Classification des densités vectorielles factorisées

par EDWARD SIWEK (Katowice)

Résumé. Soit V_t (resp. W_t) la densité vectorielle ordinaire (resp. du type de H. Weyl) de poids $-t \in \mathbb{R}$. Comme V_t (W_t) sont des objets géométriques transitifs, toute congruence C pour V_t (W_t) prend la forme: $x C x' \Leftrightarrow \exists A \in GL(n)(x, x' \in AG \cdot x_0)$, où G est un sous-groupe fermé arbitraire de $GL(n)$, contenant le sous-groupe de stabilité de x_0 par rapport à V_t (W_t).

Posons pour $A = [a_{ij}]_{i,j=1,\dots,n} \in GL(n)$:

$$H = \{A \in GL(n): a_{21} = \dots = a_{n1} = 0\}, \quad a = a_{11}, d = \det[a_{ij}]_{i,j=2,\dots,n}$$

et définissons les sous-groupes de H :

$$\begin{aligned} G^+ &= \{A: d > 0\}, & H^+ &= \{A: a > 0\}, \\ G_0(c) &= \{A: |a| = c^k, k \in \mathbb{Z}\}, & H_1(c) &= \{A: |d| = c^k, k \in \mathbb{Z}\}, \\ G_0^*(c) &= \{A: |a| = c^k, \operatorname{sgn} d = (-1)^k, k \in \mathbb{Z}\}, \\ H_1^*(c) &= \{A: |d| = c^k, \operatorname{sgn} a = (-1)^k, k \in \mathbb{Z}\}, \\ G_0^+(c) &= \{A: d > 0, |a| = c^k, k \in \mathbb{Z}\}, \\ H_1^+(c) &= \{A: a > 0, |d| = c^k, k \in \mathbb{Z}\}, \end{aligned}$$

et pour $t \neq 0$ resp. $t \neq 1$:

$$\begin{aligned} G_t(c) &= \{A: |d| = c^k |a|^{(1-t)/t}, k \in \mathbb{Z}\}, \\ H_t(c) &= \{A: |a| = c^k |d|^{t/(1-t)}, k \in \mathbb{Z}\}, \\ G_t^*(c) &= \{A: d = (-c)^k |a|^{(1-t)/t}, k \in \mathbb{Z}\}, \\ H_t^*(c) &= \{A: a = (-c)^k |d|^{t/(1-t)}, k \in \mathbb{Z}\}, \\ G_t^+(c) &= \{A: d = c^k |a|^{(1-t)/t}, k \in \mathbb{Z}\}, \\ H_t^+(c) &= \{A: a = c^k |d|^{t/(1-t)}, k \in \mathbb{Z}\}, \end{aligned}$$

où $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers. On a obtenu le résultat suivant:

Toute factorisation (comitant algébrique) de la densité V_t (W_t) est équivalente à l'un des objets factorisés suivants: $\Sigma = V_t/GL(n)$ (scalaire trivial), $\Delta = V_t/H$ (direction), $\Delta^* = V_t/G^+$, $V_t(c) = V_t/G_t(c)$ pour $c > 1$, $V_t^*(c) = V_t/G_t^*(c)$ pour $c > 1$ et $V_t^+(c) = V_t/G_t^+(c)$ pour $c \geq 1$ [resp. $\Sigma = W_t/GL(n)$ (scalaire trivial), $\Delta = W_t/H$ (direction), $\Delta^+ = W_t/H^+$ (direction munie d'un sens), $W_t(c) = W_t/H_t(c)$ pour $c > 1$, $W_t^*(c) = W_t/H_t^*(c)$ pour $c > 1$, $W_t^+(c) = W_t/H_t^+(c)$ pour $c \geq 1$]. Les objets nommés ci-dessus ne sont pas équivalents l'un à l'autre.

Introduction. Dans la théorie des objets géométriques on considère le problème de la classification des comitants algébriques des objets

géométriques abstraits⁽¹⁾ d'un type fixe. Ce problème consiste à déterminer, jusqu'à l'équivalence, tous les comitants d'un objet géométrique abstrait du type donné. Pourtant on simplifie souvent ce problème en fixant non seulement le type de l'objet géométrique considéré, mais aussi le type des comitants cherchés.

En remarquant que le problème de la classification des comitants est équivalent à celui de la classification des objets géométriques factorisés (voir [6], théorèmes 1 et 2) on peut éviter des simplifications supplémentaires. En utilisant cette remarque, ainsi qu'un théorème bien connu caractérisant les sous-groupes fermés du groupe multiplicatif des nombres réels on a donné dans la note [7] une classification complète des comitants (et aussi des objets géométriques factorisés) pour des densités. Le but de la présente note est d'étendre cette méthode aux densités vectorielles, lesquelles peuvent aussi être envisagées comme des objets géométriques transitifs.

1. Factorisation des objets géométriques abstraits. Un objet géométrique abstrait de la classe r peut être envisagé comme une structure $X = (G, X, \cdot)$, composée d'un sous-groupe topologique G du groupe différentiel d'ordre r , d'un espace topologique X appelé *fibre* de l'objet géométrique X et d'une opération continue „ $\cdot$ ” :

$$G \times X \ni (g, x) \mapsto g \cdot x \in X$$

constituant une représentation du groupe G dans le groupe $\text{Hom } X$ des homéomorphismes de l'espace X sur lui-même. Il en résulte que l'opération „ $\cdot$ ” satisfait, pour $x \in X$ et $g_1, g_2 \in G$, aux conditions suivantes :

$$g_2 \cdot (g_1 \cdot x) = (g_2 g_1) \cdot x, \quad e \cdot x = x,$$

où e désigne l'unité du groupe G . On appelle l'opération „ $\cdot$ ” *loi de transformation* de l'objet géométrique X . Dans le cas où le groupe G opère par „ $\cdot$ ” de façon transitive sur X , l'objet géométrique X est dit *transitif*.

Un objet géométrique $Y = (G, Y, *)$ sera dit comitant de l'objet géométrique X si la structure $(G, Y, *)$ est homomorphe à celle $(G, X, \cdot)$, c'est-à-dire s'il existe une application continue φ de X sur Y et satisfaisant, pour $g \in G$ et $x \in X$, à la condition suivante :

$$(1) \quad \varphi(g \cdot x) = g * \varphi(x).$$

Dans le cas où les structures $(G, X, \cdot)$ et $(G, Y, *)$ sont isomorphes on dit que les objets correspondants X et Y sont *équivalents*.

Soit C une congruence pour l'objet géométrique X , c'est-à-dire une relation fermée, réflexive, symétrique et transitive dans X et satisfaisant

(1) Pour les notions de la théorie des objets géométriques qui ne sont pas expliquées ici voir p. ex. [3] ou [6].

à la condition suivante:

$$(\varpi, \varpi') \in C \Rightarrow (g \cdot \varpi, g \cdot \varpi') \in C$$

pour $g \in G$. En posant:

$$g \cdot [\varpi] = [g \cdot \varpi],$$

où $g \in G$, $\varpi \in X$ et $[\varpi] = \{\varpi' \in X : (\varpi, \varpi') \in C\}$ l'opération „ $\cdot$ ” détermine la loi de transformation de l'objet géométrique suivant:

$$X/C = (G, X/C, \cdot),$$

considéré comme une *factorisation* de l'objet X par rapport à la congruence C . Fixons $\varpi_0 \in X$ et posons:

$$S_0 = \{g \in G : g \cdot \varpi_0 = \varpi_0\}.$$

Il en résulte facilement, que pour tout $\varpi_0 \in X$, S_0 est un sous-groupe fermé de G , appelé *sous-groupe de stabilité* du point ϖ_0 . On constate aussi que les sous-groupes de stabilité qui correspondent à des points différents de la fibre X d'un objet géométrique transitif X sont conjugués l'un de l'autre. Tout sous-groupe fermé S de G contenant le sous-groupe S_0 de stabilité d'un point fixe $\varpi_0 \in X$ détermine une congruence C_S par la formule

$$(2) \quad (\varpi, \varpi') \in C_S \Leftrightarrow \exists g \in G (\varpi, \varpi' \in gS \cdot \varpi_0)$$

et, par conséquent, le sous-groupe S détermine un objet géométrique factorisé X/C_S noté dans la suite X/S .

Dans la note [6] nous avons établi la proposition suivante:

PROPOSITION 1. *Soit X un objet géométrique transitif et C une congruence pour X . Tout objet géométrique factorisé de la forme X/C est équivalent à un objet de la forme X/S , où S désigne un sous-groupe fermé du groupe G contenant un sous-groupe S_0 de stabilité d'un point fixe $\varpi_0 \in X$.*

Comme tout objet géométrique factorisé de la forme X/S est aussi de la forme X/C , il en résulte que le problème général de la classification des objets factorisés se réduit à celui des factorisations par rapport aux sous-groupes fermés contenant un sous-groupe de stabilité d'un point fixe. Pour effectuer cette classification nous utiliserons la proposition suivante:

PROPOSITION 2. *Soient $X = (G, X, \cdot)$ un objet géométrique transitif, S et $\tilde{S}$ — des sous-groupes fermés du groupe G tels que l'on ait: $S \supset S_0$ et $\tilde{S} \supset \tilde{S}_0$, où S_0 resp. $\tilde{S}_0$ désigne le sous-groupe de stabilité d'un point $\varpi_0 \in X$ resp. $\tilde{\varpi}_0 \in X$. Pour que les objets géométriques factorisés X/S et $X/\tilde{S}$ soient équivalents il faut et il suffit que les sous-groupes S et $\tilde{S}$ soient conjugués.*

Démonstration. Nécessité. Désignons par $[\varpi]$ resp. $\langle \varpi \rangle$ un élément de la fibre X/S resp. $X/\tilde{S}$ satisfaisant à la condition:

$$\varpi \in [\varpi], \quad \text{resp.} \quad \varpi \in \langle \varpi \rangle.$$

En vertu de la transitivité de X et de la définition (2) pour tout $w \in X$ il existe des $g_x \in G$ et $\tilde{g}_x \in G$ tels que l'on ait:

$$[w] = g_x \cdot [w_0] = g_x S \cdot w_0 \quad \text{et} \quad \langle w \rangle = \tilde{g}_x \cdot \langle \tilde{w}_0 \rangle = \tilde{g}_x \tilde{S} \cdot \tilde{w}_0.$$

D'après l'équivalence des objets factorisés X/S et $X/\tilde{S}$ il existe un homéomorphisme φ de X/S sur $X/\tilde{S}$ satisfaisant à la condition de la forme (1). Il en résulte l'existence de $h \in G$ tel que l'application φ se laisse définir par les conditions suivantes:

$$(3) \quad \varphi([w_0]) = h \cdot \langle \tilde{w}_0 \rangle, \quad \varphi(g \cdot [w_0]) = g \cdot \varphi([w_0]) = gh \cdot \langle \tilde{w}_0 \rangle.$$

Comme nous avons:

$$g_1 \cdot [w_0] \neq g_2 \cdot [w_0] \Leftrightarrow g_1 S \cdot w_0 \neq g_2 S \cdot w_0 \Leftrightarrow g_2^{-1} g_1 \notin S$$

et

$$\begin{aligned} \varphi(g_1 \cdot [w_0]) \neq \varphi(g_2 \cdot [w_0]) &\Leftrightarrow g_1 h \cdot \langle \tilde{w}_0 \rangle \neq g_2 h \cdot \langle \tilde{w}_0 \rangle \\ &\Leftrightarrow g_1 h \tilde{S} \cdot \tilde{w}_0 \neq g_2 h \tilde{S} \cdot \tilde{w}_0 \Leftrightarrow h^{-1} g_2^{-1} g_1 h \notin \tilde{S} \end{aligned}$$

a bijectivité de l'application $\varphi: X/S \rightarrow X/\tilde{S}$ entraîne la relation:

$$h^{-1} g_2^{-1} g_1 h \in \tilde{S} \Leftrightarrow g_2^{-1} g_1 \in S \quad \text{pour } g_1, g_2 \in G.$$

Donc les sous-groupes S et $\tilde{S}$ sont conjugués et la nécessité se trouve démontrée.

Suffisance. Soit $S = h\tilde{S}h^{-1}$ pour un $h \in G$. Alors l'application $\varphi: X/S \rightarrow X/\tilde{S}$ définie par les conditions (3) doit être bijective. Comme les sous-groupes S et $\tilde{S}$ de G sont fermés, la continuité de φ et φ^{-1} suit immédiatement de la définition (3) et de la continuité de l'opération $(g, w) \mapsto g \cdot w$. Donc les objets factorisés X/S et $X/\tilde{S}$ sont équivalents et la proposition se trouve démontrée.

D'après les propositions 1 et 2 le problème de la classification des comitants d'un objet géométrique transitif, étant équivalent ⁽²⁾ à celui de la classification des objets factorisés de la forme X/S , se réduit au problème de déterminer tous les sous-groupes fermés de G , contenant le sous-groupe S_0 de stabilité d'un point $x_0 \in X$ et n'étant pas conjugués l'un de l'autre. Le choix du point x_0 ne joue ici aucun rôle et, par conséquent, on peut le choisir d'une manière simplifiant la détermination des sous-groupes S .

Dans le cas où X est un objet géométrique transitif toute factorisation de la forme X/S est aussi un objet transitif, S étant le sous-groupe de stabilité de l'élément $[x_0] = S \cdot x_0$. Donc, en vertu de la proposition 1, l'objet X/S n'admet que des factorisations équivalentes aux objets de la

⁽²⁾ Dans le cas où l'objet géométrique donné n'est pas transitif, les problèmes ne sont pas équivalents. Sur ce sujet voir [5].

forme $(X/S)/T$, où T est un sous-groupe fermé de G contenant le sous-groupe S . Comme $(X/S)/T$ doit être équivalent à un objet de la forme X/T , nous obtenons la proposition suivante:

PROPOSITION 3. *Dans le cas où X est un objet géométrique transitif toute factorisation (comitant algébrique) d'un objet de la forme X/S est équivalente à un objet de la forme X/T , où T est un sous-groupe fermé de G contenant le sous-groupe S .*

2. Théorèmes auxiliaires. La classification des objets géométriques factorisés correspondant aux densités vectorielles sera basée sur certains théorèmes concernant les sous-groupes fermés de certains groupes. Nous allons présenter ces théorèmes.

THÉORÈME 1. *Le groupe multiplicatif des nombres réels R_0 ne contient (sauf lui-même) de sous-groupes fermés que les suivants:*

$$\begin{aligned} R^+ &= \{\varrho \in R_0: \varrho > 0\}, \\ R^+(c) &= \{\varrho \in R_0: \varrho = c^k, k \in \mathbf{Z}\} \quad \text{pour } c \geq 1, \\ R(c) &= \{\varrho \in R_0: |\varrho| = c^k, k \in \mathbf{Z}\} \quad \text{pour } c \geq 1, \\ R^*(c) &= \{\varrho \in R_0: \varrho = (-c)^k, k \in \mathbf{Z}\} \quad \text{pour } c > 1, \end{aligned}$$

où $\mathbf{Z}$ désigne l'ensemble de tous les nombres entiers⁽³⁾.

Admettons quelques notations. Désignons par H l'ensemble des matrices de la forme:

$$(4) \quad A = [a_j^i]_{i,j=1,\dots,n}$$

satisfaisant aux conditions suivantes:

$$a_1^2 = \dots = a_1^n = 0, \quad \det A \neq 0.$$

Pour tout t réel désignons encore par G_t resp. H_t l'ensemble des matrices de la forme (4) telles que l'on ait:

$$a_1^1 = |J|^t \operatorname{sgn} J, \quad a_1^2 = \dots = a_1^n = 0, \quad J = \det A \neq 0$$

resp.

$$a_1^1 = |J|^t, \quad a_1^2 = \dots = a_1^n = 0, \quad J = \det A \neq 0.$$

Il est facile de vérifier que H , G_t et H_t forment des sous-groupes fermés du groupe $GL(n)$ pour tout t réel.

Maintenant nous établirons quelques lemmes

LEMME 1. *Supposons que:*

G' soit un sous-groupe du groupe $GL(n)$,

$G_t \subset G'$ resp. $H_t \subset G'$ pour t réel fixe,

$G' \cup H = GL(n)$.

⁽³⁾ Ce théorème bien connu a été quelquefois appliqué dans la théorie des objets géométriques (voir p. ex. [2]). Pour la démonstration voir [7].

Alors:

$$G' = GL(n).$$

Démonstration⁽⁴⁾. En vertu des hypothèses il suffit de prouver la relation

$$(5) \quad H \subset G'.$$

$A \in H$ étant de la forme (4) nous posons:

$$\varepsilon = \operatorname{sgn}(\det [a_j^i]_{i,j=2,\dots,n}),$$

et

$$A_t = \begin{bmatrix} |J|^t \operatorname{sgn} J & \frac{1}{\varrho} a_2^1 & \dots & \frac{1}{\varrho} a_n^1 \\ 0 & \varepsilon a_2^2 & \dots & \varepsilon a_n^2 \\ 0 & a_2^3 & \dots & a_n^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_2^n & \dots & a_n^n \end{bmatrix}, \quad C_\varrho = \begin{bmatrix} \varrho & 0 & & \\ \varrho & \varepsilon & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

où $J = \det A_t$, et $\varrho = a_1^1 |J|^{-t} \operatorname{sgn} J$. Alors on vérifie facilement la relation:

$$A = C_\varrho \cdot A_t.$$

En utilisant les hypothèses on constate aussi que

$$C_\varrho \in G' \quad \text{et} \quad A_t \in G'$$

(car $A_t \in G_t$). Comme G' est un sous-groupe de $GL(n)$ il en résulte

$$A \in G'$$

donc aussi — l'inclusion (5). Notre lemme se trouve ainsi démontré.

LEMME 2. *Tout sous-groupe du groupe $GL(n)$ (sauf lui-même), contenant le sous-groupe G_t resp. H_t pour t réel fixe, doit être contenu dans le sous-groupe H .*

Démonstration⁽⁴⁾ Pour la démonstration par le contraire supposons qu'il existe un sous-groupe G' du $GL(n)$ tel que l'on ait

$$(6) \quad G_t \subset G' \not\subset H.$$

Alors il suffit de montrer l'égalité:

$$G' = GL(n).$$

⁽⁴⁾ Nous ne présenterons ici que la démonstration dans le cas des sous-groupes de la forme G_t . Dans le cas des sous-groupes de la forme H_t la démonstration n'exige que de petites modifications concernant le choix des matrices auxiliaires.

De l'hypothèse (6) résulte l'existence d'une matrice A telle que l'on a:

$$G' \ni A \notin H.$$

On a aussi:

$$B = \begin{bmatrix} |b|^{-t} \operatorname{sgn} b & & & 0 \\ & |b|^{t-1} & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \in G'$$

pour tout $b \neq 0$ (car $B \in G_t$). En posant $b = \det A$ il s'ensuit

$$H \ni B \cdot A \in G' \cap SL(n),$$

où $SL(n)$ désigne le sous-groupe unimodulaire de $GL(n)$. Donc on a aussi:

$$(7) \quad H \cap SL(n) \subset (H \cup G') \cap SL(n) \neq H \cap SL(n).$$

D'autre part, le groupe $H \cap SL(n)$ — étant composé de toutes les matrices du groupe $SL(n)$ conservant un sous-espace linéaire de $\mathbf{R}^n$ — est un sous-groupe maximal dans $SL(n)$ (voir [1]). D'après (7) il en résulte la relation:

$$(H \cup G') \cap SL(n) = SL(n)$$

donc aussi

$$SL(n) \subset H \cup G'.$$

Comme le groupe H , donc aussi $H \cup G'$, contient toutes les matrices de la forme:

$$\begin{bmatrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{bmatrix},$$

où $\lambda \neq 0$, la dernière inclusion entraîne l'égalité:

$$H \cup G' = GL(n).$$

Ainsi les hypothèses du lemme 1 sont remplies. Le lemme 1 achève la démonstration.

LEMME 3. Soit G un groupe topologique admettant la forme $G = F \cdot Q$, où F et Q sont des sous-groupes fermés de G . Tout sous-groupe fermé G' , de G , contenant le sous-groupe Q , est de la forme: $G' = F' \cdot Q$, où F' est un sous-groupe fermé de F .

Démonstration. D'abord nous montrerons l'implication suivante:

$$(8) \quad f_0 \in F, \quad q_0 \in Q, \quad f_0 q_0 \in G' \Rightarrow f_0 Q \subset G'.$$

En effet, pour f_0 et q_0 satisfaisant aux conditions: $f_0 \in F$, $q_0 \in Q$, $f_0 q_0 \in G'$ et pour tout $q \in Q$ on a:

$$f_0 q = (f_0 q_0)(q_0^{-1} q) \in G'$$

parce que $q_0^{-1} q \in Q \subset G'$. Il en résulte immédiatement $f_0 Q \subset G'$ et l'implication (8) se trouve ainsi démontrée.

Posons maintenant:

$$(9) \quad F' = \{f \in F: fQ \subset G'\}.$$

Il en résulte immédiatement l'inclusion:

$$F'Q \subset G'.$$

D'autre part, d'après les hypothèses, tout élément de G' admet une représentation sous la forme fq , où $f \in F$ et $q \in Q$. D'après (8) il en résulte l'inclusion inverse:

$$G' \subset F'Q$$

et, par conséquent, nous obtenons:

$$(10) \quad G' = F'Q.$$

Soit maintenant $f_3 = f_1 f_2$, où $f_1, f_2 \in F'$. Alors nous avons:

$$f_i = f_i e \in G' \quad \text{pour } i = 1, 2$$

(e désigne l'unité du groupe G) et, par conséquent, on a: $f_3 \in G'$ et $f_3 \in F$. En vertu de (9) et (10) cela implique $f_3 \in F'$, donc F' forme un sous-groupe de G' , et aussi de G .

Enfin soit

$$f_0 = \lim_{v \rightarrow \infty} f_v,$$

où $f_v \in F'$ pour $v \in N$. Alors on a aussi:

$$f_v \in G' \quad \text{pour } v \in N$$

et, en vertu de nos hypothèses, on obtient:

$$f_0 \in G' \quad \text{et} \quad f_0 \in F.$$

Comme plus haut il s'ensuit $f_0 \in F'$. Donc F' est un sous-groupe fermé de F et le lemme se trouve ainsi démontré.

Enfin nous démontrerons le lemme suivant:

LEMME 4. Dans le cas où un groupe abstrait G admet un sous-groupe invariant Q et un sous-groupe F tels que l'on ait:

$$(11) \quad G = FQ$$

et

$$(12) \quad f_1, f_2 \in F \Rightarrow f_1 f_2 = f_2 f_1$$

tout sous-groupe G' de G , contenant le sous-groupe Q , est un sous-groupe invariant de G .

Démonstration. Soit G' un sous-groupe de G contenant Q et $G'' = g^{-1}G'g$, où $g \in G$. En vertu de (11) on a $G' = F'Q$, où $F' \subset F$.

Comme Q est un sous-groupe invariant de G on a aussi:

$$(13) \quad G'' = (g^{-1}F'g)(g^{-1}Qg) = (g^{-1}F'g)Q$$

pour tout $g \in G$. En vertu de (11) tout élément $g \in G$ se laisse présenter sous la forme $g = fq$, où $f \in F$ et $q \in Q$. Alors, en vertu de (13) et (12), nous obtenons:

$$\begin{aligned} G'' &= (q^{-1}f^{-1}F'fq)Q = q^{-1}(f^{-1}F'f)Q = q^{-1}(F'f^{-1}f)Q \\ &= q^{-1}F'Q = q^{-1}G' = G' \end{aligned}$$

et le lemme se trouve démontré.

3. Application aux densités vectorielles. Pour tout $t \in \mathbf{R}$ on appelle *densité vectorielle ordinaire de poids $-t$* resp. *densité vectorielle du type de H. Weyl de poids $-t$* l'objet géométrique abstrait V_t resp. W_t relatif au groupe $GL(n)$ avec la fibre:

$$X = \mathbf{R}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$$

et la loi de transformation définie par la formule:

$$GL(n) \times X \ni (A, x) \mapsto |J|^t \operatorname{sgn} J A \cdot x$$

resp.

$$GL(n) \times X \ni (A, x) \mapsto |J|^t A \cdot x,$$

où $J = \det A$ et „ $\cdot$ ” désigne la multiplication matricielle. On vérifie facilement la transitivité des objets V_t et W_t pour $t \in \mathbf{R}$. On sait aussi (voir [4]) que les objets V_t et W_t pour $t \in \mathbf{R}$ ne sont pas équivalents l'un à l'autre.

Fixons $x_0 = (1, 0, \dots, 0) \in X$. Il est facile de vérifier que le sous-groupe de stabilité de l'élément x_0 par rapport à la densité vectorielle V_t resp. W_t est le sous-groupe G_t resp. H_t , défini au section 2. En vertu des propositions 1 et 2 le problème de la classification des densités vectorielles factorisées se réduit à celui de déterminer tous les sous-groupes fermés du groupe $GL(n)$, contenant le sous-groupe G_t ou H_t (pour tout t réel fixe) et n'étant pas conjugués l'un de l'autre. Mais, en vertu du lemme 2, le dernier problème se réduit au problème correspondant pour les sous-groupes fermés du groupe H , défini au section 2.

Admettons maintenant les notations suivantes

$$D = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & \varrho \end{bmatrix} : \varrho \in \mathbf{R}_0 \right\}, \quad E = \left\{ \begin{bmatrix} \varrho & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & 1 \end{bmatrix} : \varrho \in \mathbf{R}_0 \right\},$$

$$K = \left\{ \begin{bmatrix} |\varrho| & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 & \text{sgn } \varrho \end{bmatrix} : \varrho \in \mathbf{R}_0 \right\}, \quad L = \left\{ \begin{bmatrix} \text{sgn } \varrho & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 & |\varrho| \end{bmatrix} : \varrho \in \mathbf{R}_0 \right\}$$

et posons pour A de la forme (4):

$$(14) \quad a(A) = a_1^1 \quad \text{et} \quad d(A) = \det[a_j^i]_{i,j=2,\dots,n}.$$

Comme D , E , K et L sont des sous-groupes fermés du groupe H et comme le groupe H admet les représentations:

$$(15) \quad H = K \cdot G_0 \quad \text{et} \quad H = D \cdot G_t \quad \text{pour } t \neq 0$$

et

$$(16) \quad H = L \cdot H_1 \quad \text{et} \quad H = E \cdot H_t \quad \text{pour } t \neq 1,$$

nous obtenons, en vertu du lemme 3, la conclusion suivante:

CONCLUSION 1. Le groupe H n'admet pour sous-groupes fermés, contenant le sous-groupe G_t resp. H_t (pour t réel fixe), que les sous-groupes de la forme: $K' \cdot G_0$ — dans le cas où $t = 0$ et $D' \cdot G_t$ — dans le cas où $t \neq 0$ resp. $L' \cdot H_1$ — dans le cas où $t = 1$ et $E' \cdot H_t$ — dans le cas où $t \neq 1$, où D' , E' , K' , L' désignent un sous-groupe fermé arbitraire du groupe resp. D , E , K , L . Comme les groupes D , E , K , L sont isomorphes au groupe multiplicatif des nombres réels $\mathbf{R}_0$, le théorème 1 détermine tous les sous-groupes fermés D' , E' , K' , L' des groupes resp. D , E , K , L .

En utilisant les notations (14) nous pouvons présenter les groupes G_t et H_t , pour $t \in \mathbf{R}$, sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} G_0 &= \{A \in H: |a(A)| = 1, d(A) > 0\}, \\ G_t &= \{A \in H: d(A) = |a(A)|^{(1-t)/t}\} \quad \text{pour } t \neq 0, \\ H_1 &= \{A \in H: a(A) > 0, |d(A)| = 1\}, \\ H_t &= \{A \in H: a(A) = |d(A)|^{t/(1-t)}\} \quad \text{pour } t \neq 1. \end{aligned}$$

Alors un calcul élémentaire montre les implications suivantes:

$$\begin{aligned} A \in H, \quad B \in G_t &\Rightarrow a(A^{-1}BA) = a(B), \quad d(A^{-1}BA) = d(B), \\ A \in H, \quad B \in H_t &\Rightarrow a(A^{-1}BA) = a(B), \quad d(A^{-1}BA) = d(B) \end{aligned}$$

pour $t \in \mathbf{R}$. Donc, pour tout t réel, les groupes G_t et H_t sont des sous-groupes invariants du groupe H .

En vertu de (15) et (16), ainsi que de la commutativité des groupes: D , E , K , L , nous pouvons utiliser le lemme 4 et nous constatons que les sous-groupes du groupe H , indiqués dans la conclusion 1, ne sont pas conjugués l'un de l'autre relativement au groupe H . En vertu de lemme 2 ils ne sont pas conjugués non plus relativement au groupe $GL(n)$.

En tenant compte de la conclusion 1, du théorème 1 et du lemme 2 il en résulte les théorèmes:

THÉORÈME 2. *Le groupe $GL(n)$ n'admet (sauf lui-même) pour sous-groupes fermés, contenant le sous-groupe G_t (pour t réel fixe), que les sous-groupes suivants:*

$$H, G^+ = \{A \in H: d(A) > 0\}$$

ainsi que (dans le cas où $t = 0$):

$$\begin{aligned} G_0(c) &= \{A \in H: a(A) \in \mathbf{R}(c)\} && \text{pour } c \geq 1, \\ G_0^*(c) &= \{A \in H: |a(A)| = c^k, \operatorname{sgn} d(A) = (-1)^k, k \in \mathbf{Z}\} && \text{pour } c > 1, \\ G_0^+(c) &= \{A \in H: a(A) \in \mathbf{R}(c), d(A) > 0\} && \text{pour } c \geq 1, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} G_t(c) &= \{A \in H: |d(A)| = c^k |a(A)|^{(1-t)/t}, k \in \mathbf{Z}\} && \text{pour } c \geq 1, \\ G_t^*(c) &= \{A \in H: d(A) = (-c)^k |a(A)|^{(1-t)/t}, k \in \mathbf{Z}\} && \text{pour } c > 1, \\ G_t^+(c) &= \{A \in H: d(A) = c^k |a(A)|^{(1-t)/t}, k \in \mathbf{Z}\} && \text{pour } c \geq 1 \end{aligned}$$

dans le cas où $t \neq 0$. Les sous-groupes nommés ci-dessus ne sont pas conjugués l'un de l'autre.

THÉORÈME 3. *Le groupe $GL(n)$ n'admet (sauf lui-même) pour sous-groupes fermés, contenant le sous-groupe H_t (pour t réel fixe), que les sous-groupes suivants:*

$$H, H^+ = \{A \in H: a(A) > 0\}$$

ainsi que (dans le cas où $t = 1$):

$$\begin{aligned} H_1(c) &= \{A \in H: d(A) \in \mathbf{R}(c)\} && \text{pour } c \geq 1, \\ H_1^*(c) &= \{A \in H: |d(A)| = c^k, \operatorname{sgn} a(A) = (-1)^k, k \in \mathbf{Z}\} && \text{pour } c > 1, \\ H_1^+(c) &= \{A \in H: a(A) > 0, d(A) \in \mathbf{R}(c)\} && \text{pour } c \geq 1, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} H_t(c) &= \{A \in H: |a(A)| = c^k |d(A)|^{t/(1-t)}, k \in \mathbf{Z}\} && \text{pour } c \geq 1, \\ H_t^*(c) &= \{A \in H: a(A) = (-c)^k |d(A)|^{t/(1-t)}, k \in \mathbf{Z}\} && \text{pour } c > 1, \\ H_t^+(c) &= \{A \in H: a(A) = c^k |d(A)|^{t/(1-t)}, k \in \mathbf{Z}\} && \text{pour } c \geq 1 \end{aligned}$$

dans le cas où $t \neq 1$. Les sous-groupes nommés ci-dessus ne sont pas conjugués l'un de l'autre.

4. Classification des densités vectorielles factorisées. Les théorèmes 2 et 3 nous permettent, en vertu des propositions 1 et 2 ainsi que des théorèmes 1 et 2 de [6], d'établir une classification complète des factorisations (comitants) des densités vectorielles. Nous la présenterons dans les conclusions suivantes :

CONCLUSION 2. Toute factorisations (comitant) de la densité vectorielle ordinaire V_t de poids $-t$ est équivalente à l'un des objets factorisés suivants : $\Sigma = V_t/GL(n)$ (scalaire trivial), $\Delta = V_t/H$ (direction), $\Delta^* = V_t/G^+$, $V_t(c) = V_t/G_t(c)$ pour $c \geq 1$, $V_t^*(c) = V_t/G_t^*(c)$ pour $c > 1$ et $V_t^+(c) = V_t/G_t^+(c)$ pour $c \geq 1$. Les objets géométriques nommés ci-dessus ne sont pas équivalents l'un à l'autre.

CONCLUSION 3. Toute factorisation (comitant) de la densité vectorielle du type de H. Weyl W_t de poids $-t$ est équivalente à l'un des objets factorisés suivants : $\Sigma = W_t/GL(n)$ (scalaire trivial), $\Delta = W_t/H$ (direction), $\Delta^+ = W_t/H^+$ (direction munie de sens), $W_t(c) = W_t/H_t(c)$ pour $c \geq 1$, $W_t^*(c) = W_t/H_t^*(c)$ pour $c > 1$, $W_t^+(c) = W_t/H_t^+(c)$ pour $c \geq 1$. Les objets géométriques nommés ci-dessus ne sont pas équivalents l'un à l'autre.

En utilisant notre proposition 3 ainsi que les inclusions entre les sous-groupes du groupe $GL(n)$ déterminés dans les théorèmes 2 et 3, nous pouvons donner une classification des factorisations (comitants) des objets factorisés mentionnés dans les conclusions 2 et 3. Nous présenterons cette classification dans conclusion suivante :

CONCLUSION 4. Les densités vectorielles factorisées n'admettent (sauf elles-mêmes et le scalaire trivial Σ) de factorisations (comitants) que celles qui sont équivalentes aux objets nommés dans la suite :

Σ et Δ — n'admettent aucune factorisation non triviale,
 Δ^* et Δ^+ — direction Δ ,
 $V_t(c) = V_t(c^{1/p})$ pour $p = 2, 3, \dots$ et Δ ,
 $W_t(c) = W_t(c^{1/p})$ pour $p = 2, 3, \dots$ et Δ ,
 $V_t^*(c) = V_t^*(c^{1/2p-1})$ pour $p = 2, 3, \dots$, $V_t(c^{1/p})$ pour $p = 1, 2, \dots$
 et Δ ,
 $W_t^*(c) = W_t^*(c^{1/2p-1})$ pour $p = 2, 3, \dots$, $W_t(c^{1/p})$ pour $p = 1, 2, \dots$
 et Δ ,
 $V_t^+(c) = V_t^+(c^{1/p})$ pour $p = 2, 3, \dots$, $V_t^*(c^{1/2p})$ pour $p = 1, 2, \dots$
 $V_t(c^{1/p})$ pour $p = 1, 2, \dots$, Δ^* et Δ ,
 $W_t^+(c) = W_t^+(c^{1/p})$ pour $p = 2, 3, \dots$, $W_t^*(c^{1/2p})$ pour $p = 1, 2, \dots$,
 $W_t(c^{1/p})$ pour $p = 1, 2, \dots$, Δ^+ et Δ .

Cette classification est vraie pour tout $c > 1$ et $t \in \mathbf{R}$.

Remarque. Comme la densité vectorielle W_0 se réduit au vecteur contravariant (envisagé comme un objet géométrique abstrait) la conclusion 3 établit une classification des factorisations du vecteur contravariant.

Le sens géométrique des factorisations Δ et Δ^+ est évident, tandis que le sens des autres factorisations exige encore certaines explications, même dans le cas du vecteur contravariant W_0 .

Travaux cités

- [1] Е. Ё. Дынкин, *Максимальные подгруппы классических групп*, Труды Моск. Мат. Общ. 1 (1952), p. 39–166.
- [2] J. Haantjes and G. Laman, *On the definition of geometric objects* I, II, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. ser. A 56 = Indagationes Math. 15 (1953), p. 208–215 and 216–222.
- [3] M. Kucharzewski and M. Kuczma, *Basic concepts of the theory of geometric objects*, Rozprawy Matematyczne 43, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1964.
- [4] M. Kucharzewski und A. Zajtz, *Klassifikation der linearen homogenen geometrischen Objekte deren Komponentenzahl die Dimension des Raumes nicht übertrifft*, Colloq. Math. 16 (1967), p. 185–192.
- [5] E. Siwek, *Sur les comitants algébriques des objets géométriques non transitifs*, Ann. Polon. Math. 24 (1970), p. 27–33.
- [6] — et A. Zajtz, *Contribution à la théorie des pseudoobjets géométriques*, ibidem 19 (1967), p. 185–192.
- [7] — — *Sur les comitants algébriques des densités*, Prace Naukowe Uniwersytetu Śląskiego nr 2, Prace Matematyczne I (1969), p. 91–98.

Reçu par la Rédaction le 5. 1. 1974