Im} T(\zeta) + Y_0 \quad \text{und} \quad X = \operatorname{Ker} T(\zeta) + X_0 \tag{4.1}$$

für alle ζ aus einer gewissen relativ offenen Umgebung U von η (vgl. [16]). Sei P der zu $\operatorname{Ker} T(\eta)$ parallele Projektor von X auf X_0 und R der zu Y_0 parallele Projektor von Y auf $\operatorname{Im} T(\eta)$.

Dann besitzt $T(\eta)$ als Operator aus $L(\operatorname{Im} P, \operatorname{Im} R)$ einen Inversen, den wir mit $[T(\eta)]^{-1}$ bezeichnen. Wählen wir nun eine relativ offene Umgebung $V \subset U$ von η hinreichend klein, so werden durch

$$F_Y(\zeta) \overset{\text{def}}{=} T(\zeta)\left([T(\eta)]^{-1} R T(\zeta) P\right)^{-1} [T(\eta)]^{-1} R, \qquad \zeta \in \overline{V},$$

und

$$F_X(\zeta) \overset{\text{def}}{=} I - [T(\eta)]^{-1}\left(R T(\zeta)\, [T(\eta)]^{-1}\right)^{-1} R T(\zeta), \qquad \zeta \in \overline{V},$$

stetige Funktionen $F_Y: \overline{V} \to L(Y)$ und $F_X: \overline{V} \to L(X)$ korrekt definiert, deren Werte offenbar Projektoren sind. Dabei gilt $\operatorname{Im} F_Y(\zeta) \subset \operatorname{Im} T(\zeta)$, $\operatorname{Ker} F_Y(\zeta) = Y_0$, $\operatorname{Im} F_X(\zeta) \supset \operatorname{Ker} T(\zeta)$ und $\operatorname{Ker} F_X(\zeta) = X_0$. Hieraus folgen wegen (4.1) die Beziehungen

$$\operatorname{Im} F_Y(\zeta) = \operatorname{Im} T(\zeta) \quad \text{und} \quad \operatorname{Im} F_X(\zeta) = \operatorname{Ker} T(\zeta) \quad \text{für} \quad \zeta \in \overline{V}.$$

Nach Theorem 3.1 (genauer gesagt, nach Teil 1 des Beweises von Theorem 3.1) bleibt daher übrig zu zeigen, daß die Funktion F_Y bzw. F_Y zu $A_Y(\overline{V}, L(Y))$ bzw. $A_X(\overline{V}, L(X))$ gehört. Hierbei beschränken wir uns auf die Funktion F_Y, da der Beweis für F_X analog verläuft. Da aufgrund der Eigenschaft 1) insbesondere die konstante Funktion mit dem Wert $[T(\eta)]^{-1} R$ zu A_{YX} gehört und außerdem die Bedingung 3) erfüllt ist, genügt es, die Beziehung

$$\left([T(\eta)]^{-1} R T(\zeta) P\right)^{-1} P \in A(\overline{V}, L(X))$$

zu zeigen. Letzteres folgt aber wegen

$$\left([T(\eta)]^{-1} R T(\zeta) P + Q\right) \in A(\overline{V}, GL(X))$$

mit Lemma 2.2 aus der Gleichung

$$\left([T(\eta)]^{-1} R T(\zeta) P\right)^{-1} P = \left([T(\eta)]^{-1} R T(\zeta) + Q\right)^{-1} - Q.$$

Damit ist der Satz bewiesen,

FOLGERUNG 4.1. *Sei T eine Operatorfunktion aus A_{XY}, deren Werte sämtlich Φ-Operatoren sind. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(α) $\{\operatorname{Im} T(\zeta)\}_{\zeta \in K}$ *ist eine A_Y-Familie von Unterräumen aus Y.*

(β) $\{\operatorname{Ker} T(\zeta)\}_{\zeta \in K}$ *ist eine A_X-Familie von Unterräumen aus X.*

(γ) *Die Dimension des Raumes $\operatorname{Ker} T(\zeta)$ hängt nicht von $\zeta \in K$ ab.*

Aus Satz 4.1 und Theorem 3.1 folgt:

THEOREM 4.1. *Für jede Operatorfunktion $T \in A(K, L(X, Y))$, deren Werte alle verallgemeinert invertierbar sind, sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) *Die Operatorfunktion T besitzt die Eigenschaft* (i).

(b) *Es gibt eine Operatorfunktion $R \in A(K, L(Y))$, deren Werte Projektoren sind, so daß $\operatorname{Im} T(\zeta) = \operatorname{Im} R(\zeta)$ für alle $\zeta \in K$.*

(c) *Es gibt eine Operatorfunktion $P \in A(K, L(X))$, deren Werte Projektoren sind, so daß $\operatorname{Ker} T(\zeta) = \operatorname{Im} P(\zeta)$ für alle $\zeta \in K$.*

Aus Satz 4.1 und Theorem 3.2 folgt:

THEOREM 4.2. *Sei T eine Operatorfunktion aus $A(K, L(X, Y))$, deren Werte verallgemeinert invertierbar sind.*

(a) *Es gibt genau dann eine Operatorfunktion $E \in A(K, GL(Y))$ und einen Unterraum $M_0 \subset Y$, so daß $\operatorname{Im} T(\zeta) = E(\zeta) M_0$, $\zeta \in K$, wenn es eine stetige Funktion $C: K \to GL(Y)$ und einen Unterraum $M_0 \subset Y$ mit $\operatorname{Im} T(\zeta) = C(\zeta) M_0$, $\zeta \in K$, gibt.*

(b) *Es gibt genau dann eine Operatorfunktion $F \in A(K, GL(X))$ und einen Unterraum $M_0 \subset X$, so daß $\operatorname{Ker} T(\zeta) = F(\zeta) M_0$, $\zeta \in K$, wenn es eine stetige Funktion $C: K \to GL(X)$ und einen Unterraum $M_0 \subset X$ mit $\operatorname{Ker} T(\zeta) = C(\zeta) M_0$, $\zeta \in K$, gibt.*

Aus Satz 4.1 und Theorem 3.3 folgt:

THEOREM 4.3. *Sei T eine Operatorfunktion aus $A(K, L(X, Y))$, deren Werte verallgemeinert invertierbar sind und welche die Eigenschaft* (i) *besitzt.*

(a) *Ist Y ein Hilbertraum und $\dim \operatorname{Im} T(\eta) = \operatorname{codim} \operatorname{Im} T(\eta) = \infty$ für ein (und somit alle) η aus K, so gibt es eine Operatorfunktion $E \in A(K, GL(Y))$ und einen Unterraum $M_0 \subset Y$ mit $\operatorname{Im} T(\zeta) = E(\zeta) M_0$ für alle $\zeta \in K$.*

(b) *Ist X ein Hilbertraum und $\dim \operatorname{Ker} T(\eta) = \operatorname{codim} \operatorname{Ker} T(\eta) = \infty$ für ein η aus K, so gibt es eine Operatorfunktion $F \in A(K, GL(X))$ und einen Unterraum $M_0 \subset X$ mit $\operatorname{Ker} T(\zeta) = F(\zeta) M_0$ für alle $\zeta \in K$.*

Bemerkung 4.2. In § 5 wird ein Beispiel angegeben, welches zeigt, daß Theorem 4.3 falsch wird, wenn man auf die Bedingung $\dim \operatorname{Im} T(\eta) = \operatorname{codim} \operatorname{Im} T(\eta) = \infty$ bzw. $\dim \operatorname{Ker} T(\eta) = \operatorname{codim} \operatorname{Ker} T(\eta) = \infty$ verzichtet.

Aus Satz 4.1 und Theorem 3.5 folgt:

THEOREM 4.4. *Sei $n \leqslant 2$ und T eine Operatorfunktion aus $A(K, L(X, Y))$, deren Werte verallgemeinert invertierbar sind und welche die Eigenschaft* (i) *besitzt.*

(a) *Ist* $\dim \operatorname{Ker} T(\eta) < \infty$ *für ein (und somit alle) η aus K, so existiert eine Operatorfunktion $E \in A(K, GL(X))$ und ein Unterraum $M_0 \subset X$ mit $\operatorname{Ker} T(\zeta) = E(\zeta) M_0$ für alle $\zeta \in K$. Dabei kann die Funktion E so ausgewählt werden, daß für einen gewissen endlichcodimensionalen Projektor $P \in L(X)$ die Beziehung $E(\zeta)P = P$, $\zeta \in K$, gilt.*

(b) *Ist* $\operatorname{codim} \operatorname{Im} T(\eta) < \infty$ *für ein η aus K, so existiert eine Operatorfunktion $E \in A(K, GL(Y))$ und ein Unterraum $M_0 \subset Y$ mit $\operatorname{Im} T(\zeta) = E(\zeta) M_0$ für alle $\zeta \in K$. Dabei kann die Funktion E so ausgewählt werden, daß für einen gewissen endlichcodimensionalen Projektor $P \in L(Y)$ die Beziehung $PE(\zeta) = P$, $\zeta \in K$, gilt.*

Wir bezeichnen mit $A(K, X)$ bzw. $A(K, Y)$ die Menge aller Vektorfunktionen $x: K \to X$ bzw. $y: K \to Y$, für die eine Operatorfunktion $R_x \in A(K, X)$ bzw. $R_y \in A(K, Y)$ mit $x(\zeta) = R_x(\zeta) x_0$ bzw. $y(\zeta) = R_y(\zeta) y_0$ existiert, wobei $x_0 \in X$ bzw. $y_0 \in Y$ ein gewisser konstanter Vektor ist. Mit diesen Bezeichnungen erhält man aus Theorem 4.4 weiter die

FOLGERUNG 4.2. *Sei $n \leqslant 2$ und T eine Operatorfunktion aus $A_{XY} = A(K, L(X, Y))$, deren Werte verallgemeinert invertierbar sind.*

(a) *Hängt die Zahl $s = \dim \operatorname{Ker} T(\zeta)$ nicht von $\zeta \in K$ ab und ist $s < \infty$, so gibt es Funktionen $x_1, \ldots, x_s \in A(K, X)$, so daß das System $x_1(\zeta), \ldots, x_s(\zeta)$ für alle $\zeta \in K$ eine Basis von $\operatorname{Ker} T(\zeta)$ bildet.*

(b) *Hängt die Zahl $m = \operatorname{codim} \operatorname{Im} T(\zeta)$ nicht von $\zeta \in K$ ab und ist $m < \infty$, so gibt es Funktionen $y_1, \ldots, y_m \in A(K, Y)$, so daß das System $y_1(\zeta), \ldots, y_m(\zeta)$ für alle $\zeta \in K$ eine Basis des Faktorraumes $Y/\operatorname{Im} T(\zeta)$ erzeugt.*

§ 5. Zwei Gegenbeispiele.

1. Wir beginnen mit einem Beispiel, welches zeigt, daß die Folgerung 4.2 bereits für $X = Y = \boldsymbol{C}^2$ falsch wird, wenn man auf die Voraussetzung $n \leqslant 2$ verzichtet.

Sei $K = S^2$ die Oberfläche der Einheitskugel im $\boldsymbol{R}^3$, die wir mit der erweiterten komplexen Ebene identifizieren wollen, d.h. es sei $K = \boldsymbol{C} \cup \{\infty\}$. Weiter sei $A(K, \boldsymbol{C})$ eine Algebra mit den Eigenschaften 1) und 2) aus §1. Wir wählen Funktionen φ_∞, $\varphi_0 \in A(K, \boldsymbol{C})$ mit $\varphi_\infty(\zeta) = 0$ für $|\zeta| \leqslant 1/2$, $\varphi_\infty(\zeta) = 1$ für $1 \leqslant |\zeta| \leqslant \infty$, $\varphi_0(\zeta) = 0$ für $2 \leqslant |\zeta| \leqslant \infty$ und $\varphi_0(\zeta) = 1$ für $|\zeta| \leqslant 1$. Setzt man nun zusätzlich voraus, daß die Algebra $A(K, \boldsymbol{C})$ Funktionen ψ_0, ψ_∞ mit $\psi_0(\zeta) = \zeta$ für $|\zeta| \leqslant 2$ und $\psi_\infty(\zeta) = \zeta^{-1}$ für $1/2 \leqslant |\zeta| \leqslant \infty$ enthält, so wird durch die Gleichung

$$T(\zeta) \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \zeta\varphi_0(\zeta) & \varphi_0(\zeta) \\ \varphi_\infty(\zeta) & \zeta^{-1}\varphi_\infty(\zeta) \end{pmatrix}$$

eine Matrixfunktion $T \in A(K, L(\boldsymbol{C}^2))$ definiert, deren Rang identisch gleich 1 ist, welche also die Eigenschaft (i) besitzt.

SATZ 5.1. *Es gibt keine stetige Vektorfunktion $f: K \to \boldsymbol{C}^2$ mit $f(\zeta) \neq 0$ für alle $\zeta \in K$, so daß $f(\zeta) \in \operatorname{Ker} T(\zeta)$, $\zeta \in K$.*

Beweis. Wir nehmen an, es gibt eine solche Funktion $f = (f_1, f_2)$. Dann ist

$$\zeta f_1(\zeta) + f_2(\zeta) = 0 \quad \text{für} \quad |\zeta| < 2 \tag{5.1}$$

und

$$f_1(\zeta) + \zeta^{-1} f_2(\zeta) = 0 \quad \text{für} \quad |\zeta| > 1/2.$$

Hieraus folgen wegen $f(\zeta) \neq 0$, $\zeta \in \boldsymbol{C} \cup \{\infty\}$, die Beziehungen $f_1(\zeta) \neq 0$, $|\zeta| \leqslant 1$, und $f_2(\zeta) \neq 0$, $1 \leqslant |\zeta| \leqslant \infty$; folglich wird durch

$$g(\zeta) \overset{\text{def}}{=} -\frac{f_2(1/\zeta)}{f_1(\zeta)}, \quad |\zeta| \leqslant 1,$$

eine stetige Funktion auf der Kreisscheibe „$|\zeta| \leqslant 1$" korrekt definiert, die dort überall von Null verschieden ist. Wegen (5.1) gilt aber $\zeta = g(\zeta)$ für $|\zeta| = 1$, was unmöglich ist, denn bekanntlich läßt sich die Identität der Einheitskreislinie nicht ohne Nullstellen ins stetig Innere des Kreises fortsetzen. Damit ist der Satz bewiesen.

Nach Theorem 3.1 gibt es eine Projektorfunktion $\tilde{T} \in A(K, L(\boldsymbol{C}^2))$ mit $\operatorname{Ker} \tilde{T}(\zeta) = \operatorname{Ker} T(\zeta)$, $\zeta \in K$. Da für die Funktion T laut Satz 5.1 die in Folgerung 4.2 (a) formulierte Aussage nicht zutrifft, trifft sie natürlich auch nicht für die Funktion $\tilde{T}$ zu. Außerdem besitzt die Funktion $\tilde{T}$ aber auch nicht die in Folgerung 4.2 (b) formulierte Eigenschaft. In der Tat, wäre $g: K \to \boldsymbol{C}^2$ eine stetige Funktion mit $g(\zeta) \notin \operatorname{Im} \tilde{T}(\zeta)$, $\zeta \in K$, so wäre $g(\zeta) - \tilde{T}(\zeta) g(\zeta) \neq 0$ und $g(\zeta) - \tilde{T}(\zeta) g(\zeta) \in \operatorname{Ker} T(\zeta)$ für alle $\zeta \in K$.

Wir bemerken noch, daß sich aus der Funktion T auch leicht ein Gegenbeispiel gewinnen läßt, welches zeigt, daß Theorem 4.3 falsch wird, wenn man auf die Voraussetzung $\dim \operatorname{Im} T(\eta) = \operatorname{codim} \operatorname{Im} T(\eta) = \infty$ bzw. $\dim \operatorname{Ker} T(\eta) = \operatorname{codim} \operatorname{Ker} T(\eta) = \infty$ verzichtet.

2. Wir geben nun ein Beispiel an, welches zeigt, daß Theorem 4.4 nicht mehr allgemein gilt (für $n = 2$), wenn man auf die Voraussetzung $\dim \operatorname{Ker} T(\eta) < \infty$ bzw. $\operatorname{codim} \operatorname{Ker} T(\eta) < \infty$ verzichtet.

Sei Z ein Banachraum, dessen Isomorphismengruppe $GL(Z)$ nicht linear zusammenhängend ist; die Existenz solcher Räume wurde in [3] gezeigt. Weiter sei K die Einheitskreislinie in der komplexen Ebene und $A(K, L(Z \otimes Z))$ eine Algebra stetiger Funktionen mit den Eigenschaften 1) und 2) aus §1. Für je zwei reelle Zahlen $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 2\pi$ bezeichnen wir mit $\Gamma[\alpha, \beta]$ den Bogen aller Zahlen e^{it} mit $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$. Nach Eigenschaft 1) der Algebra $A(K, L(Z \otimes Z))$ gibt es nun reelle Funktionen φ, ψ auf K mit $\varphi(\zeta) = 1$ für $\zeta \in \Gamma[0, \pi/4]$, $\varphi(\zeta) = 0$ für $\zeta \in \Gamma[\pi/2, \pi]$, $\psi(\zeta) = 1$

für $\zeta \in \Gamma[\frac{3}{4}\pi, \pi]$ und $\psi(\zeta) = 0$ für $\zeta \in \Gamma[0, \pi/2]$, so daß für alle Operatoren $H \in L(Z \otimes Z)$ die Funktionen φH und ψH zu $A(K, L(Z \otimes Z))$ gehören.

Wir wählen einen Operator $E \in GL(Z)$, der nicht zur Zusammenhangskomponente des Einheitsoperators I von Z gehört, und betrachten die durch die Blockmatrix

$$S \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \varphi E & (\varphi + \psi - 1) I \\ (1 - \varphi - \psi) I & \varphi E^{-1} + \psi I \end{pmatrix}$$

definierte Funktion $S \in A(K, L(Z \oplus Z))$. Aus der Beziehung $\varphi\psi = 0$ auf $\Gamma[0, \pi]$ folgt $S(\zeta) \in GL(Z \oplus Z)$ für $\zeta \in \Gamma[0, \pi]$. Dabei gilt

$$S(\zeta) = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad \zeta \in \Gamma[0, \tfrac{1}{4}\pi]$$

und

$$S(\zeta) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad \zeta \in \Gamma[\tfrac{3}{4}\pi, \pi].$$

Wir bezeichnen mit P den zu $\{0\} \oplus Z$ parallelen Projektor von $Z \oplus Z$ auf $Z \oplus \{0\}$ und setzen

$$\tilde{T}(\zeta) \overset{\text{def}}{=} S(\zeta) P S^{-1}(\zeta) \quad \text{für} \quad \zeta \in \Gamma[0, \pi].$$

Nach Lemma 2.2 gilt $T \in A(\Gamma[0, \pi], L(Z \oplus Z))$. Weiter ist $\tilde{T}(\zeta) = P$ für alle $\zeta \in \Gamma[0, \frac{1}{4}\pi] \cup \Gamma[\frac{3}{4}\pi, \pi]$. Folglich wird durch

$$T(\zeta) = \begin{cases} \tilde{T}(\zeta) & \text{für} \quad \zeta \in \Gamma[0, \pi], \\ P & \text{für} \quad \zeta \in \Gamma[\pi, 2\pi] \end{cases}$$

eine Funktion $T \in A(K, L(Z \otimes Z))$ definiert, deren Werte Projektoren sind und die somit die Eigenschaft (i) besitzt.

SATZ 5.2. *Es gibt keine stetige Operatorfunktion $R: K \to GL(Z \oplus Z)$, so daß $\operatorname{Im} T(\zeta) = R(\zeta) M_0$ (bzw. $\operatorname{Ker} T(\zeta) = R(\zeta) M_0$) für alle $\zeta \in K$, wobei M_0 ein von ζ unabhängiger Unterraum aus $Z \oplus Z$ ist.*

Beweis. Wir nehmen zuerst an, daß eine stetige Funktion

$$R: K \to GL(Z \oplus Z) \quad \text{mit} \quad \operatorname{Im} T(\zeta) = R(\zeta) M_0, \ \zeta \in K,$$

existiert, wobei o.B.d.A. $M_0 = Z \oplus \{0\}$ sei. Identifiziert man M_0 mit Z, so ist dann $S(\zeta) Z = R(\zeta) Z$ für $0 \leqslant \arg \zeta \leqslant 2\pi$ und $Z = R(\zeta) Z$ für $0 \leqslant \arg \zeta \leqslant 2\pi$. Folglich wird wegen $S(1)|Z = E$ und $S(-1)|Z = I$ durch

$$W(t) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} R(1) R^{-1}(e^{it}) S(e^{it}) | Z & \text{für} \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi, \\ R(1) R^{-1}(e^{it}) | Z & \text{für} \quad \pi \leqslant t \leqslant 2\pi \end{cases}$$

eine stetige Funktion $W: [0, 2\pi] \to GL(Z)$ mit $W(0) = E$ und $W(1) = I$ definiert, was der Auswahl von E widerspricht.

Wir nehmen nun an, daß eine stetige Funktion $R: K \to GL(Z \oplus Z)$ mit $\operatorname{Ker} T(\zeta) = R(\zeta) M_0$, $\zeta \in K$, existiert, wobei o.B.d.A. wieder $M_0 = Z \oplus \{0\}$ sei. Dann wird durch

$$\tilde{R}(\zeta) \overset{\text{def}}{=} R(\zeta) P + T(\zeta) R(\zeta) (I - P)$$

eine stetige Funktion $\tilde{R}: K \to GL(Z \oplus Z)$ mit $\tilde{R}(\zeta)(\{0\} \oplus Z) = \operatorname{Im} T(\zeta)$, $\zeta \in K$, definiert, was, wie bereits gezeigt wurde, unmöglich ist.

ANHANG. DIREKTE BEWEISE DER LEMMATA 1.1 UND 1.2

Es sei B eine Banachalgebra mit Einselement e und G eine offene Untergruppe der Gruppe aller invertierbaren Elemente aus B.

LEMMA 1. *Ist für eine natürliche Zahl $m = 1$ die Gruppe G $(m-1)$-fach zusammenhängend, so gibt es für jede kompakte Teilmenge M der Sphäre S^m und jede stetige Funktion $f: M \to G$ eine stetige Funktion $\tilde{f}: S^m \to G$ mit $\tilde{f}|M = f$.*

Beweis. Für $m = 1$ ist die Behauptung des Lemmas trivial. Wir nehmen nun im Sinne einer Induktionsvoraussetzung an, daß das Lemma bereits für $m = k-1$ bewiesen ist und zeigen seine Gültigkeit für $m = k$. Dazu identifizieren wir die Sphäre S^k mit $\boldsymbol{R}^k \cup \{\infty\}$ und nehmen o.B.d.A. an, daß M eine Teilmenge des Einheitskubus $[0, 1]^k$ ist.

Nach dem verallgemeinerten Theorem von Tietze (vgl., z.B., [11], III, 7) gibt es eine stetige Funktion $g: \boldsymbol{R}^k \to A$ mit $g|M = f$. Da die Gruppe G offen ist, gilt dann $g(\zeta) \in G$ für alle ζ aus einer gewissen Umgebung U von M. Wir wählen eine natürliche Zahl p so groß, daß sich in der Menge $J \overset{\text{def}}{=} \{1, \ldots, p\}^k$ eine Teilmenge S finden läßt, so daß

$$M \subset \bigcup_{(s_1, \ldots, s_k) \in S} W(s_1, \ldots, s_k) \subset U,$$

wobei

$$W(s_1, \ldots, s_k) \overset{\text{def}}{=} \left[\frac{s_1 - 1}{p}, \frac{s_1}{p}\right] \times \ldots \times \left[\frac{s_k - 1}{p}, \frac{s_k}{p}\right].$$

Wir setzen für $T \subset J$

$$W_T = \bigcup_{t \in T} W_t.$$

Es genügt nun zu zeigen, daß für alle $T \subset J$ eine stetige Funktion $f_T: W_T \to G$ mit $f_T | M = f$ existiert, denn es reicht dann aus, die Funktion f_J, die bereits auf dem Einheitskubus $W_J = [0, 1]^k$ definiert ist, durch Spiegelung auf ganz $\boldsymbol{R}^k \cup \{\infty\}$ fortzusetzen. Für $T = S$ existiert eine solche Funktion, und zwar $f_S \overset{\text{def}}{=} g | W_S$. Wir nehmen nun an, daß für ein $S \subset T \subsetneqq J$ bereits eine Funktion f_T mit der gewünschten Eigenschaft konstruiert ist und wählen ein beliebiges Element $r \in J \setminus T$.

Da die Oberfläche ∂W_r des Würfels W_r zur Sphäre S^{k-1} homöomorph ist und $W_T \cap W_r$ eine abgeschlossene Teilmenge davon ist, gibt es nach Induktionsvoraussetzung eine stetige Funktion $h: \partial W_r \to G$ mit $h = f_T$ auf $W_T \cap W_r$. Ist nun die Gruppe G $(k-1)$-fach zusammenhängend (d.h. die Voraussetzung von Lemma 1 für $m = k$ erfüllt), so gibt es wegen der Homöomorphie $W_r = E^k$ eine stetige Funktion $\tilde{h}: W_r \to G$ mit $\tilde{h} \mid \partial W_r = h$. Wir setzen $f_{T \cup \{r\}} = f_T$ auf W_T und $f_{T \cup \{r\}} = \tilde{h}$ auf W_r. Damit ist Lemma 1 bewiesen.

Beweis von Lemma 1.1. Sei $\mathfrak{V} = \{V_j\}_1^k$ eine relativ offene Überdeckung des Einheitskubus $[0,1]^n$ mit der Eigenschaft, daß für alle $1 \leqslant s \leqslant k-1$ ein Homöomorphismus H_s des Raumes $\boldsymbol{R}^n$ auf sich existiert, welcher die Menge $D_s \overset{\text{def}}{=} (\overline{V}_1 \cup \ldots \cup \overline{V}_s) \cap \overline{V}_{s+1}$ auf die Einheitskugel E^n abbildet. Eine solche Überdeckung erhält man z.B. durch geeignete Numerierung der Würfel $W(s_1, \ldots, s_n)$ aus dem Beweis von Lemma 1 und durch Übergang zu gewissen relativ offenen Umgebungen dieser Würfel.

Da sich also die Überdeckung $\mathfrak{V}$ insbesondere beliebig fein wählen läßt, genügt es nach Lemma 2.3 den Beweis für die Überdeckung $\mathfrak{U} = \{U_j\}_1^p$ mit $U_j = V_j \cap K$ zu führen. Außerdem kann man erreichen, daß alle Funktionen f_{jk} zu $C(\overline{U}_j \cap \overline{U}_k, G)$ gehören.

Im Sinne einer Induktionsvoraussetzung nehmen wir nun an, daß für ein $1 \leqslant s \leqslant k-1$ bereits stetige Funktionen $h_j: \overline{U}_j \to G$ $(j = 1, \ldots, s)$ mit

$$f_{jk} = h_j h_k^{-1} \quad \text{auf} \quad \overline{U}_j \cap \overline{U}_k, \quad j, k = 1, \ldots, s,$$

konstruiert sind. Dann gilt $h_j^{-1} f_{j,s+1} = h_k^{-1} f_{k,s+1}$ auf $\overline{U}_j \cap \overline{U}_k \cap \overline{U}_{s+1}$ und folglich existiert eine korrekt definierte stetige Funktion

$$g: (\overline{U}_1 \cup \ldots \cup \overline{U}_s) \cap \overline{U}_{s+1} \to G \quad \text{mit} \quad g = h_j^{-1} f_{j,s+1} \quad \text{auf} \quad \overline{U}_j \cap \overline{U}_{s+1}.$$

Wir bezeichnen mit ∂D_s den Rand der Menge D_s. Da die Gruppe G $(n-2)$-fach zusammenhängend ist, folgt aus Lemma 1 wegen der Homöorphie $H_s(\partial D_s) = S^{n-1}$ die Existenz einer stetigen Funktion

$$g_0: \partial D_s \to G \quad \text{mit} \quad g_0 = g \quad \text{auf} \quad \partial D_s \cap K.$$

Aufgrund der Gleichung $H_s(D_s) = E^n$ gibt es weiter eine stetige Funktion

$$g_{00}: \boldsymbol{R}^n \setminus D_s \to G \quad \text{mit} \quad g_{00} = g_0 \quad \text{auf} \quad \partial D_s.$$

Durch

$$h_{s+1} \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} g^{-1} & \text{auf} \quad D_s \cap K, \\ g_{00}^{-1} & \text{auf} \quad \overline{U}_{s+1} \setminus (D_s \cap K) \end{cases}$$

wird nun eine stetige Funktion $h_{s+1}: \overline{U}_{s+1} \to G$ definiert, für welche offenbar

die Beziehungen

$$f_{j,s+1} = h_j h_{s+1}^{-1} \quad \text{auf} \quad \overline{U}_j \cap \overline{U}_{s+1}, \quad j = 1, \ldots, s+1,$$

gelten. Damit ist Lemma 1.1 bewiesen.

Sei K ein Kompaktum aus $\boldsymbol{R}^n$, $\mathfrak{U} = \{U_j\}_{j \in J}$ eine relativ offene Überdeckung von K und f ein $C_G^{\mathfrak{U}}$-Cozyklus. Wir werden sagen, daß der Cozyklus f auf einer Teilmenge $W \subset K$ C-trivial ist, wenn es ein System stetiger Funktionen $h_j: W \cap U_j \to G$, $j \in J$, gibt, so daß $f_{jk} = h_j h_k^{-1}$ auf $W \cap U_j \cap U_k$. Offenbar ist der Cozyklus f auf jedem U_s C-trivial.

Lemma 2. *Sei $\tilde{K} \subset \boldsymbol{R}^{k+1}$ ein Kompaktum der Form $K = K \times [0,1]$, wobei K eine kompakte Teilmenge des $\boldsymbol{R}^k$ und $[0,1]$ das abgeschlossene Einheitsintervall ist. Weiter sei $\mathfrak{U} = \{U_j\}_{j \in J}$ eine relativ offene Überdeckung von K und f ein $C_G^{\mathfrak{U}}$-Cozyklus. Dann gibt es für jeden Punkt $\zeta \in K$ eine relativ offene Umgebung $W \subset K$ von ζ, so daß der Cozyklus f auf $W \times [0,1]$ C-trivial ist.*

Beweis. Da der Cozyklus f in einer gewissen relativ offenen Umgebung eines jeden Punktes (ζ, t), $0 \leqslant t \leqslant 1$, C-trivial ist, gibt es endlich viele Punkte $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ und eine relativ offene Umgebung $W \subset K$ von ζ, so daß der Cozyklus f auf jeder der Mengen $W \times [t_{j-1}, t_j]$, $j = 1, \ldots, n$, C-trivial ist.

Es sei nun bereits gezeigt, daß der Cozyklus f für ein $1 \leqslant s \leqslant n-1$ auf der Menge $W \times [0, t_s]$ C-trivial ist. Dann gibt es also stetige Funktionen $h_j: U_j \cap (W \times [0, t_s]) \to G$ mit $f_{jk} = h_j h_k^{-1}$ auf $U_j \cap U_k \cap (W \times [0, t_s])$. Außerdem gibt es Funktionen $g_j: U_j \cap (W \times [t_s, t_{s+1}]) \to G$ mit $f_{jk} = g_j g_k^{-1}$ auf $U_j \cap U_k \cap (W \times [t_s, t_{s+1}])$.

Dann gilt $g_j^{-1} h_j = g_k^{-1} h_k$ auf $U_j \cap U_k \cap (W \times t_s)$; folglich existiert eine korrekt definierte stetige Funktion $d: W \times t_s \to G$ mit $d = g_j^{-1} h_j$ auf $U_j \cap \cap (W \times t_s)$. Wir setzen

$$\tilde{d}(\zeta, t) = d(\zeta, t_s) \quad \text{für} \quad (\zeta, t) \in K \times [0,1].$$

Dann gilt

$$h_j = g_j \tilde{d} \quad \text{auf} \quad U_j \cap (W \times t_s).$$

Folglich gibt es korrekt definierte stetige Funktionen

$$\tilde{h}_j: U_j \cap W \times [0, t_{s+1}] \to G$$

mit $\tilde{h}_j = h_j$ auf $U_j \cap (W \times [0, t_s])$ und $\tilde{h}_j = g_j \tilde{d}$ auf $U_j \cap (W \times [t_s, t_{s+1}])$. Für diese gilt dann offenbar

$$f_{jk} = \tilde{h}_j \tilde{h}_k^{-1} \quad \text{auf} \quad U_j \cap U_k \cap (W \times [0, t_{s+1}]).$$

Damit ist Lemma 2 bewiesen.

Beweis von Lemma 1.2. Sei ω ein fixierter Punkt aus K. O.B.d.A. kann man annehmen, daß für $\omega \in U_j \cap U_k$ stets $f_{jk}(\omega) = e$ gilt; anderenfalls kann man nämlich zum Cozyklus $x_j^{-1} f_{jk} x_k$ übergehen, wobei $x_j = e$ für alle j mit $\omega \notin U_j$ und $x_j = f_{jl}(\omega)$ für $\omega \in U_j$, wobei l ein gewisser fixierter Index mit $\omega \in U_l$ ist.

Nach Voraussetzung gibt es eine stetige Abbildung $H: K \times [0, 1] \to K$ mit $H(\zeta, 0) = \zeta$ und $H(\zeta, 1) = \omega$ für alle $\zeta \in K$. Wir setzen

$$\tilde{K} \overset{\text{def}}{=} K \times [0, 1], \qquad \tilde{U}_j = H^{-1}(U_j), \qquad \mathfrak{U} = \{\tilde{U}_j\}_{j \in J}, \text{ und } \tilde{f}_{jk} = f_{jk} \circ H$$

auf $\tilde{U}_j \cap \tilde{U}_k$. Da die Einschränkung des so definierten $C_G^{\mathfrak{U}}$-Cozyklus $\tilde{f}$ auf $K \times 0$ offenbar mit f zusammenfällt, genügt es zu zeigen, daß $\tilde{f}$ C-trivial ist.

Da die Menge $\tilde{U}_j \cap (K \times 1)$ entweder gleich $K \times 1$ oder leer ist (je nachdem, ob ωU_j oder $\omega \notin U_j$), wissen wir bereits (z.B. wegen Lemma 2.3), daß der Cozyklus $\tilde{f}$ auf der Menge $K \times 1$ C-trivial ist. Weiter gibt es nach Lemma 2 eine relativ offene Überdeckung $\mathfrak{W} = \{W_s\}_{s \in S}$ von K, so daß der Cozyklus $\tilde{f}$ auf jedem $\tilde{W}_s \overset{\text{def}}{=} W_s \times [0, 1]$ C-trivial ist, d.h., es gibt stetige Funktionen $g_{js}: \tilde{U}_j \cap \tilde{W}_s \to G$ mit

$$\tilde{f}_{jk} = g_{js} g_{ks}^{-1} \quad \text{auf} \quad \tilde{U}_j \cap \tilde{U}_k \cap \tilde{W}_s. \tag{1}$$

Dann gilt

$$g_{js}^{-1} g_{jr} = g_{ks}^{-1} g_{kr} \quad \text{auf} \quad \tilde{W}_s \cap \tilde{W}_r \cap \tilde{U}_j \cap \tilde{U}_k;$$

folglich gibt es korrekt definierte stetige Funktionen

$$h_{sr}: \tilde{W}_s \cap \tilde{W}_r \to G$$

mit

$$h_{sr} = g_{js}^{-1} g_{jr} \quad \text{auf} \quad \tilde{W}_s \cap \tilde{W}_r \cap \tilde{U}_j. \tag{2}$$

Setzt man $\tilde{\mathfrak{W}} = \{\tilde{W}_s\}_{s \in S}$, so bilded das System $\{h_{sr}\}_{s, r \in S}$ offenbar einen $C_G^{\tilde{\mathfrak{W}}}$-Cozyklus h.

Zur Vervollständigung des Beweises genügt es nun die C-trivialität von h zu zeigen. In der Tat, hätten wir stetige Funktionen

$$c_s: W_s \to G \quad \text{mit} \quad h_{sr} = c_s c_r^{-1} \quad \text{auf} \quad W_s \cap W_r,$$

so wäre aufgrund von (1)

$$g_{js} c_s = g_{jr} c_r \quad \text{auf} \quad \tilde{W}_s \cap \tilde{W}_r \cap \tilde{U}_j.$$

Folglich gäbe es korrekt definirete stetige Funktionen $d_j: \tilde{U}_j \to G$ mit $d_j = g_{js} c_s$ auf $\tilde{U}_j \cap \tilde{W}_s$, für die dann wegen (1) die Beziehungen $\tilde{f}_{jk} = d_j d_k^{-1}$ auf $\tilde{U}_j \cap \tilde{U}_k$ gelten würden.

Da, wie eingangs bemerkt, für $\omega \in U_j \cap U_k$ die Beziehung $f_{jk}(\omega) = e$ angenommen werden kann, gilt $f_{jk} = e$ auf $\tilde{U}_j \cap \tilde{U}_k \cap (K \times 1)$ und somit wegen (1)

$$g_{js} = g_{ks} \quad \text{auf} \quad \tilde{U}_j \cap \tilde{U}_k \cap \tilde{W}_s \cap (K \times 1).$$

Folglich gibt es korrekt definierte Funktionen

$$g_s: W_s \times 1 = \tilde{W}_s \cap (K \times 1) \to G$$

mit $g_s = g_{js}$ auf $\tilde{U}_j \cap (W_s \times 1)$. Aus (2) folgen die Beziehungen $g_s h_{sr} g_r^{-1} = e$ auf $(W_s \times 1) \cap (W_r \times 1)$. Wir setzen $\tilde{g}_s(\zeta, t) = g_s(\zeta, 1)$ für $\zeta \in K$ und $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Es genügt nun zu zeigen, daß der durch $\tilde{h}_{sr} = \tilde{g}_s h_{sr} \tilde{g}_r^{-1}$ definierte $C_G^{\tilde{\mathfrak{W}}}$-Cozyklus $\tilde{h}$ C-trivial ist. Wir bezeichnen mit $\boldsymbol{G}$ die Gruppe der stetigen Funktionen $u: [0, 1] \to G$ mit $u(1) = e$. Wegen $\tilde{h}_{sr} = e$ auf $\tilde{W}_s \cap \tilde{W}_r \cap (K \times 1)$ wird durch $h(\zeta) \overset{\text{def}}{=} \tilde{h}(\zeta, \cdot)$, $\zeta \in W_s \cap W_r$, ein $C_G^{\tilde{\mathfrak{W}}}$-Cozyklus h definiert. Offenbar reicht es aus zu zeigen, daß der Cozyklus h C-trivial ist.

Dafür wiederum genügt es nach Lemma 1.1 zu zeigen, daß die Gruppe $\boldsymbol{G}$ für alle natürlichen Zahlen k k-fach zusammenhängend ist. Letzteres ist aber der Fall; ist nämlich $p: S^k \to G$ stetig, so wählen wir eine stetige Abbildung

$$T: E^{k+1} \times [0, 1] \to (S^k \times [0, 1]) \cup (E^{k+1} \times 1),$$

die auf $(S^k \times [0, 1]) \cup (E^{k+1} \times 1)$ identisch ist (³), und setzen

$$\alpha(\zeta, t) = \begin{cases} [p(\zeta)](t) & \text{für} \quad (\zeta, t) \in S^k \times [0, 1], \\ e & \text{für} \quad (\zeta, t) \in E^{k+1} \times 1, \end{cases}$$

$$\beta(\zeta, t) = \alpha\big(T(\zeta, t)\big) \quad \text{für} \quad (\zeta, t) \in E^{k+1} \times [0, 1]$$

und

$$[\tilde{p}(\zeta)](t) = \beta(\zeta, t) \quad \text{für} \quad \zeta \in E^{k+1} \text{ und } t \in [0, 1].$$

Damit ist Lemma 1.2 bewiesen.

Literatur

[1] G. R. Allan, *On one-sided inverses in Banach algebras of holomorphic vector-valued functions*, Journ. London Math. Soc. 42 (1967), S. 463–470.

[2] S. Bochner and R. S. Phillips, *Absolutly convergent Fourier expansions for noncommutative normed rings*, Ann. of Math. 43 (3) (1942), S. 409–412.

[3] A. Douady, *Un espace de Banach dont le groupe lineaire n'est pas connexe*, Indag. Math. 68 (1965), S. 787–789.

[4] B. Gramsch, *Meromorphie in der Theorie der Fredholmoperatoren mit Anwendungen auf elliptische Differentialoperatoren*, Math. Ann. 188, Heft 2 (1970).

(³) Die Abbildung T kann man bekanntlich wie folgt wählen: Man betrachtet den Zylinder $E^{k+1} \times [0, 1]$ in natürlicher Weise als Teilmenge des $\boldsymbol{R}^{k+2}$ und projiziert ihn vom Punkt $(0, \ldots, 0, -1)$ aus auf $(S^k \times [0, 1]) \cup (E^{k+1} \times 1)$.

[5] F. Hirzebruch, *Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie*, Ergebn. Math. 9 (1956), S. 1–165.
[6] D. Husemoller, *Fibre Bundles*, New York–St.Luis–SanFrancisco–Toronto–London–Sydney 1966.
[7] T. Kato, *Perturbation Theory of Linear Operators*, Berlin–Heidelberg–New York 1966.
[8] N. H. Kuiper, *The homotopy type of the unitary group of Hilbert space*, Topology 3(1) (1965), S. 19–30.
[9] A. Pietsch, *Zur Theorie der σ-Transformationen in lokalkonvexen Vektorräumen*, Math. Nachr. 21 (1960), S. 347–369.
[10] P. Saphar, *Contribution a l-etude des applications lineaires dans un espace de Banach I*, Bull. Soc. Math. France 92 (1964), S. 363–384.
[11] К. Борсук, *Теория ретрактов*, Москва 1971.
[12] И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн, *Основные положения о дефекных числах и индексах линейных операторов*, Успехи Мат. Наук 12, вып. 2 (1957), S. 44–118.
[13] И. Ц. Гохберг и Ю. Лайтерер, *Факторизация оператор-функций относительно контура. II. Каноническая факторизация оператор-функций, близких к единичной*, Math. Nachr. 54 (1972), S. 41–74.
[14] — — *О голоморфных вектор-функциях одного переменного, I. Функции на компакте*, Матем. исслед. Кишинев, 7, вып. 4 (1973), S. 60–84. *II. Функции в области*, ibid. 8, вып. I (1973), S. 37–58.
[15] — — *О коциклах, оператор-функциях и семействах подпространств*, ibid. 8, вып. 2 (1973), S. 23–56.
[16] И. Ц. Гохберг, А. С. Маркус, *Две теоремы о растворе подпространств банахова пространства*, Успехи Матем. Наук 14, вып. 5 (1959), S. 135–140.
[17] М. Г. Зайденберг, *Замечание о голоморфных оператор-функциях, осуществляющих эволюцию подпространств*, Сборник трудов аспирантов матем. факультета Воронежского университета. Воронеж 1971, S. 39–41.
[18] — *О фредгольмовых операторах, голоморфно зависящих от параметра*, Матем. исслед. Кишинев, 6, вып. 2 (1971), S. 142–149.
[19] А. С. Маркус, *О некоторых свойствах линейных операторов, связанных с понятием раствора*, Учёные записки Кишиневского Госуниверситета 39 (1959), S. 265–272.
[20] Б. С. Митягин, *Гомотопическая структура линейной группы банахова пространства*, Успехи Матем. Наук 25, вып. 5 (1970), S. 63–106.
[21] М. А. Шубин, *О голоморфных семействах подпространств банахова пространства*, Матем. исслед. Кишинев, 5, вып. 4 (1970), S. 153–165.

Received April 22, 1974 (817)

STUDIA MATHEMATICA, T. LVII. (1976)

Une formule asymptotique du type Melher–Heine pour les zonoles d'un espace riemannien symétrique

par

JEAN LOUIS CLERC (Nancy)

Résumé. On généralise la formule classique de Melher–Heine reliant les polynômes de Legendre à la fonction de Bessel J_0 dans le cadre des fonctions zonales des espaces riemanniens symétriques. On en déduit un théorème de passage entre multiplicateurs des séries de Fourier–Peter–Weyl d'un espace riemannien symétrique de type compact et multiplicateurs yes transformées de Fourier sur l'espace euclidien tangent á l'origine.

La formule asymptotique de Melher–Heine affirme que:

$$\lim_{n\to\infty} P_n\left(\cos\frac{\theta}{n}\right) = J_0(\theta),$$

où P_n désigne le polynome de Legendre de degré n, et J_0 la fonction de Bessel d'indice 0. Cette formule admet une interprétation dans le cadre de la théorie des espaces riemanniens symétriques. D'abord, on peut étendre la formule pour obtenir:

$$\lim_{R\to\infty} P_{[R\lambda]}\left(\cos\frac{\theta}{R}\right) = J_0(\lambda\theta),$$

où λ est un réel positif fixé et $[x]$ désigne la partie entière de x. Les fonctions, indexées par n dans N, $\xi\mapsto P_n\big(\cos d(\xi,\mathbf{1})\big)$, où d est la distance géodésique sur la sphère S^2 et $\mathbf{1}$ le pôle nord, sont exactement les fonctions sphériques élémentaires de l'espace symétrique $SO(3)/SO(2)\approx S^2$. Les fonctions, $x\mapsto J_0(\lambda|x|)$ $(\lambda\geqslant 0)$ sont les fonctions sphériques élémentaires de type positif du plan euclidien $R^2\approx D(2)/SO(2)$, où $D(2)$ est le groupe des déplacements du plan. La formule ci-dessus montre alors que l'analyse harmonique d'une sphère de rayon R devient à la limite quand R tend vers l'infini l'analyse harmonique du plan euclidien, si le lecteur nous permet ce langage imprécis.

Des formules analogues ont été obtenues pour des groupes de Lie compacts semi-simples (voir [2], [5]). On se propose ici d'énoncer et de démontrer un résultat analogue pour tout espace riemannien symétrique