Sur les opérations presque-inverses

par

TADEUSZ LEŻAŃSKI (Lublin)

Résumé. Ce travail a pour objet la notion d'opération presque-inverse d'une opération A linéaire, non bornée dans l'espace de Hilbert, c.-à-d. une opération G_a satisfaisant à l'inégalité

$$\|G_a Ax - x\|_1 \leq \gamma_0 \|x\|_1, \quad \text{où } \gamma_0 < 1, x \in D(A) \text{ et } \|x\|_1^2 = (Ax, x).$$

Nous y donnons une méthode pour obtenir l'inverse proprement dite en partant d'une presque-inverse, ainsi qu'une méthode pour calculer une presque-inverse de C , si l'on connaît une presque-inverse de B .

Nous indiquons aussi quelques applications à des opérations différentielles du type elliptique.

Introduction. Dans le présent travail nous considérons une classe d'opérations linéaires non bornées dans les espaces réels de Hilbert, définie comme il suit: soit H_1 un sous-ensemble linéaire de H , dense dans H au sens de la norme $\| \cdot \|$, et complet au sens d'une autre norme hilbertienne $\| \cdot \|_1$, plus forte que $\| \cdot \|$. Considérons les fonctionnelles bilinéaires $\Psi(x, y)$ ($x, y \in H_1$) continues au sens de $\| \cdot \|_1$; on dira alors qu'une opération B appartient à $\mathcal{R}$ si elle remplit la condition $(Bx, y) = \Psi(x, y)$, $y \in H_1$ pour tous les x tels que $|\Psi(x, y)| \leq C(x) \|y\|$. Les opérations de cette classe jouissent des propriétés suivantes: si $B \in \mathcal{R}$, alors B^{-1} existe et $D(B^{-1}) = R(B) = H$; $B^{-1} \in L(H, H_1)$, c.-à-d. $\|B^{-1}x\|_1 \leq \text{const} \|x\|$; enfin toute opération $B \in \mathcal{R}$ est de la forme: $B = AK$, où A est définie par $(Ax, y) = (x, y)_1$, et K est un endomorphisme de H_1 , au sens de la norme $\| \cdot \|_1$.

On appelle l'opération G_0 presque-inverse de $B \in \mathcal{R}$, si

$$\|G_0 Bx - x\|_1 \leq \gamma_0 \|x\| \quad (x \in D(B)) \text{ et } \gamma_0 < 1.$$

Bien entendu, une inverse proprement dite B^{-1} est en même temps une presque-inverse; d'autre part, l'inverse B^{-1} peut être obtenue de G_0 comme la limite de certaines opérations G_n , polynômes en G_0 et B . De plus, si $C \in \mathcal{R}$ ne diffère que peu de B (au sens qui sera précisé dans la suite), l'opération presque-inverse de B est en même temps une presque-inverse de C .

Nous donnerons pour terminer des applications aux opérations différentielles du type elliptique.

1. Notions fondamentales.

1.1. Soient: H un espace réel de Hilbert, avec les éléments u, v, x, y, h , etc., le produit scalaire (x, y) et la norme $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$; H_1 un sous-ensemble linéaire dense de H , $(x, y)_1$ un autre produit scalaire défini dans H_1 . Supposons H_1 complet au sens de la norme $\|x\|_1 = \sqrt{(x, x)_1}$ et

$$(1.1.1) \quad \|x\|_1^2 \geq \lambda \|x\|^2 \quad \text{avec un certain } \lambda > 0.$$

Définissons certaines opérations G et A . Pour $x \in H$ fixé la fonctionnelle $\varphi_x(y) \stackrel{\text{def}}{=} (x, y)$ de y parcourant H_1 est linéaire et, en vertu de (1.1.1), bornée:

$$|\varphi_x(y)| \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \|x\| \|y\|_1;$$

alors il existe, d'après un théorème connu de F. Riesz, un (seul) élément $Gx \in H_1$ tel que

$$(1.1.2) \quad (Gx, y)_1 = (x, y) \quad \text{pour } x \in H, y \in H_1.$$

Il découle de (1.1.1) que

$$\|Gx\|_1^2 = (Gx, Gx)_1 = (x, Gx) \leq \|x\| \|Gx\| \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \|x\| \cdot \|Gx\|_1,$$

d'où

$$(1.1.3) \quad \|Gx\|_1 \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \|x\| \quad (x \in H).$$

Démontrons que G^{-1} existe; en effet, soit $x \in H$ et $Gx = 0$. Alors on a, pour $y \in H_1$: $(x, y) = (Gx, y)_1 = 0$, d'où la conclusion, H_1 étant dense dans H .

$R(G)$ est dense dans H_1 au sens de $\| \cdot \|_1$; en effet, soit $y \in H_1$ et $(z, y)_1 = 0$ pour tout $z \in R(G)$, c.-à-d. $(Gx, y)_1 = 0$ pour $x \in H$. Il s'ensuit, d'après (1.1.3), que $(x, y) = 0$ pour tout $x \in H$, d'où $y = 0$. ■

Enfin, G est symétrique dans H (donc aussi auto-adjointe comme bornée); en effet, on a d'après (1.1.3) $(Gx, y) = (Gx, Gy)_1 = (x, Gy)$. ■

Posons $A = G^{-1}$; A est auto-adjointe, G l'étant. Posons dans (1.1.2) $G^{-1}u$ pour x ; il vient

$$(1.1.4) \quad (Au, y) = (u, y)_1 \quad (u \in D(A) = R(G), y \in H_1).$$

En particulier, $(Au, u) = \|u\|_1^2 \geq \lambda \|u\|^2$; A est donc positivement définie. Évidemment $D(A) = R(G) \subset H_1$. Le lemme suivant, concernant les prolongements des opérations contenues dans A , nous sera utile dans les applications.

LEMME 1. Soit A_0 une opération contenue dans A ($A_0 \subset A$), dont

le domaine $M_0 \stackrel{\text{def}}{=} D(A_0) \subset H_1$ est dense dans H_1 au sens de $\| \cdot \|_1$. Alors A est le prolongement de A_0 par la méthode de Friedrichs.

Démonstration. Comme $A_0 \subset A$, A_0 est nécessairement symétrique et positivement définie dans M_0 , puisque l'opération A l'est. De plus, pour $x \in M_0$ on a: $\|x\|_1^2 = (Ax, x) = (A_0x, x)$. Enfin, M_0 est dense dans H_1 et, à plus forte raison, dans H (au sens de $\| \cdot \|$). Il existe alors, d'après un théorème de Friedrichs (voir [1], ou [4], n° 124, p. 327 et suiv.), un ensemble H_0 , le complément de M_0 au sens de la norme $\sqrt{(A_0x, x)} = \|x\|_1$, et une opération A_1 , le prolongement auto-adjoint de A_0 par la méthode de Friedrichs, dont le domaine $D(A_1) \subset H_0$. Mais $H_0 = H_1$, puisque $M_0 = D(A_0) \subset D(A) \subset H_1$ et que M_0 est supposé dense dans H_1 au sens de $\| \cdot \|_1$. Par conséquent l'opération A est un prolongement auto-adjoint de A_0 , dont le domaine $D(A) \subset H_0$; il s'ensuit (voir [4], p. 324) que $A = A_1$ — le prolongement auto-adjoint de A_0 par la méthode de Friedrichs. ■

1.2. Opérations non symétriques positivement définies. Soit $\Psi(x, y)$ une fonctionnelle bilinéaire sur H_1 , satisfaisant à

$$(1.2.1) \quad |\Psi(x, y)| \leq \mu \|x\|_1 \cdot \|y\|_1,$$

$$(1.2.2) \quad \Psi(x, x) \geq \alpha \|x\|_1^2$$

pour $x, y \in H_1$, avec certaines constantes $\alpha, \mu > 0$.

$\Psi(x, y)$ étant une fonctionnelle linéaire bornée de y sur H_1 pour x fixé, il existe un $Kx \in H_1$ tel que

$$(1.2.3) \quad (Kx, y)_1 = \Psi(x, y) \quad (x, y \in H_1).$$

K est évidemment une opération linéaire bornée, car (1.2.1) et (1.2.2), (1.2.3) entraînent

$$(1.2.4) \quad (a) \|Kx\|_1 \leq \mu \|x\|_1, \quad (b) (Kx, x)_1 \geq \alpha \|x\|_1^2.$$

Il découle de (1.2.4) que K est un endomorphisme de H_1 (au sens de $\| \cdot \|_1$); plus exactement

$$(1.2.5) \quad \|K^{-1}y\|_1 \leq \frac{1}{\alpha} \|y\|_1, \quad K(H_1) = H_1.$$

Posons maintenant

$$(1.2.6) \quad Bx \stackrel{\text{def}}{=} G^{-1}Kx = AKx, \quad x \in D(B) \equiv Kx \in D(G^{-1}) = R(G),$$

où G et A sont les opérations définies dans 1.1.

Nous établirons maintenant:

$$(1.2.7) \quad (a) D(B) \subset H_1, \quad (b) D(B) \text{ est dense dans } H_1 \text{ (au sens de } \| \cdot \|_1).$$

$$(1.2.8) \quad R(B) = H.$$

En effet, (1.2.7)(a) est évident, car $D(B) = K^{-1}(D(G^{-1})) = K^{-1}(R(G)) \subset H_1$, vu que $G \in L(H, H_1)$ et $K^{-1} \in L(H_1, H_1)$.

Démontrons (1.2.7)(b). Soit $y \in H_1$ et $(z, y)_1 = 0$ pour tout $z \in D(B)$, c.-à-d. pour z de la forme: $K^{-1}Gx$, où $x \in H = D(G)$. On obtient alors, en définissant $\bar{K}$ comme l'opération adjointe à K au sens de (,)₁:

$$(Kx, y)_1 = (x, \bar{K}y); \quad (x, \bar{K}^{-1}y) = (Gx, \bar{K}^{-1}y)_1 = (K^{-1}Gx, y)_1 = 0$$

pour tout $x \in H$, d'où $(\bar{K})^{-1}y = 0$, et par suite $y = 0$, $\bar{K}^{-1}$ étant aussi un homéomorphisme de H_1 . Il en découle (1.2.7)(b). ■

La conclusion (1.2.8) est évidente, car $R(B) = D(B^{-1}) = D(K^{-1}G) = H$.

Montrons maintenant qu'une autre définition de B est possible.

LEMME 2. Bx est le seul élément satisfaisant à

$$(1.2.9) \quad (Bx, y) = \Psi(x, y)$$

et le domaine de B est l'ensemble $x \in H_1$ pour lesquels $\Psi(x, y)$ est une fonctionnelle linéaire bornée de y (au sens de $\| \cdot \|$), ce que nous notons:

$$(1.2.10) \quad x \in D(B) \iff \bigwedge_{c>0} \bigwedge_{y \in H_1} |\Psi(x, y)| \leq c \|y\| \quad \text{et} \quad x \in H_1.$$

Démonstration. Soit $x \in D(B)$; alors $x = K^{-1}Gz$, $z \in H_1$ si $z \in H$. On a:

$$\begin{aligned} |\Psi(x, y)| &= |(Kx, y)_1| = |(KK^{-1}Gz, y)_1| = |(Gz, y)_1| \\ &= |(z, y)| \leq \|z\| \cdot \|y\|. \end{aligned}$$

D'autre part, si $|\Psi(x, y)| \leq c \|y\|$ pour $y \in H_1$, alors $\Psi(x, y)$ est une fonctionnelle linéaire bornée de y (au sens de $\| \cdot \|$) sur H_1 , dense dans H (au sens de $\| \cdot \|$); il existe donc un élément B_1x tel que $(B_1x, y) = \Psi(x, y)$ pour $y \in H_1$. On en tire, en vertu de (1.2.3):

$$(Kx, y)_1 = \Psi(x, y) = (B_1x, y) = (GB_1x, y)_1 \quad \text{pour} \quad y \in H_1,$$

d'où $Kx = GB_1x$, donc $x = K^{-1}GB_1x \in D(B)$. Enfin on a $B_1x = G^{-1}Kx = Bx$. ■

L'opération B , obtenue de la fonctionnelle Ψ de la façon décrite dans le lemme 2, sera dite engendrée par Ψ (l'opération $A = G^{-1}$ définie dans 1.1 est ainsi engendrée par $(x, y)_1$). On voit aussitôt que $D(B)$ est homéomorphe à $D(A)$, car $D(B) = K^{-1}R(G) = K^{-1}(D(A))$ et K est un homéomorphisme (au sens de $\| \cdot \|_1$). Remarquons enfin que (1.1.3) et (1.2.5) entraînent

$$(1.2.11) \quad \|B^{-1}x\|_1 \leq \frac{1}{\alpha\sqrt{\lambda}} \|x\| \quad (x \in H).$$

2. Opérations presque-inverses.

2.1. Soit $\Psi(x, y)$ une fonctionnelle satisfaisant aux hypothèses de 1.2, B l'opération engendrée par Ψ . Nous appellerons l'opération linéaire F_0 (avec $D(F_0) = H$) presque-inverse de B si

$$(2.1.1) \quad \|F_0Bx - x\|_1 \leq \gamma_0 \|x\|_1, \quad \text{où} \quad \gamma_0 < 1, \quad \text{pour} \quad x \in D(B).$$

En posant $x = B^{-1}y$ on tire de (2.1.1), puisque $R(B) = H$,

$$\|F_0y - B^{-1}y\|_1 \leq \gamma_0 \|y\|,$$

d'où, en vertu de (1.2.11):

$$(2.1.2) \quad \|F_0y\|_1 \leq \frac{1+\gamma_0}{\alpha\sqrt{\lambda}} \|y\| \quad (y \in H).$$

L'opération presque-inverse de B est donc bornée: $F_0 \in L(H, H_1)$.

Remarque. Si B est définie d'une façon non effective (ce qui a souvent lieu dans les applications) l'inégalité (2.1.1) peut être difficile à vérifier directement. Supposons cependant qu'une opération B_0 , contenue dans B ($B_0 \subset B$) et telle que $R(B_0)$ est dense dans H , vérifie l'inégalité: $\|F_0B_0x - x\|_1 \leq \gamma_0 \|x\|_1$ pour $x \in D(B_0)$; alors B satisfait à (2.1.1). En effet, $D(B_0^{-1}) = R(B_0)$ est dense dans $H = D(B^{-1})$, donc B^{-1} est la fermeture de B_0 au sens de l'espace $L(H, H_1)$, en vertu de (1.2.11). Par suite B est la fermeture de B_0 dans l'espace $L(H_1, H)$. Soit maintenant $x \in D(B)$; il existe alors des $x_n \in D(B_0)$ tels que

$$s_n \stackrel{\text{dt}}{=} \|x_n - x\|_1 \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \|B_0x_n - Bx\| \rightarrow 0;$$

on en tire, en vertu de (2.1.2), que $t_n \stackrel{\text{dt}}{=} \|F_0B_0x_n - F_0Bx\|_1 \rightarrow 0$, d'où

$$\begin{aligned} \|F_0Bx - x\|_1 &\leq \|F_0Bx - F_0B_0x_n\|_1 + \|F_0B_0x_n - x_n\|_1 + \|x_n - x\|_1 \\ &\leq t_n + \gamma_0 \|x_n\|_1 + s_n \leq t_n + s_n + \gamma_0 \|x\|_1 + \gamma_0 \|x_n - x\|_1 \\ &= 2s_n + t_n + \gamma_0 \|x\|_1 \quad (n = 1, 2, \dots), \end{aligned}$$

d'où (2.1.2). ■

2.2. Amélioration des opérations presque-inverses. Soient: Ψ, B la fonctionnelle et l'opération considérées plus haut, F_0 une opération presque-inverse de B , c.-à-d. telle que

$$(2.2.1) \quad \|F_0Bx - x\|_1 \leq \gamma_0 \|x\|_1 \quad \text{pour} \quad x \in D(B), \quad \text{avec un} \quad \gamma_0 < 1.$$

Or, en vertu de (2.1.2), le domaine $D(F_0B) = D(B)$ et il est dense dans H_1 ; il existe donc $V_0 = \overline{(F_0B)}$, la fermeture de F_0B au sens de $\| \cdot \|_1$. En vertu de (2.2.1) V_0 satisfait à

$$(2.2.2) \quad \|V_0x - x\|_1 \leq \gamma_0 \|x\|_1, \quad (x \in H_1), \quad \|V_0 - I\|_1 \leq \gamma_0.$$

Définissons les opérations V_n et F_n par récurrence, en posant

$$(2.2.3) \quad V_{n+1} = -V_n^2 + 2V_n, \quad F_{n+1} = -V_n F_n + 2F_n.$$

THÉORÈME 1. Les opérations F_n ainsi définies satisfont à

$$(2.2.4) \quad \|F_n Bx - x\|_1 \leq \gamma_0^{(2^n)} \cdot \|x\|_1,$$

$$(2.2.5) \quad \|F_n x\|_1 \leq C_1 \|x\|, \quad C_1 = \frac{1 + \gamma_0}{\alpha \sqrt{\lambda}} \prod_{i=1}^{\infty} (1 + \gamma_0^{(2^i)}),$$

$$(2.2.6) \quad \|F_n y - B^{-1}y\|_1 \leq \frac{\gamma_0^{(2^n)}}{\alpha \sqrt{\lambda}} \|y\| \quad (y \in H).$$

Démonstration. On a d'abord

$$(a) \quad F_n Bx = V_n x \quad \text{pour } x \in D(B).$$

En effet, si $x \in D(B)$, on a $x \in D(F_0 B)$, d'où $V_0 x = (F_0 B)x = F_0 Bx$; donc

(a) subsiste pour $n = 0$. Supposons (a) vrai pour n ; alors on a pour $x \in D(B)$:

$$F_{n+1} Bx = -V_n F_n Bx + 2F_n Bx = -V_n V_n x + 2V_n x = V_{n+1} x.$$

Prouvons maintenant

$$(b) \quad \|V_n - I\|_1 \leq \gamma_0^{(2^n)}.$$

On a, par la définition de V_n :

$$\|V_{n+1} - I\|_1 = \|-V_n^2 + 2V_n - I\|_1 = \|(V_n - I)^2\|_1 \leq \|V_n - I\|_1^2,$$

d'où résulte (b) par une récurrence facile. Les formules (a) et (b) entraînent (2.2.4). Posons

$$(c) \quad \mu_n \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\|x\|_1 < 1} \|F_n x\|_1.$$

On tire de (2.1.2) $\mu_0 \leq (1 + \gamma_0)(\alpha \sqrt{\lambda})^{-1}$. Évaluons μ_n ; on a d'abord

$$\|F_{n+1} x - F_n x\|_1 = \|-V_n F_n x + F_n x\|_1 \leq \|V_n - I\|_1 \cdot \|F_n x\|_1 \leq \gamma_0^{(2^n)} \|F_n x\|_1$$

d'où

$$\|F_{n+1} x\|_1 \leq [1 + \gamma_0^{(2^n)}] \|F_n x\|_1 \leq [1 + \gamma_0^{(2^n)}] \mu_n \|x\|,$$

donc

$$(d) \quad \mu_{n+1} \leq [1 + \gamma_0^{(2^n)}] \mu_n \leq \prod_{i=1}^{\infty} [1 + \gamma_0^{(2^i)}] \mu_0, \quad \text{d'où résulte (2.2.5).}$$

Enfin on obtient (2.2.6) de (2.2.4) et (1.2.11), en posant $x = B^{-1}y$. ■

3. Modification d'une opération.

3.1. Soient $\Psi_i(x, y)$ les fonctionnelles bilinéaires décrites dans 1.2, B_i les opérations engendrées par Ψ_i ($i = 1, 2$), K_i les endomorphismes de H_1

définis par l'équation

$$(K(x)y)_1 = \Psi(x, y) \quad (x, y \in H_1).$$

Supposons que les Ψ_i satisfont à (1.2.1) et (1.3.2) avec les mêmes constantes $\mu\alpha$ et que de plus:

$$(3.1.1) \quad |\Psi_1(x, y) - \Psi_2(x, y)| \leq \delta \|x\|_1 \cdot \|y\|_1 \quad (x, y \in H_1)$$

ce qui équivaut à

$$(3.1.2) \quad \|K_1 x - K_2 x\|_1 \leq \delta \|x\|_1 \quad (x \in H_1).$$

Soient, comme dans 1.2, $B_i = G^{-1}K_i$ ($i = 1, 2$), avec G défini dans 1.1. Démontrons le

LEMME 3. Si l'opération $F_0 \in L(H, H_1)$ satisfait à

$$(3.1.3) \quad \|F_0 B_1 x - x\|_1 \leq \gamma_0 \|x\|_1, \quad x \in D(B_1),$$

alors

$$(3.1.4) \quad \|F_0 B_2 y - y\|_1 \leq \alpha^{-1}(\gamma_0 \mu + \delta) \|y\|_1 \quad (y \in D(B_2)).$$

Démonstration. Soit $y \in D(B_2) = D(G^{-1}K_2)$, c.-à-d. $K_2 y \in R(G)$. Nous avons:

$$B_1^{-1}B_2 y = K_1^{-1}GG^{-1}K_2 y = K_1^{-1}K_2 y,$$

d'où, en vertu de (1.2.5) et (3.1.2), on tire

$$(a) \quad \|B_1^{-1}B_2 y - y\|_1 = \|K_1^{-1}(K_2 y - K_1 y)\|_1 \leq \frac{1}{\alpha} \|K_2 y - K_1 y\|_1 \leq \alpha^{-1} \delta \|y\|_1.$$

On obtient de (a) et de (3.1.3), en posant $B_1^{-1}B_2 y$ pour x :

$$\begin{aligned} \|FB_2 y - y\|_1 &\leq \|FB_1 B_1^{-1}B_2 y - B_1^{-1}B_2 y\|_1 + \|B_1^{-1}B_2 y - y\|_1 \\ &\leq \gamma_0 \|B_1^{-1}B_2 y\|_1 + \alpha^{-1} \delta \|y\|_1 \leq (\alpha^{-1} \gamma_0 \mu + \alpha^{-1} \delta) \|y\|_1, \end{aligned}$$

car, en vertu de (1.2.4) et (1.2.5), $\|B_1^{-1}B_2 y\|_1 \leq \alpha^{-1} \mu \|y\|_1$. ■

Un simple corollaire de lemme 3 est le

THÉORÈME 2. Si l'on ajoute aux hypothèses du lemme 1 l'inégalité suivante supposée vérifiée par les constantes:

$$(3.1.5) \quad \alpha^{-1}(\gamma_0 \mu + \delta) < 1,$$

l'opération F presque-inverse de B_1 est en même temps une presque-inverse de B_2 .

Remarque. Soient Ψ, Φ des fonctionnelles bilinéaires satisfaisant aux hypothèses de 1.1 (avec les mêmes constantes α, μ), B et C les opérations engendrées par Ψ, Φ , resp. Alors, si F_0 satisfait à

$$(a) \quad \|F_0 Bx - x\|_1 \leq \gamma_0 \|x\|_1 \quad \text{avec } \gamma_0 < 1,$$

on peut en obtenir une opération presque-inverse de C dans un nombre fini de pas — opérations algébriques effectuées sur les opérations F_0, B, C . Dans ce but choisissons un nombre naturel p tel que

$$(b) \quad |\Psi(x, y) - \Phi(x, y)| \leq p \frac{\alpha}{4} \|x\|_1 \|y\|_1$$

et posons :

$$(c) \quad \Psi_0 = \Psi, \quad \Psi_k = \Psi + \frac{k}{p}(\Phi - \Psi) \quad (k = 0, 1, \dots, p).$$

Alors on a :

$$(d) \quad |\Psi_{k+1}(x, y) - \Psi_k(x, y)| \leq \delta \|x\|_1 \|y\|_1, \quad \delta \stackrel{\text{ar}}{=} \frac{\alpha}{4}.$$

Soit F_0 une presque-inverse de B , satisfaisant à (a), et supposons que

$$(e) \quad \|F_k B_k x - x\|_1 \leq \frac{\alpha}{4\mu} \|x\|_1 \quad (x \in D(B_n)),$$

où B_k est engendrée par Ψ_k , $k = 0, 1, \dots, p$. Alors (d) et (e) entraînent

$$(f) \quad \|F_k B_{k+1} x - x\|_1 \leq \frac{1}{\alpha} (\gamma_0 \mu + \delta) \|x\|_1 \\ = \frac{1}{2} \|x\|_1 \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\alpha}{4\mu} \cdot \mu + \frac{\alpha}{4} \right) \|x\|_1 = \frac{1}{2} \|x\|_1 \quad (x \in D(B_{k+1}))$$

en vertu du lemme 3.

Posons encore $F_{k,0} = F_k$ et soient $F_{k,n}$ les opérations obtenues de $F_{k+1,0}$ par le procédé d'amélioration décrit au point 2.2. Alors, d'après le théorème 1, on obtient, pour n assez grand,

$$\|F_{k,n} B_{k+1} x - x\|_1 \leq \left(\frac{1}{2} \right)^n \|x\|_1 \leq \frac{\alpha}{4\mu} \|x\|_1$$

pour $x \in D(B_{k+1})$, donc (e) est vrai pour $k = 1$ si l'on pose $F_{k+1} = F_{k,n}$. On obtient ainsi, après un nombre fini de tels pas,

$$\|F_p C x - x\|_1 \leq \frac{1}{2} \|x\|_1 \quad \text{pour} \quad x \in D(C),$$

puisque $\Psi_p = C$. ■

4. Applications à des opérations aux dérivées partielles.

4.1. Définitions et hypothèses. Soit E^m l'espace euclidien à m dimensions; ses éléments seront désignés par $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$, $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_m)$, etc.; soit $\xi \circ \eta = \sum_{i=1}^m \xi_i \cdot \eta_i$ le produit scalaire dans E^m . Soit Ω un sous-ensemble ouvert borné de E^m , dont le bord Γ est assez régulier pour que

les constructions décrites dans la suite soient possibles à réaliser, p.ex. on peut supposer que le verseau normal extérieur est de classe $C_p^{(1)}$. Soit $H = L_0^2$; les éléments de H sont alors des fonctions $u(\xi), v(\xi)$, $\xi \in \Omega$, à valeurs réelles, telles que l'intégrale $\int_{\Omega} |u(\xi)|^2 d\xi$ existe. Admettons les définitions :

$$(4.1.1) \quad (u, v) = \int_{\Omega} u(\xi) v(\xi) d\xi \quad (u, v \in H), \quad \|u\| = \sqrt{(u, u)},$$

$$(4.1.2) \quad u \in M \equiv u \in C_0^{(2)} \quad \text{et} \quad u(\xi)|_{\Gamma_1} \equiv 0,$$

$$(4.1.3) \quad u \in M_0 = u \in M \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} |_{\Gamma_2} \equiv 0.$$

On entend ici par $C_0^{(2)}$ la classe des fonctions qui admettent un prolongement uniformément continu sur $\bar{\Omega}$, où $C_0^{(2)}$ désigne la classe des fonctions à dérivées secondes continues sur Ω , Γ_i sont deux parties disjointes de Γ telles que $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Posons encore, pour $u, v \in M$,

$$(4.1.4) \quad (u, v)_1 = \int_{\Omega} \text{grad } u \circ \text{grad } v d\xi = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^m \frac{\partial u}{\partial \xi_i} \frac{\partial v}{\partial \xi_i} d\xi, \quad \|u\|_1 = \sqrt{(u, u)_1}.$$

et admettons que

$$(4.1.5) \quad \|u\|_1^2 \geq \lambda \|u\|^2 \quad \text{pour} \quad u \in M \quad \text{avec} \quad \lambda > 0.$$

4.2. Nous donnerons maintenant une condition suffisante pour que (4.1.5) subsiste.

LEMME 4. Admettons les notations de 4.1; nous désignerons les suites $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{m-1}$ (seulement dans ce lemme 4) par $\bar{\xi}$ et l'ensemble des points de E^m de la forme $(\xi_1, \dots, \xi_{m-1}, 0) = (\bar{\xi}, 0)$ par $\bar{E}$. Enfin, soit Σ_0 la projection de Ω sur $\bar{E}$.

HYPOTHÈSE (i). Pour $t \in E^{(1)} \langle \xi; t \rangle = \langle \xi_1, \dots, \xi_{m-1}, t \rangle \in \bar{\Omega}$ équivaut à : $0 \leq \varphi(\bar{\xi}) \leq t \leq \varphi(\xi) \leq c$, où les fonctions réelles φ, ψ sont continues.

Dans ces conditions (4.1.5) a lieu avec $\lambda = c^{-2}$.

Démonstration. Soit $\xi = \langle \bar{\eta}, t \rangle \in \bar{\Omega}$, c.-à-d. $0 \leq \varphi(\bar{\eta}) \leq t \leq \varphi(\bar{\eta}) \leq c$. Alors nous avons :

$$|u(\xi)| = |u(\bar{\eta}, t)| = \left| \int_{\varphi(\bar{\eta})}^t \frac{\partial}{\partial s} u(\bar{\eta}, s) ds \right| \leq \left| \int_{\varphi(\bar{\eta})}^t \frac{\partial}{\partial s} u(\bar{\eta}, s) ds \right| \\ \leq \sqrt{t} \left\{ \int_{\varphi(\bar{\eta})}^t \left| \frac{\partial}{\partial s} u(\bar{\eta}, s) \right|^2 ds \right\}^{1/2} \leq c \left\{ \int_{\varphi(\bar{\eta})}^{\varphi(\bar{\eta})} \left| \frac{\partial}{\partial s} u(\bar{\eta}, s) \right|^2 ds \right\}^{1/2},$$

d'où (a) :

$$(a) \quad |u(\bar{\eta}, t)|^2 \leq c \int_{\varphi(\bar{\eta})}^{\varphi(\bar{\eta})} \left| \frac{\partial}{\partial s} u(\bar{\eta}, s) \right|^2 ds.$$

On en tire:

$$\begin{aligned} \|u\|^2 &= \int_{\Omega} |u(\xi)|^2 d\xi = \int_{\varphi(\bar{\Omega})} \int_{x_0}^{\varphi(\bar{\eta})} |u(\bar{\eta}, t)|^2 d\bar{\eta} dt \\ &\leq c \int_{\varphi(\bar{\Omega})} \left[\int_{x_0}^{\varphi(\bar{\eta})} \left| \frac{\partial}{\partial s} u(\bar{\eta}, s) \right|^2 ds d\bar{\eta} \right] d\bar{\eta} \\ &= c \int_{\varphi(\bar{\Omega})} \int_{\bar{\Omega}} \left| \frac{\partial}{\partial \xi_n} u(\xi_1, \dots, \xi_n) \right|^2 d\xi d\bar{\eta} \leq c \int_{\varphi(\bar{\Omega})} \|u\|_1^2 d\bar{\eta} = c^2 \|u\|^2. \blacksquare \end{aligned}$$

4.3. Construction de l'ensemble H_1 .

LEMME 5. L'ensemble M_0 défini par (4.1.3) est dense dans M au sens de la norme $\|\cdot\|_1$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$; désignons par Γ_s ($0 \leq s \leq \varepsilon$) une famille de surfaces parallèles à $\Gamma = \Gamma_0$, par $\xi(s, \sigma)$ ($s \in \langle 0, \varepsilon \rangle$, $\sigma \in \Gamma$) la famille des trajectoires orthogonales à Γ_s . Soit encore Ω_ε l'ensemble borné par Γ_ε ; désignons (seulement dans ce lemme) par $\Omega \setminus \Omega_\varepsilon$ $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \rightarrow \psi(\xi) = \langle s, \sigma \rangle$ une transformation de classe $C^{(2)}$ localement orthonormale des coordonnées $\xi_1, \dots, \xi_n$ en $\langle s, \sigma \rangle$, engendrée par les Γ_s et $\xi(s, \sigma)$, définie sur $\Omega \setminus \Omega_\varepsilon$ pour $\varepsilon > 0$ fixé suffisamment petit. Pour une fonction $u \in M$ soit $\bar{u}(s, \sigma)$ la fonction résultant de $u(\xi)$ par la transformation ψ des coordonnées. Il vient donc (en posant $\frac{\partial u}{\partial \xi} = \left(\frac{\partial u}{\partial \xi_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial \xi_n} \right) = \text{grad } u$):

$$(a) \quad |\text{grad } u(s)|^2 = \left| \frac{\partial u}{\partial s} \right|^2 = \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial s} \right|^2 + \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial \sigma} \right|^2,$$

$$(b) \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\xi \in \Gamma} = \frac{\partial \bar{u}(s, \sigma)}{\partial s} \Big|_{s=0},$$

$$(c) \quad u(s)|_{\xi \in \Gamma} = \bar{u}(0, \sigma).$$

ε étant fixé, soit $f(s)$ une fonction réelle de classe $C^{(2)}$ sur $\langle 0, \varepsilon \rangle$, remplissant les conditions

$$(d) \quad f(s) = \begin{cases} 1, & 0 \leq s \leq \frac{1}{3}\varepsilon, \\ 0, & \frac{2}{3}\varepsilon \leq s \leq \varepsilon, \end{cases}$$

$$(e) \quad 0 \leq f(s) \leq 1, \quad \frac{1}{3}\varepsilon \leq s \leq \frac{2}{3}\varepsilon,$$

$$(f) \quad \left| \frac{\partial}{\partial s} f(s) \right| \leq 5\varepsilon^{-1}.$$

Une telle fonction est facile à trouver. Posons

$$(g) \quad \bar{u}_\varepsilon(s, \sigma) \stackrel{\text{def}}{=} f(s)\bar{u}(0, \sigma) + [1 - f(s)]\bar{u}(s, \sigma).$$

Définissons la fonction $u_\varepsilon(\xi)$ comme il suit:

(h) pour $\xi \in \Omega \setminus \Omega_\varepsilon$ $u_\varepsilon(\xi)$ résulte de $\bar{u}_\varepsilon(s, \sigma)$ par une transformation de (s, σ) en $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ au moyen de ψ^{-1} ;

(i) pour $\xi \in \Omega_\varepsilon$ $u_\varepsilon(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} u(\xi)$.

Montrons d'abord que $u_\varepsilon \in C_0^{(2)}$; en effet, il découle de la construction de $u_\varepsilon(\xi)$ qu'elle est de classe $C^{(2)}$ sur $\Omega \setminus \Omega_\varepsilon$ (ce qui correspond au segment $0 \leq s \leq \varepsilon$). D'autre part, en vertu de (g) et (d), $u_\varepsilon(\xi)$ coïncide avec $u(\xi)$, non seulement sur Ω_ε , mais aussi sur $\Omega \setminus \Omega_{\frac{2}{3}\varepsilon}$ (car $\bar{u}_\varepsilon(s, \sigma) = \bar{u}(s, \sigma)$ pour $\frac{2}{3}\varepsilon \leq s \leq \varepsilon$), d'où notre assertion. Ensuite on a $u_\varepsilon(0, \sigma) = \bar{u}(0, \sigma)$, donc $u_\varepsilon(\xi)|_{\xi \in \Omega} = u(\xi)|_{\xi \in \Omega}$, par conséquent $u(\xi) = 0$ pour $\xi \in \Gamma_1$.

De plus $\frac{\partial u}{\partial \nu} u_\varepsilon(\xi) = \frac{\partial}{\partial s} \bar{u}_\varepsilon(s, \sigma)|_{s=0} = 0$. On a donc finalement $u_\varepsilon \in M_0$. Il ne reste qu'à évaluer $\|u_\varepsilon - u\|_1$; or, on a d'abord, pour $0 \leq s \leq \varepsilon$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial s} \bar{u}_\varepsilon(s, \sigma) \right| &= \left| f'(s)[\bar{u}(0, \sigma) - \bar{u}(s, \sigma)] + (1 - f(s)) \frac{\partial}{\partial s} \bar{u}(s, \sigma) \right| \\ &\leq 5\varepsilon^{-1}c_2|s| + \sup_{s, \sigma} \left| \frac{\partial}{\partial s} \bar{u}(s, \sigma) \right| \leq 5c_2 + c_3 = c_4, \end{aligned}$$

car $u(s, \sigma)$ remplit la condition de Lipschitz et $\bar{u}(s, \sigma)$ est bornée. D'autre part

$$\left| \frac{\partial}{\partial \sigma} \bar{u}(s, \sigma) \right| = \left| f(s) \frac{\partial}{\partial \sigma} \bar{u}(0, \sigma) + (1 - f(s)) \frac{\partial}{\partial \sigma} \bar{u}(s, \sigma) \right| \leq c_5,$$

car $\bar{u}(s, \sigma) \in C^{(2)}$.

On en tire:

$$\left| \frac{\partial}{\partial \xi} u_\varepsilon(\xi) \right|^2 = \left| \frac{\partial}{\partial s} \bar{u}_\varepsilon(s, \sigma) \right|^2 + \left| \frac{\partial}{\partial \sigma} \bar{u}_\varepsilon(s, \sigma) \right|^2 \leq c_4^2 + c_5^2 = c_6$$

pour $\xi \in \Omega \setminus \Omega_\varepsilon$. Enfin

$$\left| \frac{\partial}{\partial \xi} u(s) \right|^2 \leq c_7 \quad \text{pour} \quad \xi \in \Omega \setminus \Omega_\varepsilon.$$

Il en résulte, vu que $u_\varepsilon(\xi) = u(\xi)$ pour $\xi \in \Omega_\varepsilon$:

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon - u\|_1^2 &= \int_{\Omega \setminus \Omega_\varepsilon} \left| \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \xi} \right|^2 d\xi \leq \int_{\Omega \setminus \Omega_\varepsilon} \left\{ \sup_{\xi} \left| \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \xi} \right| + \sup_{\xi} \left| \frac{\partial u}{\partial \xi} \right| \right\} d\xi \\ &\leq (c_6 + c_7) \text{mes}(\Omega \setminus \Omega_\varepsilon) \rightarrow 0 \text{ si } \varepsilon \rightarrow 0. \blacksquare \end{aligned}$$

4.3. Définition de l'opération A et construction de l'ensemble H_1 .

Posons :

$$A_0 u = -\Delta u = -\sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_i^2} \quad (u \in M_0).$$

En vertu de l'identité suivante (4.3.1) A est symétrique :

$$(4.3.1) \quad \int_{\Omega} \text{grad } u \circ \text{grad } v \, d\xi + \int_{\Omega} \Delta u v \, d\xi = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} v \, d\xi \quad (u, v \in C_n^{(2)}).$$

Admettons que Ω satisfait aux hypothèses du lemme 4. Alors

$$(4.3.2) \quad (A_0 u, u) = \|u\|_1^2 \geq \lambda \|u\|^2 \quad \text{pour } u \in M_0,$$

ce qui découle de (4.3.1). L'opération A_0 est donc symétrique et positivement définie sur l'ensemble M_0 , qui est dense dans $L_D^2 = H$ (cette dernière assertion, facile à démontrer, est établie p.ex. dans [3]). En vertu du théorème de Friedrichs (voir [1] ou [4]) il existe donc un ensemble H_1 complet au sens de $\|\cdot\|_1$ et une opération auto-adjointe $A_1 \supset A_0$, dont le domaine $D(A_1)$ est dense dans H_1 au sens de $\|\cdot\|_1$. En vertu du lemme 5 $H_1 \supset M$ et M est dense dans H_1 au sens de $\|\cdot\|_1$; par conséquent, en vertu du lemme 1, l'opération A_1 est égale à A , engendrée par $\Phi(x, y) = (x, y)_1$.

5. Modification de l'ensemble Ω .

5.1. Admettons que $E^m, \Omega, \Gamma, \Gamma_i$ ($i = 1, 2$) ont le même sens que dans 4, et soit Q un autre sous-ensemble ouvert de E^m , dont le bord est $S = S_1 \cup S_2, S_i$ étant deux parties disjointes de S . Aux ensemble Ω et Q nous attacherons certaines notions, espaces de fonctions et opérations, que nous munirons des indices Ω et Q respectivement. Soit alors $H_\Omega = L_\Omega^2$ ($H_Q = L_Q^2$) l'ensemble des fonctions de carré sommable sur Ω (resp. Q) :

$$(5.1.1) \quad (u, v)_\Omega = \int_{\Omega} u(\xi) v(\xi) \, d\xi, \quad (x, y)_Q = \int_Q x(\eta) y(\eta) \, d\eta,$$

$$(5.1.2) \quad u \in M_\Omega \equiv u \in C_\Omega^{(2)} \text{ et } u(\xi)|_{\Gamma_1} = 0, \quad u \in M_{\Omega, \Omega} \equiv u \in M_\Omega \wedge \left. \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|_{\Gamma_2} = 0,$$

$$(5.1.3) \quad x \in M_Q \equiv x \in C_Q^{(2)} \text{ et } x(\eta)|_{S_1} = 0, \quad x \in M_{0, Q} \equiv x \in M_Q \wedge \left. \frac{\partial x}{\partial \nu} \right|_{S_2} = 0,$$

$$(5.1.4) \quad (u, v)_1 = \int_{\Omega} \text{grad } u(\xi) \text{grad } v(\xi) \, d\xi,$$

$$(x, y)_2 = \int \text{grad } x(\eta) \text{grad } y(\eta) \, d\eta \quad \text{et} \quad \|u\|_1^2 = (u, u)_1, \quad \|x\|_2^2 = (x, x)_2.$$

Admettons, comme plus haut, que

$$(5.1.5) \quad \|u\|_1^2 \geq \lambda \|u\|^2 \quad (\text{pour } u \in M_\Omega).$$

5.2. Supposons qu'il existe un difféomorphisme φ de classe $C^{(2)}$ transformant Ω sur Q et satisfaisant aux conditions :

$$(5.2.1) \quad \Omega \ni \xi \rightarrow \eta = \varphi(\xi) \in Q \equiv \eta_i = \varphi_i(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \quad (i = 1, 2, \dots, m) \\ \equiv \xi_j = \psi_j(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m) \quad (\text{c.-à-d. } \psi = \varphi^{-1}),$$

$$(5.2.2) \quad \sum_{i=1}^m \left[\sum_{k=1}^m \frac{\partial \varphi_k}{\partial \xi_i} t_k \right]^2 \leq c_1 \sum_{i=1}^m t_i^2 \quad \text{pour tous } t_1, t_2, \dots, t_m \text{ réels,}$$

$$(5.2.3) \quad \sum_{j=1}^m \left[\sum_{k=1}^m \frac{\partial \psi_k}{\partial \eta_j} s_j \right]^2 \leq c_2 \sum_{j=1}^m s_j^2 \quad \text{pour } s_1, \dots, s_m \text{ réels,}$$

$$(5.2.4) \quad S_i = \varphi(\Gamma_i), \quad i = 1, 2.$$

Définissons au moyen de φ une transformation $\Phi \in L(H_Q, H_\Omega)$

$$(5.2.5) \quad H_Q \ni x \rightarrow \Phi(x) = u \stackrel{\text{dt}}{=} u(\xi) = x(\varphi(\xi)).$$

Évidemment Φ est un homéomorphisme de $H_Q = L_Q^2$ sur $L_\Omega^2 = H_\Omega$.

Nous démontrerons même un peu plus, à savoir que :

$$(5.2.6) \quad (a) \quad \|\Phi(x)\|_\Omega^2 \leq \mu_2 \|x\|_Q^2, \quad (b) \quad \|\Phi^{-1}u\|_Q^2 \leq \mu_1 \|u\|_\Omega^2,$$

$$(5.2.7) \quad (a) \quad \|\Phi(x)\|_1^2 \leq \lambda_1 \|x\|_2^2, \quad (b) \quad \|\Phi^{-1}u\|_2^2 \leq \lambda_2 \|u\|_1^2$$

où

$$\mu_1 = \sup_{\xi \in \Omega} \left| \left[\frac{D\varphi}{D\xi} \right] \right|, \quad \mu_2 = \sup_{\eta \in Q} \left| \left[\frac{D\psi}{D\eta} \right] \right|, \quad \lambda_1 = c_1 \mu_2, \quad \lambda_2 = c_2 \mu_1;$$

c_i sont les constantes intervenant dans (5.2.2) et (5.2.3), $\left[\frac{D\varphi}{D\xi} \right]$ est

le déterminant de Jacobi. En effet, (5.2.6) (a) et (b) sont évidentes; démontrons donc (5.2.7). Nous avons pour $x \in M_Q$:

$$\begin{aligned} \|\Phi(x)\|_1^2 &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^m \left| \frac{\partial}{\partial \xi_i} x(\varphi(\xi)) \right|^2 d\xi = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^m \left| \sum_{k=1}^m \frac{\partial x}{\partial \eta_k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial \xi_i} \right|_{\eta_k|\varphi_k(\xi)}^2 \\ &\leq c_1 \int_{\Omega} \sum_{k=1}^m \left| \frac{\partial x(\eta)}{\partial \eta_k} \right|_{\eta_k|\varphi_k(\xi)}^2 d\xi = c_1 \int_Q \sum_{k=1}^m \left| \frac{\partial x}{\partial \eta_k} \right|^2 \cdot \left| \left[\frac{D\psi}{D\eta} \right] \right| d\eta \\ &\leq c_1 \sup_{\eta} \left| \left[\frac{D\psi}{D\eta} \right] \right| \cdot \|x\|_2^2. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Dans la démonstration nous avons profité de (5.2.2); la démonstration de (5.2.7) (b) est tout à fait analogue et s'appuie sur (5.2.3). Comme simples conséquences de (5.2.6) et (5.2.7) on obtient:

$$(5.2.8) \quad \|x\|_2^2 \geq \frac{1}{\lambda_1 \mu_2} \|x\|_Q^2,$$

$$(5.2.9) \quad \frac{1}{\lambda_2} \|x\|_2^2 \leq \|\Phi(x)\|_1^2 \leq \lambda_1 \|x\|_2^2.$$

5.3. Soient $A_0 u = -Au = -\sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ pour $u \in M_{0,Q}$ et pareillement $C_0 x = -Ax$ pour $x \in M_{0,Q}$; soient ensuite A et C les prolongements auto-adjoints de A_0 et C_0 par la méthode de Friedrichs, tout comme dans 4.3, $H_{1,Q}$ et $H_{1,Q}$ les compléments correspondants de $M_{0,Q}$ et $M_{0,Q}$ en normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$, resp. Alors, comme on l'a remarqué dans 4.3 les ensembles M_Q et M_Q sont contenus dans $H_{1,Q}$ ($H_{1,Q}$) et y sont denses. Mais comme φ et $\psi = \varphi^{-1}$ sont de classe $C^{(2)}$, l'opération Φ transforme, en vertu de (5.2.4), M_Q sur M_Q biunivoquement; de plus, en vertu de (5.2.7) (a) et (b), Φ et Φ^{-1} sont bornées au sens des normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$; comme M_Q (resp. M_Q) est dense dans $H_{1,Q}$ (resp. $H_{1,Q}$) au sens de la norme $\|\cdot\|_1$ (resp. $\|\cdot\|_2$), il résulte de ce que nous venons de dire:

LEMME 6. Φ est un homéomorphisme de $H_{1,Q}$ sur $H_{1,Q}$ au sens de $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$.

Revenons aux opérations A_0 , C_0 et à leurs prolongements auto-adjoints A et B . Les domaines $D(A_0)$ ou $D(C_0)$ étant denses dans $H_{1,Q}$, resp. $H_{1,Q}$ en vertu de ce que nous avons établi plus haut, il en résulte, d'après le lemme 1, que A et C sont engendrées par $(u, v)_1$, resp. $(x, y)_2$, ce que nous noterons:

$$(5.3.1) \quad (Au, v)_Q = (u, v)_1, \quad u \in D(A), \quad x \in H_{1,Q},$$

$$(5.3.2) \quad (Cx, y)_Q = (x, y)_2, \quad x \in D(C), \quad y \in H_{1,Q}.$$

Nous indiquerons maintenant une méthode permettant d'obtenir une presque-inverse de C en partant d'une presque-inverse de A . Dans ce but posons:

$$(5.3.3) \quad \Psi(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} (\Phi x, \Phi y)_1, \quad (x, y \in H_{1,Q}).$$

De (5.2.7) (a) et (b) on obtient:

$$(5.3.4) \quad |\Psi(x, y)| \leq \lambda_1 \|x\|_2 \|y\|_2,$$

$$(5.3.5) \quad \Psi(x, x) \geq \lambda_2^{-1} \|x\|_2^2.$$

Ψ satisfait alors à (1.2.4) si l'on pose $\mu = \lambda_1$, $\alpha = \lambda_2^{-1}$.

Soit U l'opération engendrée par $\Psi(x, y)$, c.-à-d.

$$(5.3.6) \quad (Ux, y)_Q = \Psi(x, y), \quad x \in D(U), \quad y \in H_{1,Q}$$

où

$$x \in D(U) \Leftrightarrow |\Psi(x, y)| \leq C \|y\|_Q \quad (y \in H_{1,Q})$$

pour une constante C (dépendant de x). Il s'ensuit que

$$x \in D(U) \Leftrightarrow |(\Phi x, \Phi y)_1| \leq C \|y\|_Q$$

pour tout $y \in H_{1,Q}$, ou bien, ce qui revient au même, $|(\Phi x, v)_1| \leq C \|v\|_1$, Φ étant un homéomorphisme de $H_{1,Q}$ sur $H_{1,Q}$ et à la fois de H_Q sur H_Q . Mais cette dernière inégalité signifie que $\Phi(x) \in D(A)$ et on a:

$$(Ux, y)_Q \stackrel{\text{def}}{=} \Psi(x, y) = (\Phi x, \Phi y)_1 = (A \Phi x, \Phi y)_Q = (\Phi^* A \Phi x, y)_Q,$$

d'où

$$(5.3.7) \quad Ux = \Phi^* A \Phi x,$$

Φ^* désigne comme d'habitude, l'opération définie par

$$(5.3.8) \quad (\Phi x, u)_Q = (x, \Phi^* u)_Q \quad (x \in H_Q, u \in H_Q).$$

Définissons Φ par l'identité

$$(5.3.9) \quad (\Phi x, u)_1 = (x, \Phi u)_2, \quad x \in H_{1,Q}, u \in H_{1,Q}.$$

Alors on a:

$$(5.3.10) \quad \|\Phi \Phi x - x\|_2 \leq \delta \|x\|_2, \quad \text{où} \quad \delta = \max(\lambda_1 - 1, \lambda_2^{-1} - 1), \quad x \in H_{1,Q}.$$

En effet, en vertu de (5.2.9), il vient

$$|(\Phi \Phi x - x, x)_2| = \|\Phi x\|_1^2 - \|x\|_2^2 \leq \delta \|x\|_2^2$$

d'où résulte (5.3.10), puisque $\Phi \Phi$ est symétrique au sens de $(\cdot, \cdot)_2$. De (5.3.10) découle

$$(5.3.11) \quad |\Psi(x, y) - (x, y)_2| \leq \delta \|x\|_2 \|y\|_2$$

car

$$|\Psi(x, y) - (x, y)_2| = |(\Phi x, \Phi y)_1 - (x, y)_2| = |(\Phi \Phi x - x, y)_2| \leq \delta \|x\|_2 \|y\|_2.$$

Notons encore qu'on tire de (5.2.6) et (5.2.7)

$$(5.3.12) \quad (a) \quad |\Psi(x, y)| \leq \lambda_1 \|x\|_2 \|y\|_2, \quad (b) \quad \Psi(x, x) \geq \lambda_2^{-1} \|x\|_2^2.$$

Conservant les notations admises ci-dessus, nous établirons le

THÉORÈME 3. Si l'opération $G_0 \in L(H_Q, H_{1,Q})$ satisfait à

$$(i) \quad \|G_0 A u - u\|_1 \leq \gamma_0 \|u\|_1 \quad \text{pour} \quad u \in D(A),$$

alors l'opération $F_0 \stackrel{\text{def}}{=} \Phi^{-1} G_0 (\Phi^*)^{-1}$ satisfait à

$$(ii) \quad \|F_0 Cx - w\|_2 \leq \gamma_2 \|w\|_2 \quad \text{pour } w \in D(C),$$

où $\gamma_2 = \alpha^{-1}(\gamma, \mu + \delta)$, $\mu = \max(\lambda_1, 1)$, $\alpha = \min(\lambda_2^{-1}, 1)$, $\gamma_1 = \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \gamma_0$, $\delta = \max(\lambda_1 - 1, \lambda_2^{-1} - 1)$ et λ_i, μ_i sont les constantes définies dans 5.2.

Démonstration. Prouvons d'abord que

$$(a) \quad \|F_0 Ux - w\|_2 \leq \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \gamma_0 \|w\|_2 \quad \text{pour } w \in D(U).$$

En effet, en vertu de (5.3.7) on a

$$\begin{aligned} \|F_0 Ux - w\|_2 &= \|\Phi^{-1} G_0 (\Phi^*)^{-1} \Phi^* A \Phi x - w\|_2 = \|\Phi^{-1} [G_0 A \Phi x - \Phi w]\|_2 \\ &\leq \sqrt{\lambda_2} \|G_0 A \Phi x - \Phi w\|_1 \leq \sqrt{\lambda_2} \gamma_0 \|\Phi w\|_1 \leq \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \gamma_0 \|w\|_2, \end{aligned}$$

en tenant aussi compte de (5.2.7).

D'autre part, les opérations U, C sont engendrées par $\Psi(x, y) = (\Phi x, \Phi y)_1$ et $(x, y)_2$, respectivement; posons dans le lemme 3 point 3.1: $\Psi(x, y)$ pour $\Psi_1(x, y)$, $(x, y)_2$ pour $\Psi_2(x, y)$, $(x, y)_2$ pour $(x, y)_1$, $\max(\lambda_1, 1)$ pour μ , $\min(\lambda_2^{-1}, 1)$ pour α , $\max(\lambda_1 - 1, \lambda_2^{-1} - 1)$ pour δ , γ_1 pour γ_0 , F_0 pour F_0 . Les hypothèses du lemme 3 étant ainsi vérifiées, on obtient:

$$(b) \quad \|F_0 Cx - w\|_2 \leq \alpha^{-1}(\gamma, \mu + \delta) \|w\|_2. \quad \blacksquare$$

COROLLAIRE. Si le nombre $\alpha^{-1}(\gamma, \mu + \delta) < 1$, F_0 est une presque-inverse de $C = -A$. Sinon, on peut obtenir une presque inverse de C en utilisant la remarque du point 3.1 (faisant suite au théorème 2).

Travaux cités

- [1] K. Friedrichs, *Spektraltheorie halbbeschränkter Operatoren u. Anwendung auf die Spektralzerlegung von Differentialoperatoren*, Math. Ann. 109, Heft 4-5 (1934).
- [2] J. Lions, *Équations différentielles partielles et problèmes de limites*, 1961.
- [3] С. Михлин, *Проблема минимума квадратичного функционала*, Москва 1952.
- [4] F. Riesz et B. Sz. Nagy, *Leçons d'Analyse Fonctionnelle*, Budapest 1952.

Received December 13, 1974

(922)

Bernoulli convolutions in LCA groups

by

CHUNG LIN and SADAHIRO SAEKI (Tokyo)

Abstract. Let G be a nondiscrete metrizable LCA group with character group Γ . Choose a local base $\{U_n\}_{n=1}^\infty$ at 0 consisting of compact sets satisfying $U_{n+1} + U_{n+1} \subset U_n$ for all n , and let $U = \bigcap_{n=1}^\infty U_n$. Take a sequence $\{(a_n, b_n, c_n)\}_{n=1}^\infty$ of triples of non-negative real numbers such that $a_n + b_n + c_n = 1$ for all n . Given $x \in U$, let ν_x denote the Bernoulli convolution

$$\times_{n=1}^\infty (a_n \delta(0) + b_n \delta(x_n) + c_n \delta(-x_n))$$

and let $\bar{\Gamma}_x$ denote the weak* closure of Γ in $L^\infty(\nu_x)$. Let S_x consist of those complex numbers in the closed unit disk D for which the corresponding constant function belongs to $\bar{\Gamma}_x$. Among other things, this is shown: If G is an I -group, then for quasi-all $x \in U$, S_x contains the multiplicative compact semigroup in D generated by all the complex numbers of the form $a + bx + c\bar{x}$, where (a, b, c) is an arbitrary limit point of $\{(a_n, b_n, c_n)\}_{n=1}^\infty$ and $|z| = 1$. It is also shown that in many cases $S_x = D$ for quasi-all $x \in U$.

§1. Introduction. We adhere to the notation established above. In addition, $M(G)$ will denote the usual convolution measure algebra of G . For $w \in G$, $\delta_x = \delta(w)$ denotes the unit point mass measure at x . The circle group and the group of r -adic integers are denoted by T and A_r , respectively. The set of all integers is denoted by $\mathbb{Z}$.

For $G = T$ and A_r , Hewitt and Kakutani [5] proved in 1964 that there is a measure $\nu_x = \times_{n=1}^\infty (\delta(0) + \delta(x_n)) \in M(G)$ such that the weak* closure of Γ in $L^\infty(\nu_x)$ contains all constant functions with values in the unit disk D . Brown and Moran [1] proved later that if $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ is a sequence of positive integers ≥ 2 , $a_n = (a_1, \dots, a_n)^{-1}$ and $\nu_x = \times_{n=1}^\infty 2^{-1} (\delta(0) + \delta(x_n)) \in M(T)$, then the weak* closure of $\hat{T} = \mathbb{Z}$ in $L^\infty(\nu_x)$ contains all constant functions with values in D if and only if $\sup a_n = \infty$. This result generalizes one of Hewitt and Kakutani's results in [5], since in [5] they only showed that ν_x has the required property if $\sum_{n=1}^\infty a_n^{-1} < \infty$. Brown and Moran