Now (6.15) and (6.16) give

$$|\{t: C_* f(t) > y\}| \leqslant \frac{1}{y}\Big[C\int_I |f|(\log^+|f|)^3 + C\Big], \quad y > 0,$$

from which (6.13) follows.

It remains to prove (6.14). It is known that, for $p \geqslant 2$, $\|Mf\|_p \leqslant C\|f\|_p$ and it is shown in [12], p. 569, that $\|W_* f\|_p \leqslant Cp^2\|f\|_p$ for $p \geqslant 2$. Moreover, according to (6.9), we have $\|Qf\|_p \leqslant Cp\|f\|_p$ for $p \geqslant 2$. The combination of these three inequalities and (6.15) give $\|C_* f\|_p \leqslant Cp^3\|f\|_p$ for $p \geqslant 2$. The inequality (6.14) follows now from a general result (cf. [15], Vol. II, Theorem (4.41)).

References

[1] S. V. Bockariev, *Existence of basis in the space of analytic functions in the disc, and some properties of the Franklin system*, Mat. Sbornik 95 (137), (1974), pp. 3–18 (in Russian).

[2] — *Some inequalities for the Franklin series*, Analysis Mathematica 1 (1975), pp. 249–257.

[3] Z. Ciesielski, *Properties of the orthonormal Franklin system*, Studia Math. 23 (1963), pp. 141–157.

[4] — *Properties of the orthonormal Franklin system II*, ibid. 27 (1966), pp. 289–323.

[5] — *A bounded orthonormal system of polygonals*, ibid. 31 (1968), pp. 339–346.

[6] — *Constructive function theory and spline systems*, ibid. 43 (1975), pp. 277–302.

[7] C. L. Fefferman and E. M. Stein, *Some maximal inequalities*, Amer. J. Math. 93 (1971), pp. 107–115.

[8] J. Marcinkiewicz, *Quelques théorèmes sur les séries orthogonales*, Ann. Soc. Polon. Math. 16 (1937), pp. 85–96.

[9] R. E. A. C. Paley, *A remarkable series of orthogonal functions*, Proc. London Math. Soc. 34 (1932), pp. 241–279.

[10] S. Ropela, *Properties of bounded orthonormal spline bases*, in *Approximation theory* 1975, Banach Center Publications, Vol. 3 (to appear).

[11] F. Schipp, *On a.e. convergence of expansion with respect to a bounded orthonormal system of polygonals*, Studia Math. 58 (1976), pp. 287–290.

[12] P. Sjölin, *An inequality of Paley and convergence a.e. of Walsh-Fourier series*, Arkiv Mathematik 7 (1968), pp. 551–570.

[13] E. M. Stein, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton, N. J., 1970.

[14] Ch. Watari, *Mean convergence of Walsh Fourier series*, Tôhoku Math. J. 16 (1964), pp. 183–188.

[15] A. Zygmund, *Trigonometric series*, Cambridge 1959.

MATHEMATICAL INSTITUTE OF THE POLISH ACADEMY OF SCIENCES, WARSAW
DEPARTMENT OF COMPUTER MATHEMATICS, EOTVOS LÓRÁND UNIVERSITY, BUDAPEST
DEPARTMENT OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF STOCKHOLM, STOCKHOLM

Received November 11, 1975 (1088)

STUDIA MATHEMATICA, T. LX. (1977)

Quelques propriétés des opérateurs uniformément convexifiants

par

B. BEAUZAMY (Palaiseau, France)

Résumé. Soient E et F deux espaces de Banach entre lesquels existe une injection continue i. En utilisant les constructions de Brunel–Sucheston, nous montrons que i n'est pas uniformément convexifiable si et seulement si l'on peut construire deux espaces de Banach E_1 et F_1, munis de bases E.S.A. (e_n) et (f_n), et une injection continue i_1, de E_1 dans F_1, qui envoie (e_n) sur (f_n) et qui est finiment représentable dans i. Nous en déduisons en particulier que si i n'est pas uniformément convexifiante, on peut trouver des carrés homothétiques dans E et F (et aussi dans n'importe quel espace intermédiaire entre E et F). Nous étudions aussi les rapports avec les ultrapuissances et l'interpolation.

1. Carrés dans les espaces intermediaires. Soient E et F deux espaces de Banach, et T un opérateur linéaire continu de E dans F. Nous dirons que E et F *ont des carrés liés par* T si, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver dans E deux points u, v, avec

$$\|u\|_E \leqslant 1, \quad \|v\|_E \leqslant 1, \quad \Big\|\frac{u \pm v}{2}\Big\|_E \geqslant 1-\varepsilon, \quad \Big\|\frac{Tu \pm Tv}{2}\Big\|_F \geqslant (1-\varepsilon)\sup(\|Tu\|_F, \|Tv\|_F). \tag{1}$$

Si T est une injection continue de E dans F, et si E et F ont des carrés liés par T, nous dirons qu'ils *ont des carrés homothétiques*: les points (u, v) forment un carré dans E, et les points

$$\frac{u}{\sup(\|u\|_E, \|v\|_F)}, \quad \frac{v}{\sup(\|u\|_E, \|u\|_F)},$$

considérés comme des points de F (c'est-à-dire E étant plongé dans F par T) forment un carré dans F.

Ces définitions s'étendent au cas où sont donnés n espaces de Banach $X_1, \ldots, X_n$, et des opérateurs linéaires continus T_i: $X_i \to X_{i+1}$, $i = 1, \ldots \ldots, n-1$. Là encore, si les T_i sont des injections, nous parlerons de carrés homothétiques dans $(X_1, \ldots, X_n)$.

Nous renvoyons à [1] pour la définition et les premières propriétés des opérateurs uniformément convexifiants. Nous emploierons seulement la caractérisation ci-dessous, qui est équivalente à la définition.

Rappel. T, opérateur linéaire continu de E dans F, n'est pas uniformément convexifiant si et seulement si l'on peut trouver un nombre θ, $0<\theta<1$, et, pour tout entier N, des points $x_1,\ldots,x_N$ dans la boule unité de E, tels que $\mathrm{dist}_F\big(\mathrm{conv}(x_1,\ldots,x_k), \mathrm{conv}(x_{k+1},\ldots,x_N)\big)>\theta$, $k=1,\ldots,N-1$.

THÉORÈME. *Soient $X_1\ldots X_n$ des espaces de Banach, et T_i: $X_i\to X_{i+1}$, $i=1,\ldots,n-1$, des opérateurs linéaires continus. Soit $T=T_{n-1}\circ\ldots\circ T_1$.*

Si T n'est pas uniformément convexifiant, les espaces $X_1,\ldots,X_n$ possèdent des carrés liés par les $(T_i)_{i=1,\ldots,n-1}$.

Démonstration. On peut sans restriction supposer tous les T_i de norme 1. Nous allons d'abord nous ramener au cas où les T_i sont des injections.

Notons W_1 l'image par T de la boule unité de X_1 dans X_n, W_2 l' mage par $T_{n-1}\circ\ldots\circ T_2$ de la boule de $X_2,\ldots,W_n$ la boule unité de X_n. Notons $j_1,\ldots,j_n$ les jauges de ces convexes. Pour $k=1,\ldots,n$, soit A_k l'espace engendré par W_k dans X_k, normé par j_k. A_k est isométriquement isomorphe à $X_k/\mathrm{Ker}\,T_{n-1}\circ\ldots\circ T_k$, et est donc un espace de Banach. Notons i_k l'injection continue de A_k dans $A_{k+1}(k=1,\ldots,n-1)$ et $i=i_{n-1}\circ\ldots\circ i_1$. On sait d'après [1] que i est uniformément convexifiante si et seulement si T l'est. Par ailleurs, on vérifie aisément que les espaces $(X_1,\ldots,X_n)$ possèdent des carrés liés par $(T_1,\ldots,T_{n-1})$ si et seulement si $(A_1,\ldots,A_n)$ possèdent des carrés homothétiques.

Nous considérons les espaces A_k comme plongés les uns dans les autres, et plongés dans A_n, grâce aux injections $i_1,\ldots,i_{n-1}$. Dans la suite, les notations $(A_1,\ldots,A_n)$, $(B_1,\ldots,B_n)$, etc., désigneront toujours des n-tuplets d'espaces de Banach entre lesquels existent des applications continues de norme 1 (qui seront toujours notées $i_1,\ldots,i_{n-1}$). Nous les appellerons "n-suites d'espaces de Banach".

La démonstration utilise de façon essentielle les constructions de Brunel–Sucheston (voir par exemple [3], où l'on trouvera d'autres références, ou [4]), que nous nous contenterons d'appliquer, en renvoyant à [3], [4] pour les détails et les justifications.

DÉFINITION 1.(1) Soient $(A_1,\ldots,A_n)$, $(B_1,\ldots,B_n)$ deux n-suites d'espaces de Banach. Nous dirons que $(B_1,\ldots,B_n)$ est *finiment représentable dans* $(A_1,\ldots,A_n)$ si pour tout $\varepsilon>0$ et tout sous-espace de dimension finie de B_n, B_n^0, on peut trouver un sous-espace de dimension finie de A_n, A_n^0, tel que si l'on pose $A_k^0=(i_{n-1}\circ\ldots\circ i_k)^{-1}A_n^0$, et $B_k^0=(i_{n-1}\circ\ldots\circ i_k)^{-1}B_n^0$, on puisse trouver un opérateur $\mathscr{U}$, qui soit un isomorphisme de B_k^0 sur A_k^0, pour $k=1,\ldots,n$, avec en outre, dans chacun de ces espaces

$$\|\mathscr{U}\|\cdot\|\mathscr{U}^{-1}\|\leqslant 1+\varepsilon$$

($\mathscr{U}$ étant un opérateur de B_k^0 sur A_k^0, munis des normes induites).

(1) Voir la note à la fin du travail.

Dans le cas d'un espace, cette définition se réduit à la finie-représentabilité usuelle. Dans le cas de deux espaces, elle est plus forte que la définition donnée dans [1]: si (B_1,B_2) est finiment représentable au sens présent, il l'est aussi au sens de [1], mais l'inverse n'est pas vrai. On peut cependant vérifier que le théorème 1, chapitre 1 de [1], demeure vrai avec cette définition, ce qui en constitue une extension.

LEMME 1. *Si i n'est pas convexifiante, on peut trouver une n-suite d'espaces de Banach $(B_1,\ldots,B_n)$, finiment représentable dans $(A_1,\ldots,A_n)$, un nombre θ, $0<\theta<1$, et une suite de points de la boule unité de B_1, satisfaisant à*

$$\mathrm{Dist}_{B_n}\big(\mathrm{conv}(y_1,\ldots,y_k), \mathrm{conv}(y_{k+1},\ldots,y_K)\big)>\theta, \quad \forall K=2,3,\ \ldots,\ \forall k=1,\ldots; K-1. \tag{2}$$

Démonstration. Puisque i n'est pas convexifiante, on peut trouver un nombre θ, $0<\theta<1$, et, pour tout $K\geqslant 1$, une suite de points $x_1^{(K)},\ldots$ $\ldots,x_K^{(K)}$ dans la boule unité de A_1, satisfaisant à

$$\mathrm{dist}\big(\mathrm{conv}(x_1,\ldots,x_k), \mathrm{conv}(x_{k+1},\ldots,x_K)\big)\geqslant\theta, \quad k=1,\ldots,K-1.$$

Soit $\mathscr{U}$ un ultrafiltre non trivial sur N, et posons $B_1=A_1^N/\mathscr{U},\ldots,B_n=A_n^N/\mathscr{U}$ (pour la définition des ultrapuissances, voir par exemple [7]). Dans A_1^N, considérons la suite $x_i(k)$, définie par, pour $i=1,2,\ldots$,

$$x_i(k)=\begin{cases}0 & \text{si}\quad k<i,\\ x_i & \text{si}\quad k\geqslant i.\end{cases}$$

Pour chaque entier i, la suite $\big(x_i(k)\big)_k$ définit un élément y_i de B_1 dont la norme est:

$$\|y_i\|_{B_1}=\lim_{k\to\infty}\|x_i^{(k)}\|_{A_1}\leqslant 1.$$

Si m et M sont deux entiers quelconques avec $m<M$, et si $a_1,\ldots,a_m$, $a_{m+1},\ldots,a_M$ sont des scalaires positifs avec $\sum_1^m a_i=\sum_{m+1}^M a_i=1$, on a:

$$\Big\|\sum_1^m a_iy_i-\sum_{m+1}^M a_iy_i\Big\|_{B_n}=\lim_{k\to\infty}\Big\|\sum_1^m a_ix_i^{(k)}-\sum_{m+1}^M a_ix_i^{(k)}\Big\|_{A_n}\geqslant\theta$$

(la propriété ainsi obtenue est l'analogue de la propriété de suite infinie introduite par R. C. James dans [5]).

Il nous reste à montrer que $(B_1,\ldots,B_n)$ est finiment représentable dans $(A_1,\ldots,A_n)$. Soit B_n^0 un sous-espace de dimension finie de B_n. Choisissons des vecteurs $e_1,\ldots,e_{k_1}$, linéairement indépendants, de norme 1 dans B_1, engendrant linéairement $B_n^0\cap B_1$, puis des vecteurs $e_{k_1+1},\ldots,e_{k_2}$, de norme 1 dans B_2, tels que $e_1,\ldots,e_{k_2}$ engendrent $B_n^0\cap B_2$, et ainsi de suite; $e_{k_{n-1}+1}, \ldots, e_{k_n}$ sont de norme 1 dans B_n, et $e_1, \ldots, e_{k_n}$ engendrent B_n^0.

Soit $\varepsilon > 0$. Dans la boule unité de $l_{k_n}^\infty$, choisissons des points $(a_1^l, \ldots, a_{k_n}^l)$, $l = 1, \ldots, \mathcal{N}$, de telle façon que les boules de rayon ε/k_n qui y sont centrées recouvrent la boule unité.

Pour toute suite de scalaires $(a_1, \ldots, a_{k_n})$ de module au plus égal à 1, on peut alors trouver un indice l pour lequel

$$\sup_{i=1,\ldots,k_n} |a_i - a_i^l| \leqslant \varepsilon/k_n.$$

Dans A_n^N, choisissons des représentants $(e_k(i))_{i=1,2,\ldots}$ des e_k, pour $k = 1, \ldots, k_n$. On peut trouver un indice i_0 pour lequel $\forall m = 1, \ldots, n$, $\forall l = 1, \ldots, l_m$, on ait

$$\Big|\Big\|\sum_{k=1}^{k_m} a_k^l e_k(i_0)\Big\|_{A_m} - \Big\|\sum_{k=1}^{k_m} a_k^l e_k\Big\|_{B_m}\Big| < \varepsilon.$$

Soit A_n^0 le sous-espace engendré par $e_1(i_0), \ldots, e_{k_n}(i_0)$ dans A_n, et, plus généralement, A_m^0 le sous-espace engendré par $e_1(i_0), \ldots, e_{k_m}(i_0)$ dans A_m, pour $m = 1, \ldots, n$. Soit $\mathcal{U}$ l'opérateur de B_m^0 sur A_m^0 qui associe $e_p(i_0)$ à e_p, pour $p = 1, \ldots, k_m$. Soit $(a_1, \ldots, a_{k_m})$ une suite de scalaires de module au plus égal à 1. On peut trouver (a_k^l), $k = 1, \ldots, k_m$ tels que:

$$\Big|\Big\|\sum_1^{k_m} a_k e_k\Big\|_{B_m} - \Big\|\sum_1^{k_m} a_k^l e_k\Big\|_{B_m}\Big| \leqslant \varepsilon.$$

Par ailleurs on a choisi i_0 pour que

$$\Big|\Big\|\sum_{k=1}^{k_m} a_k^l e_k\Big\|_{B_m} - \Big\|\sum_{k=1}^{k_m} a_k^l e_k(i_0)\Big\|_{A_m}\Big| \leqslant \varepsilon,$$

et on a

$$\Big|\Big\|\sum a_k^l e_k(i_0)\Big\|_{A_m} - \Big\|\sum a_k e_k(i_0)\Big\|_{A_m}\Big| \leqslant \sup_{k\leqslant k_m} |a_k^l - a_k| \sum \|e_k(i_0)\|_{A_m} \leqslant 2\varepsilon.$$

Il en résulte que si $\sup|a_k| \leqslant 1$,

$$\Big|\Big\|\sum_{k=1}^{k_m} a_k e_k\Big\|_{B_m} - \Big\|\sum_{k=1}^{k_m} a_k e_k(i_0)\Big\|_{A_m}\Big| \leqslant 4\varepsilon \qquad \forall m = 1, \ldots, n.$$

d'où l'on déduit pour des scalaires quelconques $\beta_1, \ldots, \beta_{k_m}$,

$$\Big|\Big\|\sum_{k=1}^{k_m} \beta_k e_k\Big\|_{B_m} - \Big\|\sum_{k=1}^{k_m} \beta_k e_k(i_0)\Big\|_{A_m}\Big| \leqslant 4\varepsilon \sup|\beta_k|.$$

Soit C la constante telle que l'on ait pour toute suite de scalaires $(\beta_1, \ldots, \beta_{k_n})$

$$\sup_{k\leqslant k_n} |\beta_k| \leqslant C \Big\|\sum_1^{k_n} \beta_k e_k\Big\|_{A_n},$$

(on a *a fortiori* $\sup_{k\leqslant k_m} |\beta_k| \leqslant C \|\sum_1^{k_m} \beta_k e_k\|_{A_m}$). Soit $\eta > 0$; choisissons $\varepsilon = \eta/4C$. On a pour tout m

$$\Big|\Big\|\sum_1^{k_m} \beta_k e_k\Big\|_{B_m} - \Big\|\sum_1^{k_m} \beta_k e_k(i_0)\Big\|_{A_m}\Big| \leqslant \eta \Big\|\sum_1^{k_m} \beta_k e_k\Big\|_{A_m},$$

ce qui achève la démonstration du lemme.

Nous allons maintenant appliquer la construction de Brunel–Sucheston (voir par exemple [3]) aux espaces $B_1, \ldots, B_n$. Rappelons qu'une suite (e_m) a la propriété I.S. (*invariant under spreading*) si

$$\Big\|\sum_1^M a_m e_m\Big\| = \Big\|\sum_1^M a_m e_{i_m}\Big\|$$

pour toute suite finie de scalaires $(a_m)_{m=1,\ldots,M}$ et toute suite croissante d'entiers $i_1 < i_2 < \ldots < i_M$.

Lemme 2. *Si i n'est pas uniformément convexifiante, on peut trouver une n-suite d'espaces de Banach, $(C_1, \ldots, C_n)$, finiment représentable dans $(B_1, \ldots, B_n)$, avec, dans la boule unité de C_1, une suite de points, $(e_k)_{k\in N}$, qui possède la propriété* I.S. *dans chacun des espaces $C_1, \ldots, C_n$.*

Démonstration. Comme Brunel–Sucheston, désignons par S l'ensemble des suites finies de rationnels. Appliquons à la suite $y_1, \ldots, y_k, \ldots$, dans B_1, le procédé de Brunel–Sucheston: on peut extraire une sous-suite, $(y_k^{(1)})$, pour laquelle il existe une semi-norme L_1, définie sur S, telle que

$$\forall a \in S,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \nu_1 \in N,\ \nu_1 < n_1 < n_2 < \ldots \Rightarrow \Big|\Big\|\sum a_i y_{n_i}^{(1)}\Big\|_{B_1} - L_1(a)\Big| \leqslant \varepsilon. \tag{3}$$

La condition (2) étant satisfaite dans B_1, la suite (y_i) n'y admet pas de sous-suite de Cauchy; L_1 est donc une norme sur l'ensemble $\varphi_{B_1}(S) = \{\sum a_i y_i^{(1)},\ a \in S\}$ (voir [3]). Nous ne gardons de (y_i) que la sous-suite $(y_i^{(1)})$, qui vérifie encore la condition (2), et nous lui appliquons la construction de Brunel–Sucheston dans B_2. Recommençons cette opération pour $B_3, \ldots, B_n$. Soit $e_i = y_i^{(n)}$ la dernière sous-suite extraite. Elle vérifie encore les conditions (2) dans chacun des espaces $B_1, \ldots, B_n$. Soient $L_1, \ldots, L_n$ les normes que nous avons obtenues; elles possèdent la propriété suivante:

(4) $\forall \varepsilon > 0,\ \forall a \in S,\ \exists \nu \in N,\ \nu < n_1 < n_2 < \ldots \Rightarrow$

$$\begin{cases} \left| \left\| \sum a_i e_{n_i} \right\|_{B_1} - L_1(a) \right| \leqslant \varepsilon, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left| \left\| \sum a_i e_{n_i} \right\|_{B_n} - L_n(a) \right| \leqslant \varepsilon. \end{cases}$$

Nous notons C_1 le complété de $\varphi_{B_1}(S)$ pour $L_1, \ldots, C_n$ le complété de $\varphi_{B_n}(S)$ pour L_n. Par construction, la suite (e_i) est I.S. dans chacun des espaces $C_1, \ldots, C_n$. Il nous reste à montrer que $(C_1, \ldots, C_n)$ est finiment représentable dans $(B_1, \ldots, B_n)$; il suffit pour cela d'adapter l'argument de Brunel–Sucheston.

Soit C_n^0 un sous-espace de dimension finie de C_n, que l'on peut supposer engendré par les vecteurs $e_1, \ldots, e_k$. Soient $C_{n-1}^0 = i_{n-1}^{-1}(C_n^0), \ldots, C_1^0 = i_1^{-1} \circ \ldots \circ i_{n-1}^{-1}(C_n^0)$. Par construction de $L_1, \ldots, L_n$, l'application $\mathscr{U}$: $\sum a_i e_i \to \sum a_i e_{i+1}$, qui opère de B_k dans lui-même, pour chaque k, réalise une isométrie de $\varphi_{B_k}(S)$ dans lui-même, qui se prolonge en une isométrie de C_k dans lui-même. On a par construction

$$\lim_{m\to\infty} \|\mathscr{U}^m x\|_{B_k} = \|x\|_{C_k} \quad \forall x \in C_k,\ k = 1, \ldots, n,$$

et les convergences sont uniformes sur les boules unité de $C_1, \ldots, C_n$ respectivement. Si $\varepsilon > 0$ est donné, on peut donc trouver un indice p pour lequel on a à la fois:

$$\begin{gathered} \big| \|\mathscr{U}^p x\|_{B_1} - \|x\|_{C_1} \big| \leqslant \varepsilon \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \big| \|\mathscr{U}^p x\|_{B_n} - \|x\|_{C_n} \big| \leqslant \varepsilon. \end{gathered}$$

Ceci prouve que $(C_1, \ldots, C_n)$ est finiment représentable dans $(B_1, \ldots, B_n)$ et achève la démonstration du lemme 2.

Rappelons qu'une suite (e_m) est dite E.S.A. (*equal signs additive*) si

$$\Big\| \sum_{m<k} a_m e_m + a_k e_k + a_{k+1} e_{k+1} + \sum_{m>k+1} a_m e_m \Big\| = \Big\| \sum_{m<k} a_m e_m + (a_k + a_{k+1}) e_k + \sum_{m>k+1} a_m e_m \Big\|$$

lorsque a_k et a_{k+1} sont de même signe.

Lemme 3. *Si i n'est pas uniformément convexifiante, on peut trouver une n-suite d'espaces de Banach $(D_1, \ldots, D_n)$ finiment représentable dans $(A_1, \ldots, A_n)$ telle que la suite (e_k) précédemment construite soit une base E.S.A. dans chacun de ces espaces, satisfaisant en outre*

$$\|e_i\|_{D_1} \leqslant 1, \quad \forall i = 1, 2, \ldots$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer la construction de Brunel–Sucheston à la suite (e_k) dans chacun des espaces $(C_1, \ldots, C_n)$; on obtient ainsi une n-suite $(D_1, \ldots, D_n)$, et (e_k) est une base E.S.A. dans chacun de ces espaces. La finie représentabilité dans $(C_1, \ldots, C_n)$ se démontre comme précédemment.

Remarquons qu'inversement, si $(D_1, \ldots, D_n)$ munis d'une même base E.S.A., sont finiment représentables dans $(A_1, \ldots, A_n)$, l'injection i ne peut être uniformément convexifiante: une base E.S.A. satisfait en effet aux conditions (2). Nous avons donc obtenu:

Proposition 1. *Soit $(A_1, \ldots, A_n)$ une n-suite d'espaces de Banach. L'injection i: $A_1 \to A_n$ n'est pas uniformément convexifiante si et seulement si l'on peut trouver une n-suite $(D_1, \ldots, D_n)$ d'espaces de Banach; finiment représentable dans la précédente, avec une suite $(e_i)_{i=1,2\ldots}$ qui forme une base E.S.A. dans chacun des $D_1, \ldots, D_n$, vérifiant en outre*

$$\|e_i\|_{D_1} \leqslant 1, \quad i = 1, 2, \ldots$$

Pour achever la démonstration du théorème, il nous suffira alors donc de construire des carrés homothétiques dans $(D_1, \ldots, D_n)$; on les "remontera" à $(A_1, \ldots, A_n)$ grâce à la finie représentabilité, et on obtiendra les carrés homothétiques cherchés. Nous allons considérer deux cas:

(i) Supposons que $\|\sum_{k=1}^{m} (-1)^l e_l\|_{D_1} \to \infty$, $m \to \infty$. Ce cas est semblable à celui considéré par Brunel–Sucheston. Posons

$$u = K_m(e_1 - e_3 + e_5 + \ldots + e_{4m-3} - e_{4m-1}),$$
$$v = K_m(e_2 - e_4 + e_6 + \ldots + e_{4m-2} - e_{4m}),$$

on a $\|u\|_{D_k} = \|v\|_{D_k}$, $k = 1, \ldots, n$, et on choisit K_m pour que $\|u\|_{D_1} = \|v\|_{D_1} = 1$. On a donc $K_m \underset{m\to\infty}{\to} 0$, on a $u+v = K_m(e_1 + e_2 - e_3 - e_4 + e_5 + e_6 \ldots)$ et donc

$$\|u+v\|_{D_k} = 2\|u\|_{D_k},$$

on vérifie que

$$\big| \|u-v\|_{D_k} - 2\|u\|_{D_k} \big| \leqslant 2K_m \|u\|_{D_k}.$$

Si $\varepsilon > 0$ est fixé, on peut donc trouver m assez grand pour que

$$\big| \|u-v\|_{D_k} - 2\|u\|_{D_k} \big| \leqslant \varepsilon$$

et on a ainsi obtenu des carrés homothétiques.

(ii) Supposons maintenant que l'on ait

$$\Big\| \sum_{1}^{m} (-1)^l e_l \Big\|_{D_1} < M, \quad \forall m,$$

on aura aussi

$$\Big\|\sum_{l=1}^{m}(-1)^l e_l\Big\|_{D_k}\leqslant M,\qquad \forall m,\ \forall k=1,\dots,n.$$

On va montrer que l'on peut reproduire c_0 dans tous les D_k, sur des suites homothétiques. Posons $u_i=e_{2i-1}-e_{2i}$; on a $\|\sum_1^\infty u_i\|_{D_k}<M$, $\forall k=1,\dots,n$. Si $(a_i)\in S$, on a:

$$\Big\|\sum a_i\varepsilon_i u_i\Big\|_{D_k}\leqslant\Big\|\sum_{i\in I_1}a_i u_i\Big\|_{D_k}+\Big\|\sum_{i\in I_2}a_i u_i\Big\|_{D_k}$$

où

$$I_1=\{i,\ \varepsilon_i=+1\},\qquad I_2=\{i,\ \varepsilon_i=-1\}$$

Mais puisque la suite (e_i) est E.S.A., on a:

$$\Big\|\sum_{I_1}a_i u_i\Big\|_{D_k}\leqslant\Big\|\sum a_i u_i\Big\|_{D_k},\qquad\text{et}\qquad\Big\|\sum_{I_2}a_i u_i\Big\|_{D_k}\leqslant\Big\|\sum a_i u_i\Big\|_{D_k},$$

et donc

$$\Big\|\sum a_i\varepsilon_i u_i\Big\|_{D_k}\leqslant 2\Big\|\sum a_i u_i\Big\|_{D_k}.$$

On en déduit qu'il existe deux constantes m, M telles que

$$m\sup|a_i|\leqslant\Big\|\sum a_i u_i\Big\|_{D_k}\leqslant M\sup|a_i|,\qquad k=1,\dots,n.$$

Posons $K_k=\sup\{\|\sum_1^m a_i u_i\|_{D_k},\ \sup|a_i|=1,\ m=1,2,\dots\}$; on a

$$m\leqslant K_n\leqslant\dots\leqslant K_1\leqslant M.$$

Soit $\theta<1$. Pour chaque $k=1,2,\dots,n$, on peut trouver un entier m_k et des coefficients $a_1^k,\dots,a_{m_k}^k$, avec $\sup|a_i^k|=1$, tels que

$$\Big\|\sum a_i^k u_i\Big\|_{D_k}\geqslant\theta K_k.$$

Posons

$$x_1=a_1^1u_1+\dots+a_{m_1}^1u_{m_1}+a_1^2u_{m_1+1}+\dots+a_{m_2}^2u_{m_1+m_2}+\dots+\\+a_1^nu_{m_1+\dots+m_{n-1}+1}+\dots+a_{m_n}^nu_{m_1+\dots+m_n}.$$

Pour chaque $k=1,\dots,n$, on a

$$\|x_1\|_{D_k}\geqslant\|a_1^ku_{m_1+\dots+m_{k-1}+1}+\dots+a_{m_k}^ku_{m_1+\dots+m_k}\|_{D_k}\\=\Big\|\sum_1^{m_k}a_iu_i\Big\|_{D_k}\geqslant\theta K_k.$$

(Il résulte en effet de la propriété E.S.A. que la norme diminue si on ajoute deux termes consécutifs dont les coefficients sont de signe contraire, et l'on a posé $u_i=e_{2i-1}-e_{2i}$.)

Posons ensuite

$$x_2=a_1^1u_{m_1+\dots+m_n+1}+\dots+a_{m_1}^1u_{2m_1+m_2+\dots+m_n}+\dots\\\dots+a_1^nu_{2m_1+\dots+2m_{n-1}+m_n+1}+\dots+a_{m_n}^nu_{2m_1+\dots+2m_n}$$

et ainsi de suite.

On aura ainsi construit une suite (x_i) avec

$$\|x_i\|_{D_k}\geqslant\theta K_k\qquad\forall k=1,\dots,n,\ \forall i=1,2\dots$$

Posons $x_i^{(k)}=x_i/K_k$. On a

$$\Big\|\sum a_ix_i^{(k)}\Big\|_{D_k}\leqslant\sup|a_i|.$$

Posons $a_i'=\dfrac{a_i}{\sup|a_i|}$. Soit l l'indice pour lequel $|a_l'|=1$, $\sup_{i\neq l}|a_i'|\leqslant1$. Posons, comme R.C. James dans [6], $w=x_l+\sum_{i\neq l}a_ix_i$, on a

$$\|2x_l\|_{D_k}\leqslant\|w\|_{D_k}-\Big\|x_l-\sum_{i\neq l}a_i'x_i\Big\|_{D_k}.$$

Mais $\|x_l\|_{D_k}\geqslant\theta K_k$, et $\|x_l-\sum_{i\neq l}a_i'x_i\|_{D_k}\geqslant K_k$. Donc

$$\|w\|_{D_1}\geqslant2\theta K_k-K_k=(2\theta-1)K_k$$

et donc

$$\Big\|\sum a_i'x_i^{(k)}\Big\|_{D_k}\geqslant2\theta-1.$$

Choisissons δ pour que $\theta>1-\delta/2$. On aura

$$\Big\|\sum a_ix_i^{(k)}\Big\|_{D_k}\geqslant(1-\delta)\sup|a_i|.$$

La suite x_i, convenablement normalisée dans chaque D_k (x_i/K_k dans D_k), est donc $1/(1-\delta)$ équivalente à la base canonique de c_0, dans chacun des D_k. Il est alors facile d'obtenir des carrés homothétiques, par exemple, en posant

$$u_1=x_1^1+x_2^1,\qquad v_1=x_1^1-x_2^1.$$

Ceci achève la démonstration du théorème.

Il résulte évidemment du théorème que nous venons d'établir que si deux espaces de Banach A_0 et A_1, entre lesquels existe une injection continue i, ne possèdent pas de carrés homothétiques, cette injection est uniformément convexifiante.

Une question qui se pose alors naturellement est la suivante: si A_0 et A_1 n'ont pas de carrés homothétiques, peut-on en conclure que i se factorise par un espace super-réflexif? Plus précisément, peut-on en conclure que les espaces d'interpolation de Lions–Peetre entre A_0 et A_1 sont super-réflexifs? (Une réponse partielle a été donnée par l'auteur dans [2]; le paragraphe qui suit n'est pas non plus sans rapport avec ce problème.)

2. Opérateurs uniformément convexifiants, ultrapuissances et interpolation. Nous renvoyons par exemple à [2] pour les définitions concernant l'interpolation. Soient A_0, A_1 deux espaces de Banach, et T un opérateur linéaire continu de A_0 dans A_1. Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre non trivial sur N.(²)

PROPOSITION 1. *T est uniformément convexifiant de A_0 dans A_1 si et seulement si il l'est aussi de $A_0^N/\mathcal{U}$ dans $A_1^N/\mathcal{U}$.*

Démonstration. Comme on l'a déjà vu, on peut se ramener au cas où T est une injection continue. On sait que $(A_0^N/\mathcal{U}, A_1^N/\mathcal{U})$ est finiment représentable dans (A_0, A_1) (§ 1, lemme 1), et donc la première implication résulte de [1], chap. 1, th. 1. La seconde s'obtient en remarquant que si A_0 possède la propriété d'arbre fini dans A_1, $A_0^N/\mathcal{U}$ la possède dans $A_1^N/\mathcal{U}$.

Nous désignons par $(A_0, A_1)_{\theta,p}$ les espaces d'interpolation de Lions–Peetre entre A_0 et A_1.

COROLLAIRE. *Les espaces $[(A_0, A_1)_{\theta,p}]^N/\mathcal{U}$ et $(A_0^N/\mathcal{U}, A_1^N/\mathcal{U})_{\theta,p}$ ne coïncident pas en général.*

Démonstration. Soient A_0 et A_1 deux espaces entre lesquels existe une injection continue et uniformément convexifiante. Soit $A = (A_0, A_1)_{\theta,p}$ un espace d'interpolation entre A_0 et A_1, avec $0 < \theta < 1$, $1 < p < \infty$; A est réflexif d'après [1], chap. 3, prop. 1. D'après la proposition 1, l'injection de $A_0^N/\mathcal{U}$ dans $A_1^N/\mathcal{U}$ est encore convexifiante, donc $(A_0^N/\mathcal{U}, A_1^N/\mathcal{U})_{\theta,p}$ est réflexif. Si l'on avait $(A_0^N/\mathcal{U}, A_1^N/\mathcal{U})_{\theta,p} = A^N/\mathcal{U}$, ce dernier espace serait réflexif, et donc A serait super-réflexif. Mais ceci est faux en général: on a vu dans [1], chap. 1, que si A_0 est un espace d'Orlicz convenable, et A_1 l'espace $L^1([0,1], dt)$, l'injection $A_0 \to A_1$ était uniformément convexifiante sans qu'aucun espace entre ceux-ci ne soit super-réflexif. Ceci établit notre corollaire.

Remarquons toutefois que les normes des deux espaces $[(A_0, A_1)_{\theta,p}]^N/\mathcal{U}$ et $(A_0^N/\mathcal{U}, A_1^N/\mathcal{U})_{\theta,p}$ sont néanmoins comparables. En effet:

PROPOSITION 2. *Il existe une injection continue de*

$$[(A_0, A_1)_{\theta,p}]^N/\mathcal{U} \quad \textit{dans} \quad (A_0^N/\mathcal{U}, A_1^N/\mathcal{U})_{\theta,p}.$$

(²) Voir la note à la fin du travail.

Démonstration. Notons E le premier espace, F le second. $\tilde{A}_0 = A_0^N/\mathcal{U}$, $\tilde{A}_1 = A_1^N/\mathcal{U}$. Soit $x \in E$; on peut représenter x par

$$x = (x_i)_{i\in N}, \qquad \text{avec } \|x\|_E = \lim_{\substack{i\to\infty \\ \mathcal{U}}} \|x_i\|_{(A_0,A_1)_{\theta,p}}.$$

Par définition, x_i peut être représenté par

$$x_i = u_i(n) + v_i(n), \ \forall n, \qquad \text{avec } \|e^{\xi_0 n} u_i(n)\|_{l^p(A_0)} < \infty, \ \|e^{\xi_1 n} v_i(n)\|_{l^p(A_1)} < \infty$$

et

$$\|x_i\|_{(A_0,A_1)_{\theta,p}} = \inf_{u_i(n)+v_i(n)=x_i \forall n} \max\left(\|e^{\xi_0 n} u_i(n)\|_{l^p(A_0)}, \|e^{\xi_1 n} v_i(n)\|_{l^p(A_1)}\right).$$

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $(u_i(n))$, $(v_i(n))$ une représentation de x_i, pour chaque i à ε/i près, c'est-à-dire

$$\|x_i\|_{(A_0,A_1)_{\theta,p}} \geqslant \max\left(\|e^{\xi_0 n} u_i(n)\|_{l^p(A_0)}, \|e^{\xi_1 n} v_i(n)\|_{l^p(A_1)}\right) - \varepsilon/i.$$

Posons

$$a(n) = (u_i(n))_i, \qquad b(n) = (v_i(n))_i.$$

Pour chaque n, $a(n)$ et $b(n)$ définissent des éléments de $A_0^N/\mathcal{U}$ et $A_1^N/\mathcal{U}$, et l'élément $a(n) + b(n) = (u_i(n) + v_i(n))_i$ est indépendant de n.

Notons $\tilde{x} = a(n) + b(n)$. On a

$$\|e^{\xi_0 n} a(n)\|_{l^p(\tilde{A}_0)} = \Big[\sum_n \lim_{\substack{i\to\infty \\ \mathcal{U}}} \|e^{\xi_0 n} u_i(n)\|_{A_0}^p\Big]^{1/p} \leqslant \lim_i \Big[\sum_n \|e^{\xi_0 n} u_i(n)\|_{A_0}^p\Big]^{1/p} \leqslant \|x\|_E$$

et de même

$$\|e^{\xi_1 n} b(n)\|_{l^p(\tilde{A}_1)} \leqslant \|x\|_E.$$

Donc $\tilde{x}$ est un élément de F, avec

$$\|\tilde{x}\|_F \leqslant \max\left(\|e^{\xi_0 n} a(n)\|_{l^p(\tilde{A}_0)}, \|e^{\xi_1 n} b(n)\|_{l^p(\tilde{A}_1)}\right) \leqslant \|x\|_E.$$

Il est clair que x ne dépend pas du choix de la représentation de x_i en $u_i(n) + v_i(n)$, $\forall n$; on vérifie également qu'il ne dépend pas du choix des $(x_i)_{i\in N}$ et que l'application construite est une injection; ceci achève la démonstration de notre proposition.

Ajouté à la correction des épreuves:

(1) On peut remplacer la définition 1 (finie-représentabilité) par la définition suivante:

Soient $(A_1, \ldots, A_n)$, $(B_1, \ldots, B_n)$ deux n-suites d'espaces de Banach avec des opérateurs T_k et T'_k respectivement ($k = 1, \ldots, n-1$). Nous dirons que $(B_1, \ldots, B_n)$ est *finiment représentable dans* $(A_1, \ldots, A_n)$ si:

Pour tout $\varepsilon > 0$, tout $\alpha \in N$, tout n-uple de sous-espaces de dimension α,

$B_1^0, \ldots, B_n^0$, contenus dans $B_1, \ldots, B_n$ respectivement, satisfaisant à $B_{k+1}^0 = T_k' B_k^0$ pour $k = 1, \ldots, n-1$, il existe un n-uple de sous-espaces de dimension a, $A_1^0, \ldots, A_n^0$, contenus dans $A_1, \ldots, A_n$ respectivement, satisfaisant à $A_{k+1}^0 = T_k A_k^0$, pour $k = 1, \ldots, n-1$, et il existe n isomorphismes U_k, $(k = 1, \ldots, n)$, de B_k^0 sur A_k^0, avec $\|U_k\| \leqslant 1+\varepsilon$, $\|U_k^{-1}\| \leqslant 1+\varepsilon$, avec $\forall\ x \in A_k^0$, $T_k x = U_{k+1} T_k' U_k^{-1} x$. (Cette dernière condition équivaut à $\forall\ y \in B_k^0$, $T_k' y = U_{k+1}^{-1} T_k U_k y$.)

On obtient ainsi une extension de la proposition 1, la démonstration étant identique.

(2) Il convient de préciser le cadre où sont définis les espaces d'interpolation:

Soient A_0 et A_1 deux espaces de Banach contenus, avec injections continues, dans un e.v.t.l.c.s. $\mathscr{A}$. Soient $S = A_0 + A_1$, $I = A_0 \cap A_1$ (voir [2] pour les définitions). Soit i_0 l'injection de A_0 dans S, i_1 celle de A_1 dans S. Soit $\mathscr{U}$ un ultrafiltre non trivial sur $\boldsymbol{N}$. Notons $\tilde{A}_0, \tilde{A}_1, \tilde{S}$ les ultrapuissances de A_0, A_1, S respectivement, i_0' l'extension de i_0 de $\tilde{A}_0$ dans $\tilde{S}$, i_1' l'extension de i_1 de $\tilde{A}_1$ dans $\tilde{S}$ (ce ne sont pas des injections), $\tilde{i}_0$ et $\tilde{i}_1$, les injections obtenues en passant aux quotients $\tilde{A}_0/\ker i_0'$, $\tilde{A}_1/\ker i_1'$. Dans la suite, la notation $(\tilde{A}_0, \tilde{A}_1)_{\theta,p}$ désignera l'espace d'interpolation entre $\tilde{A}_0/\ker i_0'$ et $\tilde{A}_1/\ker i_1'$, considérés comme plongés dans $\tilde{S}$ par les injections $\tilde{i}_0$ et $\tilde{i}_1$.

Travaux cités

[1] B. Beauzamy, *Opérateurs uniformément convexifiants entre espaces de Banach*, Studia Math. 57 (1976), p. 103–139.

[2] — *Propriétés géométriques des espaces d'interpolation*, Exposé n° 13, Séminaire Maurey–Schwartz 1974–75, École Polytechnique, Paris.

[3] A. Brunel, *Exposé XV*, Séminaire Maurey–Schwartz 1973–74, École Polytechnique, Paris.

[4] A. Brunel et L. Sucheston, *On J-convexity and some ergodic superproperties of Banach spaces*, Trans. A. M. S.

[5] R. C. James, *Some self dual properties of normed linear spaces*, Amer. Math. Studies, 69 (1972), p. 159–175.

[6] — *Uniformly non square Banach spaces*, Annals of Math. 80 (1964), pp. 542–550.

[7] J. Stern, *Exposés 7 et 8*, Séminaire Maurey–Schwartz 1974–75, École Polytechnique, Paris.

CENTRE DE MATHÉMATIQUES
COLE POLYTECHNIQUE, PALAISEAU, FRANCE

Received November 28, 1975 (1096)