PROBABILITY THEORY
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 5
PWN—POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS
WARSAW 1979

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СУММ СЛУЧАЙНОГО ЧИСЛА НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН С ПРАВИЛЬНО МЕНЯЮЩИМИСЯ ХВОСТАМИ

М. У. ГАФУРОВ и Ш. Т. САЛИЕВ

Математический институт, АН. Уз.ССР, Ташкент, СССР

1. Постановка задачи и результаты

Пусть

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots \tag{1}$$

последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин с общей функцией распределения $F(x)$ и характеристической функцией $f(t)$.

Положим

$$E\xi_1 = 0, \quad E\xi_1^2 = \sigma^2.$$

В дальнейшем будем считать, что выполнены следующие условия:

(а) При $x \to \infty$

$$\int_{-x}^{x} |u|^3 dF(u) \sim x^{1-\delta} l(x), \quad 0 < \delta \leqslant 1, \tag{2}$$

где $l(x)$ — медленно меняющиеся функция на бесконечности в смысле Карамата.

(б) Для некоторого p, $0 < p < 1$ при $x \to \infty$

$$\frac{\int_0^x u^3 dF(u)}{\int_{-x}^{x} |u|^3 dF(u)} \to p. \tag{3}$$

Заметим, что основываясь на известной теореме [1] устанавливающей связь между поведениями усеченных моментов и хвостами распределения, нетрудно увидеть, что при $0 < \delta < 1$ условия (2) и (3) эквивалентны следующим соотношениям соответственно; при $x \to \infty$

$$1-F(x)+F(-x) \sim \frac{1-\delta}{2+\delta}\, x^{-2-\delta} l(x), \tag{2'}$$

$$\frac{1-F(x)}{1-F(x)+F(-x)} \to p, \qquad \frac{F(-x)}{1-F(x)+F(-x)} \to 1-p. \tag{3'}$$

Отметим также, что из (2′) вытекает существование абсолютного момента порядка γ ($\gamma < 2+\delta$) у случайной величины ξ_1.

Введем функцию

$$\Omega_\delta(x) = \begin{cases} px^{1-\delta} & \text{при} \quad x>0, \\ (1-p)|x|^{1-\delta} & \text{при} \quad x<0, \end{cases} \qquad 0<\delta\leqslant 1.$$

где p определено в (3).

Далее, для некоторой функции $U(x)$ заданной на прямой определим операторы w_δ и $\tilde{w}_\delta$ следующими равенствами:

$$w_\delta U(x) = [\delta(1+\delta)(2+\delta)]^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} U(x-y)\, d\Omega_\delta(y),$$

$$\tilde{w}_\delta U(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U(x-y)-U(x)+yDU(x)-\frac{1}{2}y^2D^2U(x)}{y^3}\, d\Omega_\delta(y), \qquad 0<\delta\leqslant 1.$$

Здесь D — оператор дифференцирования.

Целью настоящей заметки является распространение результатов Т. Хёгланда [5] для сумм случайного числа независимых случайных величин.

Пусть $\eta = \eta(\lambda)$ случайная величина, принимающая только положительные целочисленные значения и не зависящая от ξ_i при любом i.

$$p_n = P(\eta = n), \quad E\eta = \alpha, \quad E(\eta-\alpha)^2 = \gamma^2,$$

$$Z_\eta = \frac{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_\eta}{\sigma\sqrt{\alpha}}.$$

Легко видеть, что $EZ_\eta = 0$, $EZ_\eta^2 = \alpha\sigma^2$. Далее, положим

$$F_\lambda(x) = P(Z_\eta < x), \qquad P_\lambda(x) = F'_\lambda(x),$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \qquad \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(u)\, du.$$

Основные результаты предлагаемой работы содержатся в следующих теоремах.

Теорема 1. *Предположим, что для случайных величин последовательности* (1) *выполнены следующие условия*:

1. $E|\xi_1|^3 = +\infty$;
2. *Имеют место соотношения* (2) *и* (3);
3. *При* $\lambda\to\infty$, $\alpha\to\infty$ *и* $\gamma^2 = O(\alpha)$.

Тогда, при $\lambda\to\infty$ *равномерно по* x

$$F_\lambda(x) = \left(1-\frac{l(\sqrt{\alpha})}{\sigma^{2+\delta}\alpha^{\delta/2}}\, w_\delta D^3\right)\Phi(x) + o\left(\frac{l(\sqrt{\alpha})}{\alpha^{\delta/2}}\right).$$

Теорема 2. *Пусть* $\sup_x P(x) \leqslant A$, *где* A — *постоянное. Тогда, при условиях теоремы* 1 *при* $\lambda\to\infty$

$$P_\lambda(x) = \left(1-\frac{l(\sqrt{\alpha})}{\sigma^{2+\delta}\alpha^{\delta/2}}\, \tilde{w}_\delta D^3\right)\varphi(x) + o\left(\frac{l(\sqrt{\alpha})}{\alpha^{\delta/2}}\right)$$

равномерно по x.

Аналогичные утверждения имеют место и для решетчатых распределений.

2. Доказательство теоремы 1

Очевидно,

$$f^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{\alpha}}\right) - e^{-nt^2/2\alpha} = d_{n,\lambda}(t) S_{n,\lambda}(t), \tag{5}$$

где

$$d_{n,\lambda}(t) = n\left[f\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{\alpha}}\right) - e^{-t^2/2\alpha}\right],$$

$$S_{n,\lambda}(t) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f^j\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{\alpha}}\right) e^{-((n-j-1)/2\alpha)t^2}.$$

Рассмотрим семейство функций $\{V_\lambda(x)\}$ зависящее от параметра λ определенных равенством

$$dV(x) = \frac{(\sigma\sqrt{\alpha}\, x)^3 dF(\sigma\sqrt{\alpha}\, x)}{\int_{-\sigma\sqrt{\alpha}}^{\sigma\sqrt{\alpha}} |u|^3 dF(u)}.$$

Положим

$$h_\lambda(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itu}-1-itu-\frac{1}{2}(itu)^2}{u^3}\, dV_\lambda(u), \qquad z_{n,\lambda}(t) = -n\left[e^{-t^2/2\alpha}-1+\frac{t^2}{2\alpha}\right],$$

(6)

$$C_{n,\lambda} = \frac{n}{\sigma^3\alpha^{3/2}} \int_{-\sigma\sqrt{\alpha}}^{\sigma\sqrt{\alpha}} |u|^3 dF(u), \qquad C_\lambda = \frac{1}{\sigma^3\alpha^{1/2}} \int_{-\sigma\sqrt{\alpha}}^{\sigma\sqrt{\alpha}} |u|^3 dF(u).$$

Учитывая, что $E\xi_1 = 0$ имеем

$$f\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{\alpha}}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \{e^{itu}-1-itu-\tfrac{1}{2}(itu)^2\}\, dF\left(\sigma(\sqrt{\alpha})\right) + 1 + \tfrac{1}{2}(itu)^2 \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dF(\sigma\sqrt{\alpha}). \tag{7}$$

Следовательно, из (5)–(7) получаем

$$d_{n,\lambda}(t) = c_{n,\lambda}h_\lambda(t)+r_{n,\lambda}(t),\tag{8}$$
$$f^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{\alpha}}\right)-e^{-nt^2/2\alpha} = r_{n,\lambda}(t)\cdot S_{n,\lambda}(t)+c_{n,\lambda}h_\lambda(t)\cdot S_{n,\lambda}(t).$$

Очевидно, что

$$F_\lambda(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n F_{n,\lambda}(x),\quad G_\lambda(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n G_{n,\lambda}(x) = (1+c_{n,\lambda}\tilde{w}_\lambda)\Phi(x),$$

где

$$G_{n,\lambda}(x) = (1+c_{n,\lambda}\tilde{w}_\delta)\Phi(x),$$
$$F_{n,\lambda}(x) = P\left(\frac{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}{\sigma\sqrt{\alpha}}<x\right).$$

Следуя С. В. Нагаеву [3], положим

$$\bar{F}_\lambda(x) = \sum_{n\geqslant[\alpha/2]} p_n F_{n,\lambda}(x),\quad \bar{G}_\lambda(x) = \sum_{n\geqslant[\alpha/2]} p_n G_{n,\lambda}(x).$$

Легко видеть, что

$$|F_\lambda(x)-G_\lambda(x)|\leqslant|\bar{F}_\lambda(x)-\bar{G}_\lambda(x)|+|F_\lambda(x)-\bar{F}_\lambda(x)|+|\bar{G}_\lambda(x)-G_\lambda(x)| = \tag{9}$$
$$= I_1+I_2+I_3.$$

В силу условия 3 теоремы имеем

$$I_2 = |F_\lambda(x)-\bar{F}_\lambda(x)| = \sum_{n=1}^{[\alpha/2]} p_n F_{n,\lambda}(x)\leqslant\sum_{n=1}^{[\alpha/2]} p_n\leqslant\frac{4\gamma^2}{\alpha^2} = O\left(\frac{1}{\alpha}\right).\tag{10}$$

Аналогично

$$I_3 = |\bar{G}_\lambda(x)-G_\lambda(x)|\leqslant\sum_{n=1}^{[\alpha/2]} p_n|G_{n,\lambda}(x)| = \sum_{n=1}^{[\alpha/2]} p_n|(1+c_{n,\lambda}\tilde{w}_\delta)\Phi(x)|\leqslant\tag{11}$$
$$\leqslant\frac{4\gamma^2}{\alpha^2}+\max_x|\tilde{w}_\delta\Phi(x)|\cdot\frac{C_\lambda}{2}\sum_{n=1}^{[\alpha/2]} p_n\leqslant$$
$$\leqslant\frac{4\gamma^2}{\alpha^2}\left(1+\max_x|\tilde{w}_\delta\Phi(x)|\cdot\frac{C_\lambda}{2}\right) = O\left(\frac{1}{\alpha}\right)+O\left(\frac{C_\lambda}{\alpha}\right) = o\left(\frac{l(\sqrt{\alpha})}{\alpha^{\delta/2}}\right).$$

Перейдем к оценке интеграла I_1.

Применяя известное неравенство К. Г. Эссеена имеем

$$|\bar{F}_\lambda(x)-\bar{G}_\lambda(x)|\leqslant\int_{-T}^{T}\left|\frac{f_\lambda(t)-g_\lambda(t)}{t}\right|dt+\frac{B}{T}.\tag{12}$$

Здесь $T>0$, $B = \max_x|G_\lambda^1(x)|<\infty$, $f_\lambda(t)\cdot ug_\lambda(t)$ соответствующие преобразования Фурье–Стильтьеса функций $\bar{F}_\lambda(x)$ и $\bar{G}_\lambda(x)$.

Положим $T = T_\lambda = (\varepsilon c_\lambda)^{-1}\cdot B$, где $\varepsilon>0$. Тогда, из (12) получим

$$|\bar{F}_\lambda(x)-\bar{G}_\lambda(x)|\leqslant\int_{-T_\lambda}^{T_\lambda}\left|\frac{f_\lambda(t)-g_\lambda(t)}{t}\right|dt+\varepsilon c_\lambda.\tag{13}$$

Далее, очевидно

$$f_\lambda(t) = \sum_{n\geqslant[\alpha/2]} p_n f^n\left(\frac{n}{\sigma\sqrt{\alpha}}\right),\quad g_\lambda(t) = \sum_{n\geqslant[\alpha/2]} p_n g_{n,\lambda}(t).$$

Воспользуясь тем, что преобразование Фурье–Стильтьеса функций $\tilde{w}_\delta\Phi(x)$ есть $\exp(-t^2/2)h(t)$, где

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{itu}-1-itu-\frac{1}{2}(itu)^2}{u^3}\,d\Omega_\delta(u)$$

имеем

$$g_{n,\lambda}(t) = (1+c_{n,\lambda}h(t))e^{-t^2/2}.\tag{14}$$

Как легко проверить, из (8), (14) следует следующее представление

$$f_\lambda(t)-g_\lambda(t) = \sum_{n\geqslant[\alpha/2]} p_n r_{n,\lambda}(t)\cdot S_{n,\lambda}(t)+\sum_{n\geqslant[\alpha/1]} p_n[e^{-nt^2/2\alpha}-e^{-t^2/2}]+\tag{15}$$
$$+e^{-t^2/2}[h_\lambda(t)-h(t)]\sum_{n\geqslant[\alpha/2]} p_n c_{n,\lambda}+h_\lambda(t)\sum_{n\geqslant[\alpha/2]} p_n c_{n,\lambda}[S_{n,\lambda}(t)-e^{-nt^2/2\alpha}]+$$
$$+h_\lambda(t)\sum_{n\geqslant[\alpha/2]} p_n c_{n,\lambda}[e^{-nt^2/2\alpha}-e^{t^2/2}].$$

Прежде чем перейти к оценке интеграла правой части (13), заметим следующее: согласно условию 1 теоремы и при вышеуказанном выборе T_λ при $\lambda\to\infty$

$$T_\lambda = o(\sqrt{\alpha}).\tag{16}$$

В силу (15) имеем

$$\int_{-T_\lambda}^{T_\lambda}\left|\frac{f_\lambda(t)-g_\lambda(t)}{t}\right|dt\leqslant\int_{-T_\lambda}^{T_\lambda}\sum_{n>[\alpha/2]} p_n\left|\frac{r_{n,\lambda}(t)\cdot S_{n,\lambda}(t)}{t}\right|dt+\tag{17}$$
$$+\int_{-T_\lambda}^{T_\lambda}\sum_{n\geqslant[\alpha/2]} P_n\left|\frac{e^{-nt^2/2\alpha}-e^{-t^2/2}}{t}\right|dt+\int_{-T_\lambda}^{T_\lambda}\left|\frac{h_\lambda(t)-h(t)}{t}\right|e^{-t^2/2}dt\sum_{n\geqslant[\alpha/2]} p_n c_{n,\lambda}+$$
$$+\int_{-T_\lambda}^{T_\lambda}\left|\frac{h_\lambda(t)}{t}\right|\sum_{n\geqslant[\alpha/2]} p_n c_{n,\lambda}|S_{n,\lambda}(t)-e^{-nt^2/2\alpha}|dt+$$
$$+\int_{-T_\lambda}^{T_\lambda}\left|\frac{h_\lambda(t)}{t}\right|\sum_{n\geqslant[\alpha/2]} p_n c_{n,\lambda}|e^{-nt^2/2\alpha}-e^{-t^2/2}|dt = \sum_{k=1}^{5} A_k.$$

Переходим к оценке интегралов $A_1, A_2, \ldots, A_5$. Имеем

$$A_1 = \int_{-T_\lambda}^{T_\lambda}\Big(\sum_{n\geqslant[\alpha/2]} p_n\Big|\frac{r_{n,\lambda}(t)\cdot S_{n,\lambda}(t)}{t}\Big|\Big)dt = \int_{-1}^{1}\sum_{n\geqslant[\alpha/2]} p_n\Big|\frac{r_{n,\lambda}(t)\cdot S_{n,\lambda}(t)}{t}\Big|dt+$$
$$+\int\limits_{1<|t|<T_\lambda}\sum_{n\geqslant[\alpha/2]} p_n\Big|\frac{r_{n,\lambda}(t)\cdot S_{n,\lambda}(t)}{t}\Big|dt = A_1'+A_1''.$$

Используя очевидные неравенства

$$r_{n,\lambda}(t)\leqslant\frac{nt^4}{8\alpha^2},\qquad |S_{n,\lambda}(t)|\leqslant 1$$

получаем

(18)
$$A_1' = \frac{1}{8\alpha^2}\int_{-1}^{1}|t|^3dt\sum_{n\geqslant[\alpha/2]} np_n \leqslant \frac{1}{16\alpha}.$$

Далее,

(19)
$$A_1'' = \int\limits_{1<|t|<T_\lambda}\sum_{n\geqslant[\alpha/2]} p_n\Big|\frac{r_{n,\lambda}(t)\cdot S_{n,\lambda}(t)}{t}\Big|dt \leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{8\alpha^2}\int\limits_{1<|t|<T_\lambda}|t|^3\sum_{n\geqslant[\alpha/2]} np_n|S_{n,\lambda}(t)|\,dt.$$

Оценим $S_{n,\lambda}(t)$. Пусть

$$F^s(x) = \int_{-\infty}^{\infty}F(x+u)\,dF(u),\qquad M(x) = \int_{-x}^{x}u^2dF^s(u).$$

Очевидно, что в рассматриваемом промежутке суммирования по n

(20)
$$|S_{n,\lambda}(t)|\leqslant\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\Big|f^j\Big(\frac{t}{\sigma\sqrt{\alpha}}\Big)\exp\Big(-\frac{[\alpha/2]-j-1}{2\alpha}\Big)\Big|.$$

Как замечено в [5]

(21)
$$f^j\Big(\frac{t}{\sigma\sqrt{\alpha}}\Big)\leqslant\exp\Big\{-\frac{jt^2}{5\sigma^2\alpha}M\Big(\frac{\sigma\sqrt{\alpha}}{|t|}\Big)\Big\}.$$

В силу (21) имеем

(22)
$$f^j\Big(\frac{t}{\sigma\sqrt{\alpha}}\Big)\exp\Big(-\frac{[\alpha/2]-j-1}{2\alpha}t^2\Big)\leqslant\exp\Big\{-\frac{jt^2}{5\sigma^2\alpha}M\Big(\frac{\sigma\sqrt{\alpha}}{|t|}\Big)-$$
$$-\frac{[\alpha/2]-j-1}{2\alpha}\Big\}\leqslant\exp\Big\{-\frac{t^2}{5\sigma^2\alpha}\Big[M\Big(\frac{\sigma\sqrt{\alpha}}{|t|}\Big)+([\alpha/2]-j-1)\sigma^2\Big]\Big\}.$$

Очевидно, что

(23)
$$M\Big(\frac{\sigma\sqrt{\alpha}}{|t|}\Big) = 2\sigma^2-\int\limits_{|u|>\sigma\sqrt{\alpha}/|t|}u^2dF^s(u).$$

Отсюда имеем

(24)
$$M\Big(\frac{\sigma\sqrt{\alpha}}{|t|}\Big)\leqslant 2\sigma^2,\quad\text{а также}\quad M(\sigma\sqrt{\alpha})\leqslant 2\sigma^2.$$

В силу леммы 3 работы [6] из (23) получаем

(25)
$$M\Big(\frac{\sigma\sqrt{\alpha}}{|t|}\Big)\geqslant 2\sigma^2-40\int\limits_{|u|>\sigma\sqrt{\alpha}/2|t|}u^2\,dF(u).$$

Из (24), (25) в промежутке $1<|t|<T_\lambda = \varepsilon\sigma\sqrt{\alpha}$ (см. (16)) имеем

(26)
$$|t|\,\frac{M(\sigma\sqrt{\alpha}/|t|)}{M(\sigma\sqrt{\alpha})}\geqslant 1-\frac{20}{\sigma^2}\int\limits_{|u|>\sigma\sqrt{\alpha}/2|t|}u^2dF(u)\geqslant 1-\frac{20}{\sigma^2}\int\limits_{|u|>1/2\varepsilon}u^2dF(u).$$

Поскольку ε произвольное, то

(27)
$$\int\limits_{|u|>1/2\varepsilon}u^2dF(u)\leqslant\frac{\sigma^2}{40}.$$

Следовательно, из (26), (27) получаем

(28)
$$|t|M(\sigma\sqrt{\alpha}/|t|)\geqslant\tfrac{1}{2}M(\sigma\sqrt{\alpha}).$$

Из (22), (28) имеем

(29)
$$\Big|f^j(t/\sigma\sqrt{\alpha})\exp\Big(-\frac{[\alpha/2]-j-1}{2\alpha}t^2\Big)\Big|\leqslant$$
$$\leqslant\exp\Big\{-\frac{|t|}{5}\Big[\frac{\frac{1}{2}jM(\sigma\sqrt{\alpha})-j\sigma^2+[\alpha/2]\sigma^2-\sigma^2}{\alpha\sigma^2}\Big]\Big\}.$$

Так как при $\lambda\to\infty$

$$\frac{1}{\alpha\sigma^2}\big[\tfrac{1}{2}jM(\sigma\sqrt{\alpha})-j\sigma^2+[\alpha/2]\sigma^2-\sigma^2\big]\to\frac{1}{2}$$

то, существует постоянное c $(0<c<\frac{1}{2})$ такое, что

(30)
$$\frac{1}{\alpha\sigma^2}\big[\tfrac{1}{2}jM(\sigma\sqrt{\alpha})-j\sigma^2+([\alpha/2]-1)\sigma^2\big]>c$$

при достаточно больших λ и при всех j.

Объединяя (20), (29) и (30) заключаем, что в промежутке $1<|t|<\varepsilon\sigma\sqrt{\alpha}$ при больших λ

(31)
$$|S_{n,\lambda}(t)|<e^{-c|t|}.$$

Из (19) и (31) легко следует

(32)
$$A_1''\leqslant\frac{1}{8\alpha^2}\int\limits_{1<|t|<T_\lambda}|t|^3e^{-c|t|}dt\sum_{n\geqslant[\alpha/2]}np_n = O\Big(\frac{1}{\alpha}\Big).$$

В силу оценок (18) и (32) имеем

(33)
$$A_1 = O\Big(\frac{1}{\alpha}\Big).$$

Перейдем к оценке интегралов A_3 и A_4. Проделая аналогичные рассуждения работы [5], получаем, что при условиях 1, 2 теоремы, при $\lambda\to\infty$

$$\int_{-T_\lambda}^{T_\lambda}\left|\frac{h_\lambda(t)-h(t)}{t}\right|e^{-t^2/2}dt\to 0. \tag{34}$$

Легко видеть, что

$$\sum_{n\geqslant[\alpha/2]}p_n c_{n,\lambda}\leqslant c_\lambda. \tag{35}$$

Оценка

$$A_3=O\left(\frac{l(\sqrt{\alpha})}{\alpha^{\delta/2}}\right) \tag{36}$$

следует из (34) и (35). Далее,

$$|S_{n,\lambda}(t)-e^{-nt^2/2\alpha}|=\left|\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\left[f^j\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{\alpha}}\right)-e^{-jt^2/2\alpha}\right]e^{((n-j-1)/2\alpha)t^2}+\right. \tag{37}$$

$$\left.+e^{-((n-1)/2\alpha)t^2}-e^{-nt^2/2\alpha}\right|\leqslant\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}j\left|f\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{\alpha}}\right)-e^{-t/2\alpha}\right|+$$

$$+|1-e^{-t^2/2\alpha}|\leqslant n\left|f\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{\alpha}}\right)-e^{-t^2/2\alpha}\right|+|1-e^{-t^2/2\alpha}|.$$

Применяя (37) имеем

$$\frac{1}{\alpha}\sum_{n\geqslant[\alpha/2]}np_n|S_{n,\lambda}(t)-e^{-nt^2/2\alpha}|\leqslant\frac{1}{\alpha}\sum_{n\geqslant[\alpha/2]}np_n\left\{n\left|f\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{\alpha}}\right)-e^{-t^2/2\alpha}\right|+\right. \tag{38}$$

$$\left.+|1-e^{-t^2/2\alpha}|\right\}\leqslant\alpha\left|f\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{\alpha}}\right)-e^{-nt^2/2\alpha}\right|\left(\frac{1}{\alpha^2}\sum_{n\geqslant[\alpha/2]}n^2p_n\right)+$$

$$+\frac{1}{\alpha}|1-e^{-t^2/2\alpha}|\sum_{n\geqslant[\alpha/2]}np_n\leqslant\alpha\left|f\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{\alpha}}\right)-e^{-t^2/2\alpha}\right|\left(\frac{\gamma^2+\alpha^2}{\alpha^2}+\frac{t^2}{2\alpha}\right).$$

В силу того, что

$$\alpha\left|f\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{\alpha}}\right)-e^{-t^2/2\alpha}\right|\to 0$$

и из условия 3 теоремы, правая часть (38) стремится к нулю, и следовательно, при $\lambda\to 0$

$$\frac{1}{\alpha}\sum_{n\geqslant[\alpha/2]}np_n|S_{n,\lambda}-e^{-nt^2/2\alpha}|\to 0. \tag{39}$$

Далее, проведя аналогичные рассуждения как и в работах [5], [1] получаем, что при больших λ

$$|h_\lambda(t)|<K\cdot t^2(1+|t|), \tag{40}$$

где K не зависит от λ.

Рассмотрим интеграл

$$J_\lambda=\frac{1}{\alpha}\int_{-T_\lambda}^{T_\lambda}\left|\frac{h_\lambda(t)}{t}\right|\sum_{n\geqslant[\alpha/2]}np_n|S_{n,\lambda}(t)-e^{-nt^2/2\alpha}|dt. \tag{41}$$

Согласно неравенствам (31) и (40) подинтегральная функция в (41) мажорируется с интегрируемой функцией и в то же время в силу соотношения (39) она стремится к нулю. Следовательно, по теореме Лебега о мажорируемой сходимости интегралов заключаем, что при $\lambda\to\infty$

$$J_\lambda\to 0. \tag{42}$$

Так как

$$A_4=\int_{-T_\lambda}^{T_\lambda}\left|\frac{h_\lambda(t)}{t}\right|\sum_{n\geqslant[\alpha/2]}p_nc_{n,\lambda}|S_{n,\lambda}(t)-e^{-nt^2/2\alpha}|dt=c_\lambda\cdot J_\lambda$$

то в силу условия 2 теоремы и из (42) при $\lambda\to\infty$

$$A_4=O\left(\frac{l(\sqrt{\alpha})}{\alpha^{\delta/2}}\right). \tag{43}$$

Воспользуясь неравенством

$$|e^{-nt^2/2\alpha}-e^{-t^2/2}|\leqslant\frac{|n-\alpha|}{2\alpha}t^2\exp\left\{-\min(n,\alpha)\frac{t^2}{2}\right\} \tag{44}$$

и условием 3 теоремы 1 легко установить, что

$$A_2=O\left(\frac{1}{\alpha}\right). \tag{45}$$

Далее, аналогичным образом, применяя неравенства (40), (44) получаем

$$A_5=O\left(\frac{1}{\alpha}\right). \tag{46}$$

Объединяя оценки (13), (17), (33), (36) и (43), (45), (46) заключаем, что при $\lambda\to\infty$

$$|\bar{F}_\lambda(x)-\bar{G}_\lambda(x)|=o\left(l\sqrt{\alpha}/\alpha^{\delta/2}\right). \tag{47}$$

Из (9)–(11) и (47) следует

$$F_\lambda(x)=(1+c_\lambda\tilde{w}_\delta)\Phi(x)+o\left(l\sqrt{\alpha}/\alpha^{\delta/2}\right). \tag{48}$$

Далее, нетрудно проверить, что

$$\tilde{w}_\delta\Phi(x)=-\tilde{w}_\delta D^3\Phi(x). \tag{49}$$

Из (48) и (49) вытекает утверждение теоремы 1.

3. Доказательство теоремы 2

Пусть

$$\varphi_{n,\lambda}(x) = (1+c_{n,\lambda}\tilde{w}_\delta)\varphi(x).$$

Очевидно,

$$P_\lambda(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n P_{n,\lambda}(x), \qquad \varphi_\lambda(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \varphi_{n,\lambda}(x) = (1+c_\lambda \tilde{w})\varphi(x),$$

где $P_{n,\lambda}(x)$ плотность соответствующая $F_{n,\lambda}(x)$. Положим

$$\overline{P}_{n,\lambda}(x) = \sum_{n \geqslant [\alpha/2]} p_n P_{n,\lambda}(x), \qquad \overline{\varphi}_\lambda(x) = \sum_{n \geqslant [\alpha/2]} p_n \varphi_{n,\lambda}(x).$$

Ясно, что

$$(50) \qquad |P_\lambda(x)-\varphi_\lambda(x)| \leqslant |\overline{P}_\lambda(x)-\overline{\varphi}_\lambda(x)| + |P_\lambda(x)-\overline{P}_\lambda(x)| + |\overline{\varphi}_\lambda(x)-\varphi_\lambda(x)| = J_1+J_2+J_3.$$

Из условий теоремы вытекает, что

$$P_{n,\lambda}(x) \leqslant A$$

и следовательно

$$(51) \qquad J_2 = A\sum_{n=1}^{[\alpha/2]} p_n \leqslant A\frac{4\gamma^2}{\alpha^2} = O\left(\frac{1}{\alpha}\right).$$

Совершенно аналогичным образом, как и при оценке I_3 получаем

$$(52) \qquad J_3 = o\left(l\sqrt{(\alpha)}/\alpha^{\delta/2}\right).$$

Далее, по формуле обращения для преобразования Фурье–Стильтьеса

$$(53) \qquad J_1 = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\sum_{n\geqslant[\alpha/2]} p_n\left[f^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{\alpha}}\right)-g_{n,\lambda}(t)\right]dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{|t|\leqslant\varepsilon\sigma\sqrt{\alpha}} \sum_{n\geqslant[\alpha/2]} p_n\left|f^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{\alpha}}\right)-g_{n,\lambda}(t)\right|dt +$$

$$+\int_{|t|>\varepsilon\sigma\sqrt{\alpha}} \sum_{n\geqslant[\alpha/2]} p_n\left|f^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{\alpha}}\right)-g_{n,\lambda}(t)\right| = \Sigma_1+\Sigma_2.$$

Оценка

$$(54) \qquad \Sigma_1 = \int_{|t|\leqslant\varepsilon\sigma\sqrt{\alpha}} \sum_{n\geqslant[\alpha/2]} p_n\left|f^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{\alpha}}\right)-g_{n,\lambda}(t)\right|dt = o\left(l(\sqrt{\alpha})/\alpha^{\delta/2}\right)$$

получается совершенно аналогичным образом как и в теореме 1.

Переходим к оценке Σ_2. Имеем

$$(55) \qquad \Sigma_2 = \int_{|t|>\varepsilon\sigma\sqrt{\alpha}} \sum_{n\geqslant[\alpha/2]} p_n\left|f^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{\alpha}}\right)-g_{n,\lambda}(t)\right|dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_{|t|>\varepsilon\sigma\sqrt{\alpha}} \sum_{n\geqslant[\alpha/2]} p_n\left|f^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{\alpha}}\right)\right|dt + \int_{|t|>\varepsilon\sigma\sqrt{\alpha}} \sum_{n\geqslant[\alpha/2]} p_n|g_{n,\lambda}(t)|\,dt = \Sigma_1'+\Sigma_2''.$$

Очевидно,

$$(56) \qquad \Sigma_2' = \int_{|t|>\varepsilon\sigma\sqrt{\alpha}} \sum_{n\geqslant[\alpha/2]} p_n\left|f^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{\alpha}}\right)\right|dt \leqslant \int_{|t|>\varepsilon\sigma\sqrt{\alpha}} \left|f^{[\alpha/2]}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{\alpha}}\right)\right|dt.$$

В силу условия теоремы существует число d_ε, $d_\varepsilon < 1$, такое, что

$$\left|f\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{\alpha}}\right)\right| < d_\varepsilon \quad \text{для} \quad |t| \geqslant \varepsilon\sigma\sqrt{\alpha}.$$

Следовательно,

$$(57) \qquad \Sigma_2' \leqslant d_\varepsilon^{[\alpha/2]-2}\int_{|t|>\varepsilon\sigma\sqrt{\alpha}}\left|f\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{\alpha}}\right)\right|^2 dt \leqslant A d_\varepsilon^{[\alpha/2]-2}.$$

Правая часть неравенства (57) стремится к нулю быстрее чем любая степень числа $\frac{1}{\alpha}$.

Как легко проверить

$$(58) \qquad \Sigma_2'' \leqslant \sum_{n\geqslant[\alpha/2]} p_n \int_{|t|>\varepsilon\sigma\sqrt{\alpha}} e^{-t^2/2}dt + K_1\sum_{n\geqslant[\alpha/2]} p_n c_{n,\lambda}\int_{|t|>\varepsilon\sigma\sqrt{\alpha}} |t|(1+t^2)e^{2-t^2/2}dt = o\left(l(\sqrt{\alpha})/\alpha^{\delta/2}\right),$$

где K_1 — постоянное.

Из (57), (58) получаем, что при $\lambda\to\infty$

$$(59) \qquad \Sigma_2 = o\left(l(\sqrt{\alpha})/\alpha^{\delta/2}\right).$$

Далее, из (53), (54) и (55) вытекает

$$(60) \qquad J_1 = o\left(l(\sqrt{\alpha})/\alpha^{\delta/2}\right).$$

Объединяя оценки (50)–(52) и (60) получаем

$$P_\lambda(x) = (1+c_\lambda\tilde{w}_\delta)\varphi(x) + o\left(l(\sqrt{\alpha})/\alpha^{\delta/2}\right).$$

Из последнего соотношения следует утверждение теоремы 2.

Замечание. Проследив доказательства теорем 1, 2 нетрудно убедиться в том, что применяемый метод также позволяет получить аналогичные асимптотические разложения и в метрике пространств функций L_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, которые обобщают результаты работ [2].

Литература

[1] М. У. Гафуров, *Об асимптотическом поведении распределений сумм независимых случайных величин с бесконечными третьими моментами*, Изв. АН Уз.ССР, серия физ.-мат. наук 6 (1972) стр. 11–18.

[2] —, *Некоторые глобальные теоремы для сумм независимых случайных величин без предположения существования моментов третьего порядка*, Литов. мат. сб. 15 3 (1975).

[3] С. В. Нагаев, *Об одной теореме Г. Роббинса*, Изв. АН Уз.ССР, серия физ.-мат. наук 3 (1968), стр. 7–10.

[4] В. В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, т. 2, 1967.
[5] [Т. Хёгланд] Th. Höglund, *On the convergence of convolutions of distributions with regularly varying tails*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete 15 (1970), стр. 263–272.
[6] [К. Г. Эссеен] C. G. Esseen, *On the remainder term in the central limit theorem*, Ark. Mat. 8 (1969), стр. 7–15.

Presented to the Semester
Probability Theory
February 11–June 11, 1976

PROBABILITY THEORY
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 5
PWN—POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS
WARSAW 1979

THE TAIL STRUCTURE OF NONHOMOGENEOUS FINITE STATE MARKOV CHAINS: SURVEY

MARIUS IOSIFESCU

National Institute of Metrology, Centre of Mathematical Statistics, Bucharest, Romania

1. Introduction and summary

Let S denote a finite set. Consider a (varying) probability distribution $p = (p(i))_{i\in S}$ on S and a (fixed) sequence of stochastic matrices $P_n = (p_n(i,j))_{i,j\in S}$, $n \geqslant 0$. These objects define a nonhomogeneous finite state Markov chain with state space S, initial probability distribution p and transition matrices $P_n, n \geqslant 0$. More precisely, as is well known, a probability space $(\Omega, \mathscr{K}, \mathsf{P}_p)$ can be set up and random variables $X(n)$, $n \geqslant 0$, defined on it such that

$$\mathsf{P}_p(X(0) = i) = p(i), \quad i \in S,$$
$$\mathsf{P}_p(X(n+1) = j | X(u),\ 0 \leqslant u \leqslant n) = \mathsf{P}_p(X(n+1) = j|X(n)) = p_n(X(n), j), \quad n \geqslant 0, j \in S,$$

P_p-almost surely.

Let us denote by $\mathscr{K}^n \subset \mathscr{K}$ the σ-algebra generated by the random variables $X(n), X(n+1), \ldots, n \geqslant 0$, and put $\mathscr{T} = \bigcap_{n\geqslant 0} \mathscr{K}^n$. The σ-algebra $\mathscr{T}$ is called the *tail σ-algebra* of the Markov chain considered.

This paper is aimed at giving a self-contained account of recent investigations concerning the structure of the tail σ-algebra $\mathscr{T}$.

Citations in the text have been kept to a minimum. References and various remarks have been collected in the final section of the paper.

2. Preliminaries

2.1. Given a probability space $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ an event $A \in \mathscr{F}$ is said to be a P-*atom* if $\mathsf{P}(A) > 0$ and for any event $B \subset A$ either $\mathsf{P}(B) = 0$ or $\mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(A)$. Next, an event $N \in \mathscr{F}$ is said to be P-*completely nonatomic* if for any positive number $c \leqslant \mathsf{P}(B)$ there exists an event $C \subset B$ such that $\mathsf{P}(C) = c$. It is well known (see, e.g. Loève [14], p. 100) that Ω can be partitioned as

(1) $$\Omega = N \cup \Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big),$$