Interpolation linéaire et équations fonctionnelles

par J. G. DHOMBRES (Nantes)

Résumé. The purpose of this paper is to characterize Lagrange's interpolation polynomial via a functional equation. In the setting of the group algebra of an abelian locally compact group, we consider some related functional equations.

La correspondance entre une fonction numérique définie sur un segment de l'axe réel et l'unique polynôme d'interpolation de Lagrange de degré n au plus qui coïncide avec cette fonction en $(n+1)$ points donnés du segment de définition, peut être caractérisée par une équation fonctionnelle très simple sur des espaces de fonctions particuliers. Cette correspondance est évidemment linéaire, et un certain intérêt s'est donc manifesté autour des opérateurs linéaires satisfaisant la même équation fonctionnelle et que l'on est convenu d'appeler opérateurs d'interpolation (cf. [4], p. 27). Pour une raison intimement liée à l'équation fonctionnelle en jeu, l'étude des opérateurs d'interpolation est très facilitée par la connaissance des idéaux fermés de l'algèbre fonctionnelle sur laquelle sont définis ces opérateurs. On comprend donc qu'on se soit précédemment limité aux algèbres de fonctions continues et à valeurs complexes sur un espace compact, ou encore aux algèbres de fonctions bornées presque partout. Dans le présent travail, on veut envisager quelques réalisations concrètes d'opérateurs d'interpolation dans le cas des algèbres de groupe, algèbres pour lesquelles seuls les idéaux maximaux sont bien connus. La technique utilisée (opérateurs de Dirac) conduit à une équation fonctionnelle, à deux variables au sens de [1], dont nous donnons la solution générale. Chemin faisant, on caractérise les interpolations polynômiale ou trigonométrique classiques. Il est alors tentant d'examiner par analogie des opérateurs linéaires satisfaisant des équations fonctionnelles voisines de celle d'un opérateur d'interpolation sur ces mêmes algèbres de groupe. Les opérateurs considérés sont les opérateurs multiplicativement liés, au sens de [4], dont des cas particuliers parsèment la littérature (pour des exemples et des références cf. [2], [10], [13], p. 384 et seq. et [4]). On est alors conduit à de nouvelles classes d'équations fonctionnelles à deux variables sur un groupe et c'est l'objet du présent travail que de

tenter de les étudier, en tous cas de fournir les résultats connus, d'en donner des démonstrations assez simplifiées puis d'en tirer des conséquences utiles quant aux opérateurs de départ.

1. Notations et définitions. G désigne un groupe abélien localement compact et $G^\wedge$ le groupe topologique dual muni de sa topologie de groupe dual. L'ensemble $M(G)$ des mesures de Radon bornées sur G est une algèbre de convolution, d'ailleurs de Banach pour la norme naturelle

$$\mu \in M(G); \quad \|\mu\| = \sup_{\|f\| \leq 1; f \in \mathcal{K}(G, \mathbb{C})} (|\mu(f)|) = |\mu|(G)$$

où $\|f\|$ désigne la norme uniforme et $\mathcal{K}(G, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions définies sur G , à valeurs complexes, continues et de support compact. (Nous renvoyons à [12] pour toutes les notions d'analyse harmonique abstraite.) La transformée de Fourier d'une telle mesure est une fonction $\mu^\wedge$ définie sur $G^\wedge$ par la formule

$$\mu^\wedge(x^\wedge) = \int_G \overline{\langle x, x^\wedge \rangle} d\mu(x)$$

où $x^\wedge$ désigne un caractère continu de G , c'est-à-dire un élément de $G^\wedge$ tandis que $\langle x, x^\wedge \rangle$ représente la dualité entre G et $G^\wedge$. Rappelons que $(G^\wedge)^\wedge = G$ d'après le célèbre théorème de Pontryagin.

La transformée de Fourier est injective sur $M(G)$ et son image $B(G^\wedge)$ est une algèbre isomorphe à $M(G)$. Munie de la norme $\|\mu^\wedge\| = \|\mu\|$, cette algèbre est une algèbre de Banach pourvue d'un élément unité. En outre $B(G^\wedge)$ est une sous-algèbre de l'algèbre des fonctions continues bornées et à valeurs complexes définies sur $G^\wedge$, tandis que

$$\sup_{x^\wedge \in G^\wedge} |\mu^\wedge(x^\wedge)| \leq \|\mu\|.$$

Soit $P: B(G^\wedge) \rightarrow B(G^\wedge)$ un opérateur linéaire et continu sur $B(G^\wedge)$ (pour la norme provenant de $M(G)$, seule norme que nous considérons sur $B(G^\wedge)$). On définit $P^\vee(\mu)$, pour μ dans $M(G)$, comme l'unique élément de $M(G)$ tel que $(P^\vee(\mu))^\wedge = P(\mu^\wedge)$. Visiblement $P^\vee$ est un opérateur linéaire et continu sur $M(G)$.

DÉFINITION 1. On dit qu'un opérateur $P: B(G^\wedge) \rightarrow B(G^\wedge)$ est de Dirac si P est linéaire, continu et s'il existe une fonction $\Phi: G \rightarrow G$ telle que pour toute mesure μ de $M(G)$, $P^\vee(\mu)$ soit l'image de μ par Φ .

Cela signifie que $(P^\vee(\mu))(E) = \mu(\Phi^{-1}(E))$ pour tout borélien E de G , ou encore que

$$(\Psi, P^\vee(\mu)) = (\Psi \circ \Phi, \mu)$$

pour toute fonction Ψ de $\mathcal{K}(G, \mathbb{C})$ et toute μ de $M(G)$.

Remarque 1. Le nom de Dirac, choisi pour simplifier le texte ultérieur, provient de ce que pour un opérateur de Dirac P , l'image $P^\vee$

d'une mesure de Dirac en un point ω de G est une mesure de Dirac (au point $\Phi(\omega)$ précisément). Cette propriété de conservation des mesures de Dirac est d'ailleurs caractéristique.

Remarque 2. La fonction Φ n'est pas quelconque en général: elle est au moins universellement mesurable sur G .

DÉFINITION 2. Un opérateur P est dit d'interpolation sur une algèbre $\mathfrak{A}$ s'il est défini sur $\mathfrak{A}$ et à valeurs dans $\mathfrak{A}$ et satisfait pour tous f, g de $\mathfrak{A}$:

$$P(f \cdot Pg) = P(f \cdot g)$$

Le vocabulaire utilisé provient de l'exemple suivant.

Soit T le groupe topologique quotient $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ et désignons par $C(T)$ l'algèbre des fonctions continues et à valeurs complexes définies sur T , algèbre identifiable à l'algèbre des fonctions continues à valeurs complexes définies sur l'axe réel, périodiques et de période 2π . Soit E_k l'espace des polynômes trigonométriques de degré au plus égal à k et soit Δ_{2k+1} une division en $(2k+1)$ points distincts de T c'est-à-dire

$$\Delta_{2k+1} = \{0 \leq \omega_0 < \omega_1 < \dots < \omega_{2k} < 2\pi\}.$$

Pour tout f de $C(T)$, il existe un unique élément $P_k(f)$ de E_k tel que $P_k f(\omega_i) = f(\omega_i)$ pour tout ω_i , $i = 0, 1, \dots, 2k$, de Δ_{2k+1} . Ce $P_k f$ s'appelle le *polynôme d'interpolation trigonométrique de f relatif à la division Δ_{2k+1}* (formule de Gauss, cf. [14], chapitre X). Soit maintenant un opérateur linéaire et continu $P: C(T) \rightarrow C(T)$ qui soit un opérateur d'interpolation (définition 2). Le noyau de P est un idéal fermé de $C(T)$, donc canoniquement associé à un sous-ensemble fermé Y de T . Par définition, on dit que Y est l'*interpolateur* de P .

PROPOSITION 1. Soit un opérateur linéaire et continu $P: C(T) \rightarrow C(T)$ et Δ_{2k+1} une division donnée de T .

Pf est le *polynôme d'interpolation de f relatif à la division Δ_{2k+1}* pour tout f de $C(T)$ si et seulement si P est un opérateur d'interpolation d'interpolateur Δ_{2k+1} , tel que $P(E_k)$ soit inclus dans E_k .

Démonstration. Si $Pf = P_k f$ pour tout f de $C(T)$, l'image de P est évidemment E_k , et $P(f \cdot Pg)(\omega_i) = P(fg)(\omega_i)$ pour tout ω_i de Δ_{2k+1} ce qui fournit par unicité $P(f \cdot Pg) = (P(fg))$. Enfin l'interpolateur de P contient évidemment Δ_{2k+1} mais il ne contient aucun autre point de T .

Réciproquement, si Δ_{2k+1} est l'interpolateur de P , alors on constate que $Pf(\omega_i) = f(\omega_i)$ pour tout ω_i de Δ_{2k+1} tandis que $Pf = Pg$ si f et g prennent les mêmes valeurs sur Δ_{2k+1} (cf. [4], théorème 4.1). Par suite $P(P_k(f)) = Pf$ puisque $P_k f = Xf$ sur Δ_{2k+1} . D'autre part puisque $P(P_k(f))$ est un polynôme trigonométrique, de degré k au plus, prenant les mêmes valeurs que f sur Δ_{2k+1} , on a $P(P_k(f)) = P_k f$. Il vient donc $Pf = P_k f$.

2. Opérateurs d'interpolation de Dirac. Nous voulons caractériser les opérateurs d'interpolation de Dirac sur $B(G^\wedge)$.

THÉOREME 1. *Soit P un opérateur de Dirac sur $B(G^\wedge)$. Cet opérateur est d'interpolation si et seulement si la fonction Φ associée à P satisfait pour tous x, y de G l'équation fonctionnelle*

$$(1) \quad \Phi(x + \Phi(y)) = \Phi(x + y).$$

Démonstration. La condition est nécessaire. Pour le voir, notons $P^\vee = Q$ pour alléger l'écriture. L'opérateur Q satisfait par tous μ, ν de $M(G)$ l'équation fonctionnelle:

$$(2) \quad Q(\mu * Q\nu) = Q(\mu * \nu).$$

Soit en utilisant les notations de dualité entre $\mathcal{X}(G, C)$ et $M(G)$

$$(\Psi, Q(\mu * Q\nu)) = (\Psi, Q(\mu * \nu)).$$

Utilisant le fait que P est un opérateur de Dirac, il vient

$$(\Psi \circ \Phi, \mu * Q\nu) = (\Psi \circ \Phi, \mu * \nu)$$

soit en utilisant les mesures produits:

$$(\Psi \circ \Phi(x + y), \mu(x) \otimes \nu(y)) = (\Psi \circ \Phi(x + y), \mu(x) \otimes \nu(y))$$

ou encore

$$(\Psi \circ \Phi(x + \Phi(y)), \mu(x) \otimes \nu(y)) = (\Psi \circ \Phi(x + y), \mu(x) \otimes \nu(y)).$$

Cette égalité est vraie pour tous μ, ν dans $M(G)$, donc on déduit par densité vague

$$\Psi \circ \Phi(x + \Phi(y)) = \Psi \circ \Phi(x + y)$$

et puisque $\mathcal{X}(G, C)$ sépare les points de G , il vient l'équation fonctionnelle (1). Il suffit de remonter les calculs pour obtenir la suffisance de la condition (1).

THÉOREME 2. *Soit $\Phi: G \rightarrow G$ une fonction définie sur un groupe abélien G . La fonction Φ satisfait l'équation (1) si et seulement s'il existe un sous-groupe H de G tel que pour tout x de G , $\Phi(x)$ ne dépende que de la classe d'équivalence selon H de x et appartienne à cette même classe d'équivalence.*

La condition est manifestement suffisante. Pour prouver la nécessité, on définit H comme l'ensemble des éléments de la forme $x - \Phi(x)$ où x parcourt G . On note d'une part que $\Phi(x + H) = \Phi(x)$ puisque l'équation (1) est équivalente pour tous x, y de G à l'équation

$$(3) \quad \Phi(x) = \Phi(x + (y - \Phi(y))).$$

En outre si z_1 et z_2 sont dans H , on a aussitôt

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= (\varpi_1 - \Phi(\varpi_1)) - (\varpi_2 - \Phi(\varpi_2)) = \varpi_1 - \varpi_2 + \Phi(\varpi_2) - \Phi(\varpi_1) \\ &= \varpi_1 - (\varpi_2 - \Phi(\varpi_2)) - \Phi(\varpi_1 - (\varpi_2 - \Phi(\varpi_2))) \end{aligned}$$

donc H est un sous-groupe de G .

Finalement, lorsque G est une somme directe $G/H \oplus H$, la fonction Φ équivaut à la donnée de $\varphi: G/H \rightarrow H$. Si ϖ est identifié à $\varpi_1 \oplus \varpi_2$, où $\varpi_1 \in G/H$ et $\varpi_2 \in H$, alors $\Phi(\varpi)$ est identifié à $\varpi_1 \oplus \varphi(\varpi_1)$.

Naturellement, quelques restrictions sur H et φ sont en général à apporter pour que la fonction Φ fournisse un opérateur de Dirac P (cf. Remarque 2).

EXEMPLE 1. Prenons $G = \mathbb{Z}$, donc $G^\wedge = T$. Alors $B(T)$ est l'ensemble des fonctions continues et à valeurs complexes, de période 2π et dont la série des coefficients de Fourier est absolument convergente. Un sous-groupe quelconque de $\mathbb{Z}$ est de la forme $k \cdot \mathbb{Z}$ pour un entier naturel k et l'on génère la solution générale de l'équation (1) sur le groupe additif $\mathbb{Z}$, laquelle s'écrit à partir de la décomposition unique $n = kp + m$ où $p \in \mathbb{Z}$ et m un entier relatif appartenant à $\left[-\frac{k}{2}, +\frac{k}{2}\right]$, sous la forme

$$(4) \quad \Phi(n) = k\varphi(m) + m$$

où $\varphi: Z_k = \mathbb{Z} \cap \left[-\frac{k}{2}, +\frac{k}{2}\right] \rightarrow \mathbb{Z}$ est une fonction arbitraire. En passant aux opérateurs d'interpolation, et après calcul, on obtient:

Pour $k = 0$, P est l'opérateur identité sur $B(T)$.

Pour $k \neq 0$, on a

$$(5) \quad Pf(x) = \sum_{l=0}^{k-1} f\left(\frac{2\pi l}{k}\right) I_k\left(x - \frac{2\pi l}{k}\right)$$

où l'on a posé

$$I_k(x) = \frac{1}{k} \sum_{m \in Z_k} [\exp(imx)] [\exp(ik\varphi(m)x)].$$

On calcule $Pf\left(\frac{2\pi}{k}l\right) = f\left(\frac{2\pi}{k}l\right)$ pour $l = 0, 1, \dots, (k-1)$ et on peut montrer que ce sont les seuls points, modulo 2π , réalisant cette propriété d'interpolation relative à une division Δ_k à pas constant $2\pi/k$. En particulier si $\varphi \equiv 0$ et pour un entier impair $(2k+1)$ on obtient l'interpolation trigonométrique classique (cf. [14], chapitre 10):

$$(6) \quad P_k f(\varpi) = \frac{1}{2k+1} \sum_{l=0}^{2k} f\left(\frac{2\pi l}{2k+1}\right) D_k\left(\varpi - \frac{2\pi l}{2k+1}\right)$$

avec

$$D_k(\varpi) = \frac{\sin \frac{2k+1}{2} \varpi}{\sin \frac{\varpi}{2}} \quad (\text{Noyau de Dirichlet}).$$

La formule (6) définit l'interpolation trigonométrique P_k , d'ordre k , et relative à une division Δ_{2k+1} à pas constant $2\pi/(2k+1)$. On est même conduit à une caractérisation de cet opérateur P_k , plus avantageuse que la proposition 1.

THÉOREME 3. *Soit P un opérateur linéaire de $B(T)$ sur E_k où k est un entier strictement positif. Cet opérateur est l'opérateur d'interpolation trigonométrique d'ordre k relatif à une division à pas constant $\left(\frac{2\pi}{2k+1}\right)$ si et seulement si P est un opérateur d'interpolation de Dirac.*

L'opérateur P_k est d'interpolation et son image est bien E_k . En outre, posons $e_n: \varpi \rightarrow \exp(in\varpi)$. En utilisant (4) avec $\varphi \equiv 0$, on calcule pour $l = 0, 1, \dots, 2k$

$$P_k(e_n) \left(\frac{2\pi l}{2k+1} \right) = e_{\varphi(n)} \left(\frac{2\pi l}{2k+1} \right)$$

et donc $P_k(e_n) = e_{\varphi(n)}$, c'est-à-dire que P_k est de Dirac.

Réciproquement, l'opérateur P est associé selon (5) à une fonction Φ définie par (4) avec k' à la place de k . On a nécessairement $k' \neq 0$ puisque l'image de P est incluse dans E_k . On a nécessairement $k' \leq 2k+1$. En effet, supposant $k' > 2k+1$, il existe un entier $n \in \mathbb{Z} \cap \left[-\frac{k'}{2}, \frac{k'}{2} \right]$ et $|n| > k$. Mais on doit avoir $|n + k'\varphi(n)| \leq k$. Il est impossible que $\varphi(n) = 0$ et $\varphi(n) \neq 0$ implique $|n + k'\varphi(n)| \geq k'/2 > k + \frac{1}{2}$ ce qui est également impossible.

D'autre part l'hypothèse du théorème 3 assure que l'image de P est E_k exactement. L'opérateur P est visiblement idempotent et donc $P(e_n) = e_n$ pour $|n| \leq k$. Par suite le cardinal de l'ensemble des n tels que $P(e_n) = e_n$ est $2k+1$ au moins. Mais c'est encore le cardinal de l'ensemble des n tels que $\Phi(n) = n$, cardinal majoré par k' comme on le voit sur (4). D'où l'inégalité inverse $k' \geq 2k+1$.

Finalement $k' = 2k+1$ et $\varphi \equiv 0$ ce qui donne $P = P_k$ grâce à (6).

Remarque 1. On note que $\|P_k\| = 1$ sur $B(T)$ et $P_k(1) = 1$.

Remarque 2. On généralise sans peine le théorème 3 au tore à n dimensions.

EXEMPLE 2. On prend $G = \mathbf{R}$ et donc $G^\wedge = \mathbf{R}$. Le sous-groupe H qui intervient au théorème 2 peut aussi se définir comme le sous-groupe

des périodes de la fonction Φ . Si cette dernière est supposée continue, H est fermé. Si $H = \mathbf{R}$, Φ est alors constante. Si H n'est pas tout $\mathbf{R}$, c'est un sous-groupe discret, domaine des valeurs de la fonction continue $x - \Phi(x)$. Cette dernière est donc constante, et la constante ne peut être que zéro puisque $\Phi(x) - \Phi^2(x) = 0$.

On a donc prouvé la

PROPOSITION 2. *L'identité est l'unique solution continue non constante de l'équation fonctionnelle (1) sur le groupe additif $\mathbf{R}$.*

Pour construire des opérateurs d'interpolation de Dirac sur $B(\mathbf{R})$, il n'est toutefois pas nécessaire d'avoir la continuité de Φ . Par exemple pour un nombre réel β positif et une fonction φ quelconque définie sur $[0, \beta]$, on dispose de l'opérateur P_β :

$$P_\beta f(x) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \int_{\beta(n-1)}^{\beta n} \exp[i(\lambda - \beta(n-1)x)] \exp[i\varphi(\lambda - \beta(n-1)x)] d\mu(\lambda).$$

On note que $\|P_\beta\| = 1$ tandis que $\frac{2\pi}{\beta} \mathbf{Z}$ est l'interpolateur de P .

Une propriété de commutation avec certaines translations (cf. [5]) permet de caractériser P_β .

3. Autres opérateurs multiplicativement liés de Dirac.

DÉFINITION 3. Un opérateur P est dit *multiplicativement lié sur une algèbre $\mathfrak{A}$* s'il est défini sur $\mathfrak{A}$ et à valeurs dans $\mathfrak{A}$ et tel que pour tous f, g dans $\mathfrak{A}$ on ait la relation

$$P(f \cdot Pg + g \cdot Pf) = APf \cdot Pg + B(f \cdot Pg + g \cdot Pf) + Cf \cdot g + DP(f \cdot g) + E(Pf \cdot Pg)$$

où A, B, C, D et E appartiennent au corps des scalaires de $\mathfrak{A}$.

On peut réduire un opérateur multiplicativement lié quelconque en sommes directes d'opérateurs de types plus simples, du moins en faisant quelques restrictions sur $\mathfrak{A}$, restrictions d'ailleurs faibles quant à l'analyse. Nous renvoyons à [4], chapitres I et II, pour cette réduction et pour la terminologie générale. Toutefois, par souci de clarté, rappelons quelques définitions essentielles.

DÉFINITION 4. On classe un opérateur multiplicativement lié sur $\mathfrak{A}$ selon les diverses valeurs des constantes qui interviennent dans la définition 3.

On a le type:

<i>semi-multiplicatif</i> (SM)	si	$A = 2, B = C = D = E = 0,$
<i>demi-multiplicatif</i> (DM)	si	$A = B = C = D = 0, E = 2,$
<i>quasi-interpolation</i> (QI)	si	$A = B = C = E = 0, D = 2,$
<i>Baxter</i> (Ba)	si	$A = 1 = D, B = C = E = 0,$

<i>Reynolds</i>	(R)	si	$A = 1 = E, B = C = D = 0,$
$D(a)$		si	$A = 1 - a, B = C = 0, D = a, E = 1,$
D		si	$A = B = C = 0, D = E = 1,$
$B(a)$		si	$A = B = C = 0, D = a, E = 2 - a,$
$C(a, \beta)$		si	$A = 0, B = 1, C = 0, D = a, E = \beta.$

Enfin si $P(f \cdot Pg) = P(g \cdot Pf)$ pour tous f, g de $\mathfrak{A}$, on dit que l'opérateur est *multiplicativement symétrique* (MS). On a ainsi les cas SMS, DMS et QIS que l'on note I et qui n'est autre que le cas d'un opérateur d'interpolation (cf. Définition 2).

On dispose alors des résultats suivants:

THÉORÈME 4. Soit P un opérateur de Dirac sur $B(G^*)$. L'opérateur P est de type SM, QI, DM ou MS si et seulement si la fonction Φ associée satisfait respectivement pour tous x, y de G les équations fonctionnelles

$$(7) \quad \Phi(x + \Phi(y)) = \Phi(x) + \Phi(y),$$

$$(8) \quad \Phi(x + \Phi(y)) = \Phi(x + y),$$

$$(9) \quad \Phi(x + \Phi(y)) = \Phi(\Phi(x) + \Phi(y))$$

et

$$(10) \quad \Phi(x + \Phi(y)) = \Phi(y + \Phi(x)).$$

En particulier, ces opérateurs sont multiplicativement symétriques.

Démonstration. Traitons le seul cas SM car les autres démonstrations sont analogues.

Comme pour le théorème 1, on parvient à la relation suivante, valable pour toute fonction Ψ appartenant à $\mathcal{K}(G, \mathbb{C})$

$$\Psi \circ \Phi(x + \Phi(y)) + \Psi \circ \Phi(y + \Phi(x)) = 2\Psi(\Phi(x) + \Phi(y)).$$

Supposons que $\Phi(x + \Phi(y))$ diffère de $\Phi(x) + \Phi(y)$ pour un certain couple (x, y) d'éléments de G . Il existe alors Ψ , dans $\mathcal{K}(G, \mathbb{C})$, $\Psi \geq 0$, $\Psi \circ \Phi(x + \Phi(y)) = 1$ et $\Psi[\Phi(x) + \Phi(y)] = 0$. Donc on doit avoir

$$1 + \Psi \circ \Phi(y + \Phi(x)) = 0$$

ce qui est impossible. D'où l'équation fonctionnelle (7) et par suite la symétrie multiplicative. La réciproque est facile.

La solution générale de l'équation (7) dépend du théorème suivant, qui peut s'énoncer de multiples façons équivalentes (cf. [9] et [6] par exemple).

THÉORÈME 5. Soit $\Phi: G \rightarrow G$ une fonction définie sur un groupe abélien G . La fonction Φ satisfait l'équation (7) si et seulement s'il existe un sous-groupe H de G tel que pour tout x de G , $x - \Phi(x)$ ne dépende que de la classe d'équivalence selon H de x et $\Phi(x)$ soit dans H .

La condition est suffisante puisque l'on a pour tout couple (x, y)
 $x - \Phi(x) = x + \Phi(y) - \Phi(x + \Phi(y))$ soit $\Phi(x + \Phi(y)) = \Phi(x) + \Phi(y)$.

La condition est nécessaire. On prend en effet pour H l'ensemble des z de G image par Φ d'un x de G . L'ensemble H est un sous-groupe de G puisque

$$z_1 - z_2 = \Phi(x_1) - \Phi(x_2) = \Phi(x_1 - \Phi(x_2))$$

comme on le constate sans peine sur l'équation (7). En outre, posons

$$\varphi(x) = x - \Phi(x).$$

On note que φ satisfait

$$\varphi(x + \Phi(y)) = \varphi(x), \quad \varphi(x + H) = \varphi(x)$$

et donc que $x - \Phi(x)$ ne dépend que de la classe de x selon H , ce qui termine la démonstration.

Remarque 1. Une démonstration plus élégante du théorème 5 consiste à noter que Φ satisfait (7) sur un groupe G si et seulement si la fonction Ψ définie par $\Psi(x) = x - \Phi(x)$ satisfait l'équation fonctionnelle (1).

On connaît en fait la solution de (7) sur des structures plus générales que celle de groupe: cf. [3] dans le cas de $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ muni de la multiplication et sous une hypothèse de continuité, [8] et [9] dans le cas d'un demi-groupe avec zéro, d'un groupe gauche ou d'un demi-treillis, [6] enfin dans le cas d'un demi-groupe avec zéro.

EXEMPLE 1. Prenons encore $G = \mathbf{Z}$ et $G^\wedge = T$. On a d'abord besoin de la caractérisation des opérateurs de type SMS sur $B(T)$, linéaires, continus, et stationnaires, c'est-à-dire qui commutent avec les translations (cf. [4], chapitre 6). Posons pour tout entier $k \geq 0$:

$$(11) \quad S_k f(x) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} f\left(x - \frac{2\pi l}{k}\right) \quad \text{si } k \geq 1$$

et

$$S_0 f(x) = f(0).$$

PROPOSITION 3. P est un opérateur linéaire, continu, stationnaire et de type semi-multiplicatif symétrique sur $B(T)$ si et seulement si $P = S_k$ pour un certain entier k positif ou nul.

Déterminons donc la forme générale d'un opérateur SMS et de Dirac sur l'algèbre $B(T)$. Grâce aux théorèmes 4 et 5, une solution de l'équation (7) est associée à un sous-groupe $H = k\mathbf{Z}$ de $\mathbf{Z}$. La décomposition de tout n de $\mathbf{Z}$ peut se faire selon $n = kp + m$ et $m \in \mathbf{Z}_k$ en utilisant

les notations qui précèdent le théorème 3. Dès lors

$$\Phi(n) = k(p + \varphi(m))$$

où une fois encore $\varphi: \mathbb{Z}_k \rightarrow \mathbb{Z}$. Soit alors $f \in B(T)$, on a

$$\begin{aligned} Pf(x) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e_{\Phi(n)}(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}_k} \sum_{p \in \mathbb{Z}} c_{kp+m}(f) e_{k(p+\varphi(m))}(x) \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}_k} e_{k\varphi(m)}(x) \sum_{p \in \mathbb{Z}} c_{kp}(f) e_{kp}(x) \\ &= \frac{1}{k} \sum_{m \in \mathbb{Z}_k} e_{k\varphi(m)}(x) \left(\sum_{l=0}^{k-1} f\left(x - \frac{2\pi l}{k}\right) e_{-m}\left(x - \frac{2\pi l}{k}\right) \right). \end{aligned}$$

On pose maintenant

$$(12) \quad I_k(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}_k} e_{k\varphi(m)}(x) e_{-m}(x) \quad \text{et} \quad I_0(x) \equiv 1$$

et on constate que

$$Pf(x) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} f\left(x - \frac{2\pi l}{k}\right) I_k\left(x - \frac{2\pi l}{k}\right)$$

ce que l'on écrit avec les notations de l'égalité (11)

$$(13) \quad Pf = S_k(fI_k).$$

La formule (13) peut apparaître comme duale en quelque sorte de la formule (5). On vérifiera en particulier que, pour $k \neq 0$, grâce à la proposition 3:

$$Pf\left(x + \frac{2\pi}{k}\right) = Pf(x).$$

On note aussi que $Pf(2\pi l/k) = f(0)$ pour $l = 0, 1, \dots, (k-1)$. Pour pouvoir énoncer un analogue du théorème 3, définissons F_k comme le sous-espace de $B(T)$ constitué des fonctions périodiques et de période $2\pi/k$ où k est un entier positif. Rappelons aussi que E_k désigne l'ensemble des combinaisons linéaires complexes des e^{iax} où a est un entier relatif satisfaisant $|a| \leq k$.

PROPOSITION 4. *Soit k un entier positif ou nul et P un opérateur linéaire, continu de $B(T)$ sur F_{2k+1} . Supposons que $P(E_k) \subset E_k$. L'opérateur P est de la forme*

$$(14) \quad Pf = S_{2k+1}(fD_k)$$

pour tout f de $B(T)$ si et seulement si P est semi-multiplicatif symétrique et de Dirac.

Prouvons la nécessité en partant d'un opérateur P à la fois SMS et de Dirac, donc pouvant s'écrire sous la forme

$$Pf = S_{k'}(fD_{k'})$$

pour un certain entier positif ou nul k' . D'une part, puisque l'image de $B(T)$ par P est incluse dans F_{2k+1} , un choix convenable de la fonction e_n montre que k' est multiple de $2k+1$. D'autre part, cette image est exactement F_{2k+1} et comme il existe une fonction dans F_{2k+1} dont la période stricte est $2\pi/2k+1$ c'est que $(2k+1)$ à son tour est multiple de k' . On conclut $k' = 2k+1$. Dès lors, on décompose un entier relatif a , tel que $|a| \leq k$, sous la forme $\Phi = (2k+1)\theta + a$ d'où l'on déduit $\Phi(a) = (2k+1)\varphi(a)$. L'hypothèse $P(E_k) \subset E_k$ signifie $|\Phi(a)| \leq k$ donc $\varphi(a) = 0$. Écrivons maintenant la fonction I_{2k+1} correspondante

$$I_{2k+1}(x) = \sum_{m=-k}^k e_m(x) = D_k(x) = \frac{\sin \frac{2k+1}{2} x}{\sin \frac{x}{2}}$$

et l'on trouve bien la forme (14).

Réciproquement, si P est de la forme (14) on constate que $Pf \in F_{2k+1}$, que $Pf = f$ si $f \in F_{2k+1}$ et naturellement que P est SMS et de Dirac.

On vérifie enfin que P n'augmente pas le degré d'un polynôme trigonométrique de E_k .

Remarque 1. Pour l'opérateur P défini sur $B(T)$ par la formule (14), on note que $P(1) = 1$ et $\|P\| = 1$, en tant qu'opérateur continu sur $B(T)$.

EXEMPLE 2. On connaît la structure générale des opérateurs linéaires continus en norme uniforme, stationnaires et semi-multiplicatifs sur l'algèbre $C(G)$ des fonctions continues et à valeurs complexes sur un groupe abélien compact G : un tel opérateur est une convolution par la mesure de Haar d'un sous-groupe fermé de G (cf. [4] chapitre 6, la proposition 3 est d'ailleurs le cas particulier du tore). La proposition 4 se généralise donc sans peine, notamment au cas d'un produit fini de tores.

Avant de résoudre le cas d'un opérateur multiplicativement symétrique, c'est-à-dire de considérer l'équation fonctionnelle (10), examinons encore le cas d'autres types d'opérateurs multiplicativement liés.

THÉORÈME 6. Soit P un opérateur de Dirac sur $B(G)$. Lorsque cet opérateur est de type Ba , R ou D , la fonction associée Φ satisfait respectivement pour tous x, y de G les équations fonctionnelles

$$(15) \quad \Phi(x + \Phi(y)) + \Phi(y + \Phi(x)) = \Phi(x + y) + \Phi(x) + \Phi(y),$$

$$(16) \quad \Phi(x + \Phi(y)) + \Phi(y + \Phi(x)) = \Phi(x) + \Phi(y) + \Phi(\Phi(x) + \Phi(y))$$

et

$$(17) \quad \Phi(x + \Phi(y)) + \Phi(y + \Phi(x)) = \Phi(x + y) + \Phi(\Phi(x) + \Phi(y)).$$

Démonstration. Contentons-nous de prendre le cas d'un opérateur de Baxter. Pour toute Ψ de $\mathcal{X}(G, C)$, on a

$$(18) \quad \Psi(x_1) + \Psi(x_2) = \Psi(x_3) + \Psi(x_4)$$

avec $x_1 = \Phi(x + \Phi(y))$; $x_2 = \Phi(y + \Phi(x))$; $x_3 = \Phi(x + y)$ et enfin $x_4 = \Phi(x) + \Phi(y)$.

Supposons $x_1 \neq x_3$ et $x_1 \neq x_4$ pour un certain couple (x, y) d'éléments de G . Il existe Ψ dans $\mathcal{X}(G, C)$, $\Psi \geq 0$ et $\Psi(x_3) = \Psi(x_4) = 0$ tandis que $\Psi(x_1) = 1$. On aboutit grâce à (15) à $1 + \Psi(x_2) = 0$ ce qui est impossible.

Si donc $x_1 = x_3$ et $x_2 \neq x_4$, on construit de même Ψ , Ψ dans $\mathcal{X}(G, C)$, $\Psi(x_1) = \Psi(x_3) = 0$ et $\Psi(x_2) \neq \Psi(x_4)$ ce qui contredit (18). De même, on est conduit à une impossibilité si $x_1 = x_4$ et $x_2 \neq x_3$. Par suite ou bien $x_1 = x_3$ et $x_2 = x_4$, ou bien $x_1 = x_4$ et $x_2 = x_3$. Cette alternative implique de toutes façons $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$, c'est-à-dire l'équation (15). On comprend maintenant pourquoi le théorème 6 est donné sous la forme d'une condition suffisante. Pour disposer d'une réciproque, la structure des solutions de (15) doit être au préalable connue.

THÉORÈME 7. Soit P un opérateur de Dirac sur $B(G^*)$. Cet opérateur est de type $B(\alpha)$, pour $0 < \alpha < 2$ et $\alpha \neq 1$, si et seulement si P est un opérateur d'interpolation.

Par la même technique, on parvient en effet à l'équation pour tout Ψ de $\mathcal{X}(G, C)$

$$\Psi(x_1) + \Psi(x_2) = \alpha \Psi(x_3) + (2 - \alpha) \Psi(x_4)$$

où x_1, x_2 et x_3 sont comme au théorème 6 et $x_4 = \Phi(\Phi(x) + \Phi(y))$. Il est impossible que l'on ait simultanément $x_1 \neq x_3$ et $x_1 \neq x_4$. Le cas $x_1 = x_3$ fournit

$$(1 - \alpha) \Psi(x_1) + \Psi(x_2) = (2 - \alpha) \Psi(x_4).$$

On ne peut avoir $x_2 \neq x_4$. En effet, ou bien on construit Ψ , Ψ dans $\mathcal{X}(G, C)$, $1 \geq \Psi \geq 0$, $\Psi(x_2) = 1$, $\Psi(x_4) = 0$ et on parvient au résultat $1 + (1 - \alpha) \Psi(x_1) = 0$ ce qui est impossible avec $\alpha < 1$, ou bien on construit Ψ , Ψ dans $\mathcal{X}(G, C)$, $1 \geq \Psi \geq 0$, $\Psi(x_2) = 0$, $\Psi(x_4) = 1$ et on parvient au résultat $(1 - \alpha) \Psi(x_1) = 2 - \alpha$ ce qui est impossible avec $1 < \alpha < 2$.

Le cas $x_1 = x_4$ est analogue en changeant α en $2 - \alpha$. Dans la discussion précédente, il fallait $\alpha < 2$, ici on aura $\alpha > 0$, d'où l'hypothèse faite $0 < \alpha < 2$. Par suite $x_1 = x_3$ et $x_2 = x_4$, ce qui fournit $x_1 = x_2$ puisque $\alpha \neq 1$, soit

$$\Phi(x + \Phi(y)) = \Phi(y + \Phi(x)) = \Phi(x) + \Phi(y) = \Phi(\Phi(x) + \Phi(y))$$

et termine la démonstration du théorème 7 grâce au théorème 2. On comparera avec le théorème 3.8 de [4].

Une discussion analogue, bien que plus longue, conduit aux deux résultats suivants.

THÉOREME 8. *Soit P un opérateur de Dirac sur $B(G^*)$. Cet opérateur est de type $D(\alpha)$, pour $0 < \alpha < 1$, si et seulement si P est un opérateur multiplicatif et idempotent.*

THÉOREME 9. *Soit P un opérateur de Dirac sur $B(G^*)$. Cet opérateur est de type $C(\alpha, -\alpha)$ pour $0 < \alpha < 1$, si et seulement si P est de type $C(0, 0)$ et héli-multiplicatif (c'est-à-dire satisfait $P(Pf \cdot Pg) = P(f \cdot g)$).*

4. Opérateurs multiplicativement symétriques de Dirac. Le cas des opérateurs multiplicativement symétriques de Dirac équivaut, grâce au théorème 4, à la résolution de l'équation fonctionnelle (10), dont les équations (7), (8) et (9) sont des cas particuliers. On dispose alors du théorème suivant:

THÉOREME 10. *Soit G un groupe abélien Φ et: $G \rightarrow G$. Une condition nécessaire et suffisante pour que Φ satisfasse l'équation (10) est l'existence de deux sous-groupes emboîtés H et I de G ($H \subset I$) et de deux relèvements*

$$h: G/I \rightarrow G/H \quad \text{et} \quad i: I/H \rightarrow I$$

de sorte que

$$f(x) = i[\pi_H(x) - h\{\pi_I(x)\}].$$

Nous identifions ici les groupes isomorphes G/I et $G/H/I/H$, et notons par π_I (respectivement π_H) l'épimorphisme canonique quotient de G sur G/I (respectivement de G sur G/H). Enfin un relèvement $r: G/H \rightarrow G$ est une application telle que $\pi_H \circ r$ soit l'identité sur G/H .

Démonstration. Partons de l'équation (10) que nous utilisons avec x et $y + \Phi(z)$. Soit

$$\begin{aligned} \Phi(x + \Phi(y + \Phi(z))) &= \Phi(\Phi(x) + y + \Phi(z)) \\ &= \Phi(\Phi(\Phi(x) + y) + z) \\ &= \Phi(\Phi(\Phi(x) + \Phi(y)) + z) \\ &= \Phi(x + \Phi(y) + \Phi(z)) \end{aligned}$$

ce qui s'écrit encore, pour tous x , y et z de G , sous la forme

$$(19) \quad \Phi[x + \Phi(y + \Phi(z)) - \Phi(y) - \Phi(z)] = \Phi(x).$$

Appelons H le sous-groupe G engendré par tous les éléments de la forme $\Phi(y + \Phi(z)) - \Phi(y) - \Phi(z)$ lorsque y et z parcourent G . Notons π_H l'application quotient $\pi_H: G \rightarrow G/H$. Puisque H est inclus dans le sous-groupe des périodes de Φ , nous définissons une fonction ψ sur G/H par la formule

$$\psi(\pi_H(x)) = \pi_H(\Phi(x)).$$

La fonction ψ satisfait alors pour tous y, z de G/H :

$$\psi(y + \psi(z)) = \psi(y) + \psi(z)$$

ce qui n'est autre l'équation fonctionnelle (7), dont la solution générale est donnée par le théorème 5. Cette solution fait intervenir un sous-groupe H_1 de $G_1 = G/H$. Par suite, il existe un sous-groupe de G noté I , contenant H et tel que $H_1 = I/H$. En outre, le théorème 5 s'énonce encore en disant qu'il existe un relèvement $h: G_1/H_1 \rightarrow G_1$ tel que pour $\omega \in G_1$

$$\psi(\omega) = \omega - h(\pi_{H_1}(\omega)).$$

Mais le théorème d'isomorphisme du double quotient permet l'identification entre G_1/H_1 et G/I . En outre $\pi_I(\omega) = \pi_{H_1}(\pi_H(\omega))$. Par suite pour tout ω de G on dispose de la relation

$$\pi_H(\Phi(\omega)) = \psi(\pi_H(\omega)) = \pi_H(\omega) - h(\pi_I(\omega)).$$

On note que $\pi_H(\Phi(\omega))$ est un élément de I/H pour tout ω de G . Par suite il existe un relèvement convenable $i: I/H \rightarrow I$ tel que

$$(20) \quad \Phi(\omega) = i[\pi_H(\omega) - h(\pi_I(\omega))].$$

Réciproquement, soit Φ une fonction définie suivant la relation (20) où H, I ($H \subset I$) sont des sous-groupes de G , h et i des relèvements associés mais par ailleurs quelconques. On note que $\Phi(\omega)$ appartient à I donc que

$$(21) \quad \pi_I(x + \Phi(y)) = \pi_I(x).$$

Soit la relation fonctionnelle

$$\Phi(\omega + \Phi(y)) = i[\pi_H(\omega) + \pi_H(y) - h(\pi_I(y)) - h(\pi_I(\omega))].$$

Cette expression étant symétrique en ω et y , on a bien

$$\Phi(\omega + \Phi(y)) = \Phi(\Phi(\omega) + y)$$

ce qui termine la démonstration du théorème 10.

Remarque 1. Pour avoir manqué l'équation pourtant facile (19) et utilisé comme succédané une équation plus élaborée $[\Phi(\omega + \Phi(y) + \Phi(z) + 2\Phi(0))] = \Phi(\omega + \Phi(y) + \Phi(z) + 2\Phi(0))]$, on a donné ailleurs (cf. [7], théorème 1), un énoncé d'aspect nettement plus compliqué que le théorème 10. Non sans peine, on peut montrer l'équivalence des deux énoncés.

Remarque 2. Grâce au théorème 10, il n'est pas difficile d'écrire la solution générale Φ de l'équation (10) sous la forme $\Phi = \Phi_2 \circ \Phi_1$ où Φ_1 et Φ_2 sont des fonctions définies sur G et à valeurs dans G et où la fonction Φ_1 satisfait l'équation fonctionnelle (7) tandis que la fonction Φ_2 satisfait l'équation fonctionnelle (8) (ou (1)). D'ailleurs nous avons noté (cf. remarque 1 après le théorème 5) que les équations (7) et (8) se dé-

duisent l'une de l'autre sur un groupe abélien. Elles épuisent ainsi le cas des équations de type symétrique.

EXEMPLE. Précisons la forme d'un opérateur de Dirac et multiplicativement symétrique sur l'algèbre $B(T)$. Grâce au théorème 10, il existe deux entiers k_1 et k_2 , positifs ou nuls, de sorte que $H = k_1 k_2 \mathbb{Z}$ et $I = k_2 \mathbb{Z}$. Il existe aussi deux fonctions

$$\begin{aligned}\xi: \mathbb{Z}_{k_2} &\rightarrow \mathbb{Z}_{k_1}, \\ \zeta: \mathbb{Z}_{k_1} &\rightarrow \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

(Compte tenu des définitions, la valeur finale de ζ devrait être dans $k_1 k_2 \mathbb{Z}$ mais pour simplifier les notations on multipliera par $k_1 k_2$ lorsque nécessaire. De même pour ξ .)

Tout entier relatif n se décompose d'une façon unique sous la forme

$$n = k_1 k_2 m + k^2 p + q$$

où $m \in \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{Z}_{k_1}$ et $q \in \mathbb{Z}_{k_2}$. Dès lors

$$\Phi(n) = k_1 k_2 \zeta(p + \xi(q)) + (p + \xi(q)) k_2 = \Phi_2 \circ \Phi_1(n)$$

où l'on a posé conformément à la remarque 2:

$$\begin{aligned}\Phi_1(n) &= k_2(k_1 m + p + \xi(q)) \\ \Phi_2(n) &= k_1 k_2 \zeta(p) + k_2 p + q.\end{aligned}$$

Par composition, l'opérateur P est de la forme $P_2 \circ P_1$ où P_1 est un opérateur SMS de Dirac associé à Φ_1 et P_2 un opérateur d'interpolation, de Dirac également, associé à Φ_2 . On trouve en supposant $k_1 k_2 \neq 0$

$$Pf(x) = \sum_{l=0}^{l=k_1 k_2 - 1} (S_{k_2}(fJ_{k_2}) * \delta_{\frac{2\pi l}{k_1 k_2}}) I_{k_1 k_2}\left(x - \frac{2\pi l}{k_1 k_2}\right)$$

où l'on a posé S_{k_2} comme en (11), T_{k_2} selon la formule

$$J_{k_2}(x) = \sum_{q \in \mathbb{Z}_{k_2}} e_{k_2 \xi(q)}(x) e_{-q}(x)$$

et

$$I_{k_1 k_2}(x) = \frac{1}{k_1 k_2} \sum_{p \in \mathbb{Z}_{k_1}} \sum_{q \in \mathbb{Z}_{k_2}} e_{k_2 p + q}(x) e_{k_1 k_2 \zeta(p)}(x).$$

Enfin, il est habituel de noter $F\left(\frac{2\pi l}{k_1 k_2}\right)$ par $F * \delta_{\frac{2\pi l}{k_1 k_2}}$ pour une fonction F quelconque sur T

Lorsque $\xi \equiv 0$ et $\zeta \equiv 0$, lorsque k_2 et k_1 sont impairs (respectivement $2k_2 + 1$ et $2k_1 + 1$), on note plus simplement en posant $k = 2k_1 k_2 + k_1 + k_2$

$$(22) \quad Pf(x) = \frac{1}{2k+1} \sum_{l=0}^{2k} (S_{2k_2+1}(fD_{k_2}) * \delta_{\frac{2\pi l}{k_1 k_2}}) D_k\left(x - \frac{2\pi l}{2k+1}\right).$$

Un théorème, combinant les aspects du théorème 3 et de la proposition 4, est d'ailleurs possible pour caractériser un opérateur P , fourni par la formule (22), parmi tous les opérateurs multiplicativement symétriques et de Dirac sur $B(T)$.

Remarque générale. Le cas de l'équation fonctionnelle (15), qui heuristiquement semble une combinaison simple de (7) et (8), présente un intérêt combinatoire grâce à son lien avec les opérateurs de Baxter (cf. [11]). Il reste encore ouvert.

References

- [1] J. Aczél, *Lectures on functional equations and their applications*, Academic Press, New York 1966.
- [2] F. V. Atkinson, *Some aspects of Baxter's functional equation*, J. Math. Anal. Appl. 7 (1963), p. 1-30.
- [3] Z. Daróczy, *Über die Funktionalgleichung $\varphi(\varphi(x)y) = \varphi(x)\varphi(y)$* , Acta Univ. Debrecen, Ser. Fiz. Chem. 8 (1962), p. 125-132.
- [4] J. G. Dhombres, *Sur les opérateurs multiplicativement liés*, Bull. Soc. Math. France, Mémoire n° 27 (1971), 159 p.
- [5] — *Linear interpolation and linear extension of functions*, Proc. Int. Conf. Functional Analysis, Madras (January 1973), Lecture Notes n° 399, Springer Verlag.
- [6] — *Functional equations on semi-groups arising from the theory of means*, Nanta Mathematica, Vol. V, n° 3 (1972), p. 48-66.
- [7] — *Solution générale d'une équation fonctionnelle sur un groupe abélien*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris (1974), Vol. 270, p. 141-143.
- [8] Y. Matras, *Sur deux équations fonctionnelles*, Séminaire Dubreil-Pisot, Algèbre et théorie des nombres (1968/1969), n° 14, 18 p.
- [9] — *Sur l'équation fonctionnelle $f(x \cdot f(y)) = f(x)f(y)$* , Comptes Rendus Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci. (5) 55 (1969), p. 731-51.
- [10] G. C. Rota, *Reynolds operators*, Proc. Symposia in Appl. Math., vol. XVI, Amer. Math. Soc. (1964).
- [11] — *Baxter algebras and combinatorial identities (I and II)*, Bull. Amer. Math. Soc. 75 (1969), p. 325-334.
- [12] W. Rudin, *Fourier analysis on groups*, Interscience Tracts n° 12, Interscience Publ., New York 1962.
- [13] Z. Semadeni, *Banach spaces of continuous functions I*, Monografie Matematyczne t. 55, Warszawa 1971.
- [14] A. Zygmund, *Trigonometric series*, Second Edition, Cambridge Univ. Press, 1968.

U.E.R. DE MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ DE NANTES, FRANCE

Reçu par la Rédaction le 20. 5. 1974