icm

ACTA ARITHMETICA
XXXIX (1981)

Conspectus materiae tomi XXXIX, fasciculi 3

	Pagina
M. J. Bertin, Familles fermées de nombres algébriques	207–240
M. Langevin, Facteurs premiers d'entiers en progression arithmétique	241–249
G. Myerson, Period polynomials and Gauss sums for finite fields	251–264
R. Kaufman, On the theorem of Jarník and Besicovitch	265–267
O. Körner, Class numbers of binary quadratic lattices over algebraic number fields	269–279
R. J. Evans, Rational reciprocity laws	281–294
Ph. Satgé, Corps cubiques de discriminant donné	295–301

La revue est consacrée à la Théorie des Nombres
The journal publishes papers on the Theory of Numbers
Die Zeitschrift veröffentlicht Arbeiten aus der Zahlentheorie
Журнал посвящен теории чисел

L'adresse de la Rédaction et de l'échange | Address of the Editorial Board and of the exchange | Die Adresse der Schriftleitung und des Austausches | Адрес редакции и книгообмена

ACTA ARITHMETICA

ul. Śniadeckich 8, 00-950 Warszawa

Les auteurs sont priés d'envoyer leurs manuscrits en deux exemplaires
The authors are requested to submit papers in two copies
Die Autoren sind gebeten um Zusendung von 2 Exemplaren jeder Arbeit
Рукописи статей редакция просит предлагать в двух экземплярах

© Copyright by Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1981

ISBN 83-01-01505-5 ISSN 0065-1036

PRINTED IN POLAND

WROCŁAWSKA DRUKARNIA NAUKOWA

Familles fermées de nombres algébriques

par

MARIE JOSÉ BERTIN (Paris)

Introduction. L'ensemble Σ des nombres algébriques θ, $\theta > 1$, dont tous les conjugués autres que θ, s'il y en a, appartiennent au disque ouvert $|z| < 1$ de $\boldsymbol{C}$, joue un grand rôle dans de nombreuses questions mathématiques. En particulier, on connait l'importance du sous-ensemble remarquable S des nombres de Pisot formé des *entiers* algébriques de Σ, dans divers domaines comme la répartition modulo 1, les nombres normaux ou l'analyse harmonique.

Le but de ce travail est l'étude de l'ensemble Σ et de certaines de ses généralisations.

En 1944, au grand étonnement d'éminents mathématiciens comme C. Siegel et A. Weil, Salem [13] montrait que l'ensemble S était fermé pour la topologie usuelle de $\boldsymbol{R}$. Mais l'ensemble S resta alors unique de son espèce jusqu'en 1964 où Pisot mit en évidence d'autres sous-ensembles fermés remarquables de Σ, les ensembles S_q.

Pour tout entier q, $q \geqslant 1$, on dit que θ appartient à S_q si:

(1) le nombre θ est réel strictement supérieur à 1;

(2) il existe un polynôme $Q(z) \in \boldsymbol{Z}[z]$ avec $Q(0) = q$, tel que $1/\theta$ soit le seul zéro de Q dans le disque fermé $|z| \leqslant 1$ de $\boldsymbol{C}$, ce zéro étant simple;

(3) il existe un polynôme $A(z) \in \boldsymbol{Z}[z]$ avec $A(0) \geqslant q$, tel que $A(1/\theta) \neq 0$ et que

$$|A(z)| \leqslant |Q(z)| \quad \text{sur} \quad |z| = 1.$$

Chaque ensemble S_q contient l'ensemble $S = S_1$ et un résultat tout récent de Martine Pathiaux vient d'établir que l'ensemble Σ est la réunion des ensembles S_q pour q entier positif.

Dans ce travail, nous donnons une nouvelle caractérisation de l'ensemble Σ, ce qui nous permet de définir d'autres sous-ensembles fermés de Σ, les ensembles $\Sigma_{q,h}$, totalement différents des ensembles S_q et dont la réunion constitue l'ensemble Σ.

L'ensemble $\Sigma_{q,h}$ défini pour q entier, $q \geqslant 2$ et h réel, $0 < h < 1$, est formé des nombres algébriques θ de Σ tel que $1/\theta$ soit le seul zéro (simple) situé dans $|z| < 1$ d'une équation de la forme $z = A(z)/Q(z)$ où $A(z)$

$\in \mathbf{Z}[z]$, $Q(z) \in \mathbf{Z}[z]$ avec $A(0) \neq 0$, $Q(0) = q$, la fraction rationnelle $A(z)/Q(z)$ étant holomorphe dans $|z| \leqslant 1$ et vérifiant $|A(z)/Q(z)| \leqslant h$ sur $|z| = 1$, $h < 1$. Parallèlement à cette caractérisation de l'ensemble Σ, nous montrons que l'ensemble $\Sigma'(2)$ des nombres algébriques imaginaires θ, $|\theta| > 1$, dont tous les conjugués autres que l'imaginaire conjugué sont dans $|z| < 1$, est la réunion des sous-ensembles $\Sigma'_{q,h}(2)$ définis pour q entier, $q \geqslant 2$ et h réel $0 < h < 1$, de manière analogue aux $\Sigma_{q,h}$ en remplaçant la condition $1/\theta$ unique racine simple de $z = A(z)/Q(z)$ par la condition $1/\theta$ et $1/\bar{\theta}$ seuls zéros (simples) dans $|z| \leqslant 1$ de l'équation $z^2 = A(z)/Q(z)$.

Nous montrons alors, au chapitre 2, que les ensembles $\Sigma_{q,h}$ et $\Sigma'_{q,h}(2)$ sont fermés et que leur réunion pour q et h variant constitue respectivement l'ensemble Σ et l'ensemble $\Sigma'(2)$. Les ensembles $\Sigma_{q,h}$ contiennent en particulier, pour h assez voisin de 1, des éléments de tous les S_k pour $k = 1, 2, \ldots, q-1$.

Nous étudions ensuite, les ensembles dérivés successifs des ensembles $\Sigma_{q,h}$, établissant que, pour h assez grand, les deux premiers ensembles dérivés ne sont jamais vides mais que le $n^{\text{ième}}$ ensemble dérivé est vide pour $n \geqslant q^4$.

Après avoir défini l'ensemble fermé $\mathscr{T}_q$ ($\mathscr{T}_q = \Sigma_{q,1}$) et montré qu'il contient des nombres essentiellement différents de ceux des $\Sigma_{q,h}$ pour $0 < h < 1$, nous établissons, au chapitre 3, un théorème d'approximation des éléments des $\Sigma_{q,h}$ et $\mathscr{T}_q$. Ceci nous permet de montrer que les éléments des $\Sigma_{q,h}$ $(0 < h \leqslant 1)$ sont bornés par $q + \sqrt{q^2 - 1}$, borne effectivement atteinte pour $h = 1$, et que les plus grands éléments de $\Sigma_{q,h}$ pour $0 < h < 1$ sont des nombres de Pisot.

Enfin, en généralisant au chapitre 4, les ensembles $\mathscr{T}_q$ au corps p-adique $\mathbf{Q}_p$ puis à l'anneau des I — adèles rationnels, on trouve des sous-ensembles fermés de nombres algébriques, les ensembles $\mathscr{T}_q^I$ contenus dans l'ensemble S_I des nombres algébriques introduit par Annette Decomps.

Préliminaires. Nous allons tout d'abord rappeler quelques définitions et un théorème dû à Pisot ([11], [12]).

Définition 0.1. On appelle $\mathscr{F}(q, k, \delta)$ *l'ensemble des fractions rationnelles* $\varphi(z) = A(z)/Q(z)$ où les polynômes $A(z)$ et $Q(z)$ sont à coefficients entiers rationnels vérifiant $A(0) \neq 0$, $Q(0) = q$ entier positif fixé, $Q(z)$ possédant dans $|z| \leqslant 1$ au plus k zéros, $k \geqslant 0$, tous situés dans une couronne fixe $0 < \delta \leqslant |z| < 1$ (si $k = 0$, $\delta = 1$) et où $\varphi(z)$ vérifie $|\varphi(z)| \leqslant 1$ sur $|z| = 1$.

Théorème 0.2. *L'ensemble $\mathscr{F}(q, k, \delta)$ est compact pour la topologie de la convergence uniforme dans tout disque $|z| \leqslant r$, $r < \delta$ dans $\mathbf{C}$ et dans tout disque $|z|_p \leqslant r_p$, $r_p < |q|_p$ dans $\mathbf{C}_p$. On peut préciser ainsi ce théorème: de toute suite de fractions rationnelles $\varphi_n(z)$ de $\mathscr{F}(q, k, \delta)$ possédant les pôles $\alpha_{i,n}$, $1 \leqslant i \leqslant k$, on peut extraire une sous-suite (notée ici de la même façon) telle que la suite $(\alpha_{i,n})_{n \in \mathbf{Z}}$ converge vers α_i dans $|z| \leqslant 1$ quand n tend vers $+\infty$ et telle que la suite de fonctions holomorphes dans $|z| \leqslant 1$, $\varphi_n(z) \prod_{i=1}^{k} \frac{z - \alpha_{i,n}}{1 - \bar{\alpha}_{i,n} z}$ converge uniformément sur tout compact de $|z| < 1$ vers la fonction holomorphe dans $|z| \leqslant 1$, $\varphi(z) \prod_{|\alpha_i| < 1} \frac{z - \alpha_i}{1 - \bar{\alpha}_i z}$, où $\varphi(z)$ appartient à $\mathscr{F}(q, k, \delta)$ et possède au plus k pôles pris parmi les α_i de module strictement inférieur à 1.*

En particulier, l'ensemble $\mathscr{F}(q, 0)$ est compact pour la topologie de la convergence uniforme dans tout compact de $|z| < 1$.

Définition 0.3. On désigne par S *l'ensemble des nombres de Pisot*, c'est-à-dire l'ensemble des entiers algébriques supérieurs à 1 dont tous les conjugués ont un module strictement inférieur à 1.

Définition 0.4. On appelle S_q *l'ensemble des nombres algébriques réels* θ ayant les propriétés suivantes: θ est un nombre réel supérieur à 1 et $1/\theta$ est le seul zéro situé dans $|z| \leqslant 1$ d'un polynôme à coefficients entiers rationnels tel que $Q(0) = q$ et tel qu'il existe un polynôme $A(z)$ à coefficients entiers rationnels vérifiant $A(1/\theta) \neq 0$, $|A(0)| \geqslant q$ (q entier positif) et $|A(z)| \leqslant |Q(z)|$ sur $|z| = 1$.

Définition 0.5. On désigne par T *l'ensemble des nombres de Salem*, c'est-à-dire l'ensemble des entiers algébriques supérieurs à 1 dont tous les conjugués ont un module inférieur ou égal à 1, certains de ces conjugués ayant effectivement un module égal à 1.

Définition 0.6. On désigne par P *l'ensemble de toutes les valuations du corps $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels*, $|\ |_p$ désignant la *valuation p-adique*, $\mathbf{Q}_p$ étant le *complété de $\mathbf{Q}$* pour la valuation p-adique et $\mathbf{C}_p$ le *complété de la clôture algébrique de $\mathbf{Q}_p$* pour cette même valuation p-adique. Si I est un ensemble fini de P, on appellera V_I *l'anneau des I-adèles rationnels*, c'est-à-dire l'ensemble des $x = (x_p)_{p \in P}$ où $x_p = 0$ si p n'appartient pas à I.

Définition 0.7. On appelle S_I *l'ensemble des éléments* $\theta = (\theta_p)_{p \in I}$ de V_I vérifiant pour tout p de I, $|\theta_p|_p > 1$ et pour lesquels il existe un polynôme $A(z)$ à coefficients entiers rationnels ayant les propriétés suivantes:

(1) θ est racine du polynôme $A(z)$,

(2) pour tout p de I, les racines de $A(z)$ dans $\mathbf{C}_p$, distinctes de θ_p, appartiennent au disque $|z|_p \leqslant 1$,

(3) pour tout p de P, $p \notin I$, les racines de $A(z)$ dans $\mathbf{C}_p$ appartiennent au disque $|z|_p \leqslant 1$.

Définition 0.8. On appelle S_I^{ψ} l'ensemble des éléments *algébriques* θ de V_I tels que $|\theta_p|_p > 1$ pour tout p de I et pour lesquels il existe un polynôme $A(z)$ à coefficients entiers rationnels ayant les propriétés suivantes:

(1) θ est racine de $A(z)$ dans V_I,

(2) les racines de $A(z)$ dans $C_{p'}$ (distinctes de $\theta_{p'}$ si $p' \in I$) appartiennent au disque $|z|_{p'} < 1$,

(3) pour tout p de I, les racines de $A(z)$ dans C_p, distinctes de θ_p, appartiennent au disque $|z|_p \leqslant 1$,

(4) pour tout p de P, $p \notin I$, les racines de $A(z)$ dans C_p appartiennent au disque $|z|_p \leqslant 1$.

I. Définition des ensembles $\Sigma_{q,h}$ et $\Sigma^i_{q,h}(2)$

Les nombres algébriques considérés dans les trois premiers chapitres sont des nombres algébriques sur le corps Q des nombres rationnels.

Après avoir rappelé les résultats d'A. Connes sur les ordres faibles et leur application à la localisation des zéros de polynômes ([6], [7]), nous donnerons une caractérisation de l'ensemble Σ des nombres algébriques θ, $\theta > 1$, dont tous les autres conjugués ont un module strictement inférieur à 1. Nous définirons alors de nouveaux sous-ensembles fermés de l'ensemble Σ, les ensembles $\Sigma_{q,h}$.

0. Rappels. On désigne par Λ l'ensemble des nombres algébriques positifs ayant tous leurs autres conjugués de partie réelle strictement négative et par Ω le domaine simplement connexe formé des nombres complexes de partie réelle strictement positive.

On dit qu'une fraction rationnelle $F(x_1, \ldots, x_n)$ appartient à $\omega(x_1, \ldots, x_n)$ si elle est obtenue à partir des x_i par itération finie des opérations $(F_1, F_2) \rightsquigarrow \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2$ avec $\lambda_i \in Q^+$ $(i = 1, 2)$ et $F_1 \rightsquigarrow 1/F_1$.

A. Connes montre alors que si λ appartient à Λ avec $\lambda \neq 1$, il existe deux nombres rationnels positifs μ_1 et μ_2 (avec $\mu_1 > 1$ si $\lambda > 1$) et un nombre réel u strictement positif tel que l'on ait:

$$\lambda = \mu_1 + \frac{1}{\mu_2 + u} \quad \text{avec} \quad u = G(\lambda) \text{ et } G(\lambda) \in \omega(\lambda, 1/\lambda, 1).$$

Par suite, λ est racine d'une équation du type $z = F(z)$ avec $F(z) \in \omega(z, 1/z, 1)$ et $F(z)$ peut s'écrire comme quotient de deux polynômes à coefficients entiers.

1. Caractérisation des ensembles Λ et Σ.

Proposition 1.1. (i) *Soit λ un nombre algébrique appartenant à Λ. Alors, il existe une fraction rationnelle $F(z) = A(z)/Q(z)$ où $A(z)$ et $Q(z)$ sont des polynômes à coefficients entiers rationnels, possédant les propriétés suivantes*:

(a) *$F(z)$ est holomorphe dans Ω,*

(b) *$F(\Omega) \subset \Omega$,*

(c) *$F(\Omega)$ est relativement compact dans Ω*

et telle que λ soit racine de l'équation $z = F(z)$.

(ii) *Réciproquement, une équation de la forme $z = F(z)$ où $F(z)$ est une fraction rationnelle quotient de deux polynômes à coefficients entiers possédant les propriétés* (a) (b) *et* (c) *possède une racine unique λ appartenant à Λ.*

Les affirmations (i), (a), (b), (c), se démontrent directement à partir du résultat d'A. Connes cité au paragraphe 0, en remarquant que les éléments $H(z)$ de $\omega(z, 1/z, 1)$ sont holomorphes dans Ω et vérifient l'inclusion $H(\Omega) \subset \Omega$. Plus précisément, on obtient (i) (c) en remarquant que λ étant racine d'une équation de la forme $z = \mu_1 + 1/(\mu_2 + G(z)) = F(z)$, on a: $F(z) \subset \bar{B}(a; 1/2\mu_2)$ où $\bar{B}(a; 1/2\mu_2)$ désigne la boule fermée de centre $a = (\mu_1 + 1/2\mu_2, 0)$ et de rayon $1/2\mu_2$.

La réciproque (ii) utilise le théorème suivant conséquence du théorème de Rouché: "Soit D un domaine simplement connexe de C, G une application holomorphe de D dans D, telle que $G(D)$ soit relativement compact dans D, alors G admet un point fixe et un seul".

Pour montrer que l'unique racine λ dans Ω de l'équation $z = F(z)$, appartient bien à Λ, on vérifie que l'équation $z = F(z)$ ne peut avoir de racines sur l'axe imaginaire à cause des inclusions $F(\bar{\Omega}) \subset \overline{F(\Omega)} \subset \Omega$, obtenues grâce aux conditions (a), (b) et (c).

Cette caractérisation de l'ensemble Λ entraîne celle de l'ensemble Σ.

Proposition 1.2. *Soit θ un nombre algébrique appartenant à Σ. Alors, il existe des polynômes $A(Z)$ et $Q(Z)$, à coefficients entiers rationnels, avec $A(0) \neq 0$, $A(Z)/Q(Z)$ holomorphe dans $|Z| \leqslant 1$, vérifiant $|A(Z)/Q(Z)| \leqslant h < 1$ pour $|Z| < 1$ et tels que $1/\theta$ soit l'unique racine de module inférieur à 1 de l'équation $Z = A(Z)/Q(Z)$.*

Réciproquement, toute équation de la forme $Z = A(Z)/Q(Z)$, avec $A(Z)$ et $Q(Z)$ polynômes à coefficients entiers vérifiant les conditions précédentes, possède une unique racine $1/\theta$ dans $|Z| < 1$, dont l'inverse ou l'opposé de l'inverse appartient à Σ.

La proposition 1.2 se déduit de la proposition 1.1, au moyen de la transformation conforme $z = (1+Z)/(1-Z)$ qui échange le disque D, $D = \{Z; Z \in C, |Z| < 1\}$ en le demi-plan Ω, $\Omega = \{z; z \in C, \operatorname{Re} z > 0\}$.

En effet, si θ appartient à Σ, le nombre $\varphi = (1+1/\theta)/(1-1/\theta)$ est un nombre réel φ, $\varphi > 1$, de l'ensemble Λ.

Par suite, d'après la proposition 1.1, φ est l'unique racine positive d'une équation de la forme $z = C(z)/D(z)$ où $C(z)$ et $D(z)$ sont des polynômes à coefficients entiers tels que $F(z) = C(z)/D(z)$ soit holomorphe dans Ω et $F(\Omega)$ relativement compact dans Ω. Le nombre $1/\theta$ est alors l'unique

racine de module inférieur à 1 de l'équation

$$\frac{1+Z}{1-Z}=\frac{C\left(\frac{1+Z}{1-Z}\right)}{D\left(\frac{1+Z}{1-Z}\right)}=\frac{\tilde{C}(Z)}{\tilde{D}(Z)},$$

ce qui s'écrit encore:

$$Z=\frac{\tilde{C}(Z)-\tilde{D}(Z)}{\tilde{C}(Z)+\tilde{D}(Z)}=\frac{A(Z)}{Q(Z)}.$$

On vérifie aisément que $A(Z)$ et $Q(Z)$ sont des polynômes à coefficients entiers, avec $A(0)\neq 0$, puisque $\tilde{C}(0)-\tilde{D}(0)=C(1)-D(1)$ est différent de 0, que $A(Z)/Q(Z)$ est holomorphe dans $\bar{D}$ et vérifie $|A(Z)/Q(Z)|\leqslant h<1$ pour $|Z|<1$, puisque $C(z)/D(z)$ est holomorphe dans Ω et $\frac{C}{D}(\Omega)$ relativement compact dans Ω.

Réciproquement, le théorème de Rouché montre que l'équation $Z=A(Z)/Q(Z)$ possède une unique racine $1/\theta$ dans $|Z|<1$ et l'inégalité $|A(Z)/Q(Z)|\leqslant h<1$ sur $|Z|=1$ prouve que θ ou $-\theta$ appartient à Σ.

2. Définition des ensembles $\Sigma_{q,h}$. A partir de maintenant q désignera un entier, $q\geqslant 2$ et h un nombre réel positif $0<h<1$. La proposition 1.2 nous suggère de classer les éléments de Σ en familles $\Sigma_{q,h}$ définies de la façon suivante:

Définition 1.3. Un nombre algébrique θ, $\theta>1$, *appartient à l'ensemble* $\Sigma_{q,h}$ si tous ses conjugués sont situés dans $|z|<1$ et si $1/\theta$ est l'unique racine de module inférieur à 1 d'une équation de la forme $z=A(z)/Q(z)$, où $A(z)$ et $Q(z)$ sont des polynômes à coefficients entiers tels que l'on ait $A(0)\neq 0$, $Q(0)=q$ fixé, $A(z)/Q(z)$ holomorphe dans $|z|\leqslant 1$ et vérifiant $|A(z)/Q(z)|\leqslant h<1$ sur $|z|=1$.

Conséquences immédiates:

(1) *On a l'égalité* $\Sigma=\bigcup_{q\geqslant 2;\,0<h<1}\Sigma_{q,h}$, grâce à la proposition 1.2.

(a) En effet, si θ appartient à Σ et si $1/\theta$ est racine de $z=A(z)/Q(z)$, avec $Q(0)$ entier négatif, il suffit de remarquer que $1/\theta$ est également racine de $z=-A(z)/-Q(z)$.

(b) De plus, puisque l'on a $|A(0)|/q<1$ d'après le principe du maximum appliqué à la fonction holomorphe $A(z)/Q(z)$ et que $A(0)\neq 0$, on a bien $q\geqslant 2$.

(2) *Si θ appartient à $\Sigma_{q,h}$, on a $A(0)$ entier strictement positif.* En effet, la fonction $f(z)=A(z)/Q(z)$ holomorphe et bornée par 1 dans $|z|\leqslant 1$, se développe en série de Taylor dans $|z|\leqslant 1$:

$$f(z)=u_0+u_1z+\ldots+u_nz^n+\ldots$$

et le premier transformé de Schur de $f(z)$ (cf. ch. III (2)), noté $f_1(z)$, $f_1(z)=\big(f(z)-u_0\big)/z\big(1-u_0f(z)\big)$, est une fonction holomorphe et bornée par 1 dans $|z|\leqslant 1$.

Par suite, on a $|f_1(1/\theta)|\leqslant 1$, ce qui est équivalent aux inégalités:

$$-\frac{1}{\theta}\left[1-u_0\frac{1}{\theta}\right]\leqslant\frac{1}{\theta}-u_0\leqslant\frac{1}{\theta}\left[1-u_0\frac{1}{\theta}\right].$$

L'inégalité de droite donne $u_0\geqslant 0$ et comme $u_0=A(0)/q$ avec $A(0)\neq 0$, on a $A(0)>0$.

(3) *Si q' est un multiple de q et si θ appartient à $\Sigma_{q,h}$, alors θ appartient à $\Sigma_{q',h}$.* En effet, $q'=qq''$ et $1/\theta$ est également racine de $z=q''A(z)/q''Q(z)$.

(4) *L'ensemble $\Sigma_{q,h}$ contient, pour h assez grand, tous les nombres rationnels de la forme q/k, pour $1\leqslant k\leqslant q-1$, des nombres de Pisot et des nombres appartenant aux ensembles S_k $(1\leqslant k\leqslant q-1)$ de degré aussi grand que l'on veut.* En effet, l'ensemble S des nombres de Pisot est l'ensemble des entiers algébriques supérieurs à 1 dont tous les conjugués sont situés dans $|z|<1$.

L'ensemble S_k est l'ensemble des nombres algébriques réels, supérieurs à 1, tels que $1/\theta$ soit la seule racine située dans $|z|\leqslant 1$ d'un polynôme à coefficients entiers vérifiant $Q(0)=k$ et tel qu'il existe un polynôme à coefficients entiers $A(z)$ vérifiant $A(1/\theta)\neq 0$, $|A(0)|\geqslant k$ et $|A(z)|\leqslant|Q(z)|$ sur $|z|=1$.

On peut alors vérifier que les nombres θ, dont l'inverse est racine de l'équation $z=(k-kz^s)/(q-kz^s)$ avec s entier, $s\geqslant 1$ et $1\leqslant k\leqslant q-1$ appartiennent à S pour $k=1$ et à S_k pour $1<k\leqslant q-1$.

3. Une propriété essentielle de l'ensemble $\Sigma^i(2)$. Définition des ensembles $\Sigma^i_{q,h}(2)$. Le cas des nombres algébriques imaginaires de module supérieur à 1, dont tous les conjugués autres que l'imaginaire conjugué, sont de module inférieur à 1, est un cas voisin de celui des nombres algébriques appartenant aux différents $\Sigma_{q,h}$.

Les résultats d'A. Connes [6], nous ont permis de classer ces nombres en familles de nombres algébriques et de démontrer, pour ces familles, un résultat analogue à celui de Kelly [10], concernant les entiers algébriques imaginaires ayant la même propriété.

On désigne par M l'ensemble des nombres algébriques imaginaires à partie réelle positive et dont tous les conjugués autres que l'imaginaire conjugué sont à partie réelle strictement négative.

Proposition 1.4. *Soit μ un nombre algébrique appartenant à M. Alors, il existe une fraction rationnelle, $F(z)=A(z)/Q(z)$, où les polynômes*

$A(z)$ et $Q(z)$ sont à coefficients entiers, possédant les propriétés suivantes:

(a) *$F(z)$ est holomorphe dans Ω,*

(b) *$F(\Omega) \subset \Omega$,*

(c) *$F(\Omega)$ est relativement compact dans Ω, telle que μ et $\bar{\mu}$ soient les uniques racines à partie réelle positive de l'équation $\frac{1}{2}(z+1/z) = F(z)$.*

Pour démontrer cette proposition, nous utilisons le résultat suivant dû à A. Connes [6]. Soient $u_1, u_2, \ldots, u_n$ n nombres algébriques et $u_1^p, \ldots, u_n^p$ tout système qui s'en déduit par un automorphisme au dessus de $\boldsymbol{Q}$. On suppose que tous les u_i sont dans un même demi-espace mais que cela n'arrive pour aucun des systèmes $(u_i^p)_{1\leqslant i\leqslant n}$ autres que $(\bar{u}_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ ($\bar{u}_i$ désigne l'imaginaire conjugué de u_i). Alors, tout nombre de la forme $G(u_1, \ldots, u_n)$ où G est une fraction rationnelle homogène de degré 1, située dans l'angle de sommet 0 engendré par les u_i, s'écrit $F(u_1, \ldots, u_n)$ avec $F(x_1, \ldots, x_n) \in \omega(x_1, \ldots, x_n)$. [Par angle de sommet 0 engendré par les u_i, on entend l'ensemble des nombres algébriques $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$ avec $\lambda_i > 0$ et $\lambda_i \in \boldsymbol{R}$.]

Soit donc μ un nombre algébrique imaginaire appartenant à M. Alors, le système de nombres algébriques $(\mu, 1/\mu, 1)$ vérifie les hypothèses imposées au système des (u_i).

De plus, il existe des nombres rationnels positifs assez petits, tels que le nombre complexe u, défini par la relation:

(1) $\frac{1}{2}(\mu+1/\mu) = \lambda_1 + 1/(\lambda_2+u)$ soit situé dans l'angle de sommet 0 engendré par μ, $1/\mu$ et 1.

D'après (1), u s'écrit: $u = \left(\frac{\lambda_2}{2}\mu - \frac{\lambda_2}{2\mu} + 1 + \lambda_1\lambda_2\right) \Big/ \left(\frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2\mu} - \lambda_1\right)$. Donc, u est une fraction rationnelle homogène de degré 1 pour les variables $\mu, 1/\mu$ et 1.

D'après le résultat d'A. Connes, on a donc $u = G(\mu)$, où $G(\mu) \in \omega(\mu, 1/\mu, 1)$. Par suite, μ et $\bar{\mu}$ sont racines de l'équation: $\frac{1}{2}(z+1/z) = F(z)$ avec $F(z) = \lambda_1 + 1/(\lambda_2 + G(z))$.

On démontre alors de la même façon que dans la proposition 1.1 que l'on a $F(z) = A(z)/Q(z)$ avec $A(z)$ et $Q(z)$ polynômes à coefficients entiers vérifiant les conditions (a), (b) et (c).

Si l'on désigne alors par $\Sigma^i(2)$ l'ensemble des nombres algébriques imaginaires de module supérieur à 1, ayant tous leurs conjugués autres que l'imaginaire conjugué de module strictement inférieur à 1, on peut déduire la proposition suivante:

PROPOSITION 1.5. *Soit θ un nombre algébrique imaginaire de $\Sigma^i(2)$. Alors, il existe des polynômes $A(Z)$ et $Q(Z)$ à coefficients entiers rationnels, tels que l'on ait $A(0) \neq 0$, $A(Z)/Q(Z)$ holomorphe dans $|Z| \leqslant 1$, vérifiant $|A(Z)/Q(Z)| \leqslant h < 1$ pour $|Z| < 1$ et tels que $1/\theta$ et $1/\bar{\theta}$ soient les seules racines de module inférieur à 1 de l'équation $Z^2 = A(Z)/Q(Z)$.*

Le nombre algébrique $\varphi = \dfrac{1+1/\theta}{1-1/\theta}$ appartient à l'ensemble M. Par suite d'après la proposition 1.4, il existe une fraction rationnelle $F(z) = C(z)/D(z)$ où les polynômes $C(z)$ et $D(z)$ sont à coefficients entiers rationnels, $F(z)$ étant holomorphe dans Ω, vérifiant $F(\Omega) \subset \Omega$, $F(\Omega)$ relativement compact dans Ω, telle que φ soit racine de l'équation $\frac{1}{2}(z+1/z) = F(z)$. A l'aide de la transformation conforme $z = (1+Z)/(1-Z)$, on voit que l'équation

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1+Z}{1-Z} + \frac{1-Z}{1+Z}\right] = \frac{C\left(\dfrac{1+Z}{1-Z}\right)}{D\left(\dfrac{1+Z}{1-Z}\right)}$$

possède les racines $1/\theta$ et $1/\bar{\theta}$ dans $|Z| < 1$. Or, cette équation peut s'écrire

$$\frac{1+Z^2}{1-Z^2} = \frac{\tilde{C}(Z)}{\tilde{D}(Z)} \quad \text{soit} \quad Z^2 = \frac{\tilde{C}(Z)-\tilde{D}(Z)}{\tilde{C}(Z)+\tilde{D}(Z)} = \frac{A(Z)}{Q(Z)}.$$

Les polynômes $A(Z)$ et $Q(Z)$ sont donc à coefficients entiers, tels que la fraction rationnelle $A(Z)/Q(Z)$ soit holomorphe dans $|Z| \leqslant 1$, vérifiant $|A(Z)/Q(Z)| \leqslant h < 1$ pour $|Z| < 1$, puisque $\dfrac{C}{D}(\Omega)$ est relativement compact dans Ω. D'après le théorème de Rouché, l'équation $Z^2 = A(Z)/Q(Z)$ possède exactement deux racines dans $|Z| \leqslant 1$ et comme elle possède $1/\theta$ et $1/\bar{\theta}$ comme racines, on en déduit $A(0) \neq 0$.

Cette proposition nous permet alors de classer les éléments de $\Sigma^i(2)$ en sous-familles $\Sigma^i_{q,h}(2)$.

DÉFINITION 1.6. Un nombre algébrique θ imaginaire, appartenant à $\Sigma^i(2)$, *appartient au sous-ensemble* $\Sigma^i_{q,h}(2)$, s'il existe des polynômes à coefficients entiers $A(z)$ et $Q(z)$ avec $A(0) \neq 0$, $Q(0) = q$ entier fixé, $A(z)/Q(z)$ étant holomorphe dans $|z| \leqslant 1$ et vérifiant $|A(z)/Q(z)| \leqslant h < 1$ sur $|z| = 1$, tels que $1/\theta$ et $1/\bar{\theta}$ soient les seules racines situées dans $|z| \leqslant 1$ de l'équation $z^2 = A(z)/Q(z)$.

II. Propriétés topologiques des nombres de $\Sigma_{q,h}$ et $\Sigma^i_{q,h}(2)$

Les ensembles $\Sigma_{q,h}$ et $\Sigma^i_{q,h}(2)$ possèdent l'importante propriété d'être fermés pour la topologie usuelle de $\boldsymbol{R}$ ou de $\boldsymbol{C}$. Si l'on étudie alors les ensembles dérivés de $\Sigma_{q,h}$ et de $\Sigma^i_{q,h}(2)$, on peut montrer que pour h assez grand, les deux premiers ensembles dérivés de $\Sigma_{q,h}$ ne sont jamais vides pour $q \geqslant 3$ mais que pour $n \geqslant q^4$, les $n^{\text{ièmes}}$ ensembles dérivés $\Sigma^{(n)}_{q,h}$ et $\left(\Sigma^i_{q,h}(2)\right)^{(n)}$ sont vides, quel que soit h.

1. Théorèmes de fermeture des ensembles $\Sigma_{q,h}$ et $\Sigma^i_{q,h}(2)$.

THÉORÈME 2.1. *L'ensemble des nombres algébriques de $\Sigma_{q,h}$ est fermé pour la topologie de $\boldsymbol{R}$.*

Considérons une suite $(\theta_p)_{p\in\boldsymbol{N}}$ de nombres algébriques appartenant à $\Sigma_{q,h}$, telle que les θ_p tendent vers une limite θ, quand p tend vers $+\infty$. Nous allons montrer que θ appartient à $\Sigma_{q,h}$.

Les θ_p ont leurs inverses racines des équations respectives $z = A_p(z)/Q_p(z)$ avec $A_p(0) \neq 0$ et $Q_p(0) = q$ fixé. De plus, les fractions rationnelles $\varphi_p(z) = A_p(z)/Q_p(z)$ sont sans pôle dans $|z| \leqslant 1$ et vérifient $|\varphi_p(z)| \leqslant h < 1$ sur $|z| = 1$.

L'ensemble des $\varphi_p(z)$ est donc un sous-ensemble infini de l'ensemble $\mathscr{F}(q, 0)$, où $\mathscr{F}(q, 0)$ est l'ensemble des fractions rationnelles $A(z)/Q(z)$, holomorphes dans $|z| \leqslant 1$, avec $A(z)$ et $Q(z)$ polynômes à coefficients entiers rationnels, premiers entre eux, vérifiant $|A(z)| \leqslant |Q(z)|$ sur $|z| = 1$, $A(0) \neq 0$ et $Q(0) = q$ fixé. Or l'ensemble $\mathscr{F}(q, 0)$ est un ensemble compact pour la topologie de la convergence uniforme dans tout compact de $|z| < 1$ (cf. Pisot [12]). Par suite, il existe une sous-suite extraite de la suite des $\varphi_p(z)$ (notée de la même façon pour alléger les notations), qui converge uniformément sur tout compact de $|z| < 1$, vers la fraction rationnelle $A^*(z)/Q^*(z)$ appartenant à $\mathscr{F}(q, 0)$.

Comme la convergence des fonctions holomorphes dans $|z| \leqslant 1$, $A_p(z)/Q_p(z)$, vers la fonction holomorphe dans $|z| \leqslant 1$, $A^*(z)/Q^*(z)$, est uniforme sur tout compact de $|z| < 1$ et que $|A_p(z)/Q_p(z)| \leqslant h < 1$ sur $|z| = 1$, il s'ensuit que $|A^*(z)/Q^*(z)| \leqslant h < 1$ sur $|z| = 1$. Donc, d'après le théorème de Rouché, l'équation $z = A^*(z)/Q^*(z)$ possède une racine unique $1/\tau$ dans $|z| < 1$, vérifiant $|1/\tau| \leqslant h$. Nous allons montrer que l'on a $\theta = \tau$ et ceci achèvera la démonstration du théorème.

La suite des nombres θ_p convergeant vers θ, vérifie les relations:

$$\frac{1}{\theta_p} = \frac{A_p(1/\theta_p)}{Q_p(1/\theta_p)}. \tag{1}$$

Comme les fonctions holomorphes $A_p(z)/Q_p(z)$ convergent uniformément vers $A^*(z)/Q^*(z)$ sur le compact $K = \{z; z \in \boldsymbol{C},\ |z| \leqslant h\}$, en passant à la limite dans la relation (1), on obtient $1/\theta = A^*(1/\theta)/Q^*(1/\theta)$. Enfin, l'équation $z = A^*(z)/Q^*(z)$ possédant une racine unique dans $|z| < 1$, on a forcément $1/\theta = 1/\tau$.

THÉORÈME 2.2 (analogue du théorème de Kelly [10]). *Les nombres limites imaginaires d'éléments de $\Sigma^i_{q,h}(2)$ de module différent de 1, appartiennent à $\Sigma^i_{q,h}(2)$.*

La démonstration de ce théorème est analogue à celle du théorème 2.1.

2. Quelques résultats sur les ensembles dérivés successifs de $\Sigma_{q,h}$ et de $\Sigma^i_{q,h}(2)$.

Nous désignerons dans la suite par $(\Sigma_{q,h})'$ (resp. $(\Sigma^i_{q,h}(2))'$) le premier ensemble dérivé de $\Sigma_{q,h}$ (resp. $\Sigma^i_{q,h}(2)$) et plus généralement par $(\Sigma_{q,h})^{(n)}$ (resp. $(\Sigma^i_{q,h}(2))^{(n)}$) le $n^{\text{ième}}$ ensemble dérivé.

Remarquons tout d'abord que l'on démontrerait le résultat suivant, de la même façon que la condition nécessaire du théorème de caractérisation de l'ensemble dérivé de l'ensemble S_q (cf. Bertin [2]).

PROPOSITION 2.3. *Si le nombre algébrique θ appartient à l'ensemble $(\Sigma_{q,h})'$ (resp. à l'ensemble $(\Sigma^i_{q,h}(2))'$) alors $1/\theta$ est l'unique racine (resp. $1/\theta$ et $1/\bar{\theta}$ sont les uniques racines) de module inférieur à 1 de l'équation $z = A(z)/Q(z)$ (resp. $z^2 = A(z)/Q(z)$) où les polynômes $A(z)$ et $Q(z)$ à coefficients entiers vérifient $A(0) \neq 0$, $Q(0) = q$, $A(z)/Q(z)$ holomorphe dans $|z| \leqslant 1$, telle que $|A(z)/Q(z)| \leqslant h < 1$ sur $|z| = 1$, l'égalité ayant lieu au plus pour un nombre fini de z de module 1.*

Soulignons simplement ce détail utilisé dans la démonstration de la proposition 2.3. Si θ appartient à $(\Sigma_{q,h})'$ (resp. $(\Sigma^i_{q,h}(2))'$), alors θ est limite de θ_k dont les inverses sont racines des équations $z = A_k(z)/Q_k(z)$ (resp. $z^2 = A_k(z)/Q_k(z)$) et le degré des polynômes $A_k(z) - zQ_k(z)$ (resp. $A_k(z) - z^2Q_k(z)$) augmente indéfiniment. Cette remarque nous servira dans la suite.

Etant donné un élément θ de $(\Sigma_{q,h})'$ (resp. de $(\Sigma^i_{q,h}(2))'$) défini par diverses fractions rationnelles $A(z)/Q(z)$, on peut alors étudier la valeur moyenne sur $|z| = 1$ des divers $|A(z)/Q(z)|^2$. On démontre alors la proposition 2.4 suivante qui précise la proposition 2.3.

PROPOSITION 2.4. *Soit θ_n une suite de nombres algébriques appartenant à $\Sigma_{q,h}$ (resp. $\Sigma^i_{q,h}(2)$) et tendant vers le nombre θ de $\Sigma_{q,h}$ (resp. de $\Sigma^i_{q,h}(2)$). Alors les $1/\theta_n$ et $1/\theta$ sont racines des équations $z = A_n(z)/Q_n(z)$ et $z = A(z)/Q(z)$ (resp. $z^2 = A_n(z)/Q_n(z)$ et $z^2 = A(z)/Q(z)$) et il existe une suite infinie extraite de la suite des $A_n(z)/Q_n(z)$ tendant uniformément sur tout compact de $|z| < 1$ vers $A(z)/Q(z)$. Si μ et μ_n désignent respectivement les valeurs moyennes de $|A(z)/Q(z)|^2$ et de $|A_n(z)/Q_n(z)|^2$ sur $|z| = 1$, on a l'inégalité:*

$$\mu \leqslant \lim_{n\to+\infty} \mu_n - 1/q^4 \quad \text{d'où} \quad \mu \leqslant h^2 - 1/q^4.$$

Pour la démonstration de cette proposition, nous utilisons une preuve très semblable à celle du lemme 2.1 d'Amara [1], à laquelle nous renvoyons donc le lecteur.

On peut alors démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME 2.5. *Le $n^{\text{ième}}$ ensemble dérivé $\Sigma^{(n)}_{q,h}$ [resp. $(\Sigma^i_{q,h}(2))^{(n)}$] de l'ensemble $\Sigma_{q,h}$ [resp. $(\Sigma^i_{q,h}(2))$] est vide pour $n \geqslant q^4$ et ceci quel que soit h, $0 < h < 1$.*

Ce résultat se prouve par récurrence sur n à partir de la proposition 2.4, en remarquant que, μ étant positif, ceci entraîne $h^2 - n/q^4 > 0$.

On peut alors démontrer que, quel que soit q, pour h assez grand, l'ensemble dérivé de $\Sigma_{q,h}$ n'est pas vide et qu'il en est de même de $(\Sigma_{q,h})''$ pour $q \geqslant 3$.

THÉORÈME 2.6. *Pour h assez grand, l'ensemble $(\Sigma_{q,h})'$ contient les rationnels q/k, $1 \leqslant k \leqslant q-1$.*

En effet, on peut aisément montrer que l'on peut extraire de la suite des α_n racines des équations $z = (k - z^n)/(q - z^n)$ (resp. de la suite des α'_n racines des équations $z = (k + z^n)/(q + z^n)$) une sous-suite infinie d'éléments tous distincts convergeant vers k/q. Or α_n est racine de $P_n(z) = k - qz - z^n + z^{n+1} = 0$ et $P_n(k/q) = (k/q)^n\,[-1 + k/q] < 0$. D'où $\alpha_n < k/q$ pour $n \geqslant 1$.

Quant à α'_n, il est racine de

$$R_n(z) = k - qz + z^n - z^{n+1} = 0 \quad \text{et} \quad R_n\left(\frac{k}{q}\right) = -P_n\left(\frac{k}{q}\right) > 0.$$

Par suite, $\alpha'_n > k/q$ pour $n \geqslant 1$.

Les nombres q/k pour $1 \leqslant k \leqslant q-1$, étant limites à droite et à gauche de nombres de $\Sigma_{q,h}$, appartiennent donc bien à l'ensemble $(\Sigma_{q,h})'$.

THÉORÈME 2.7. *Soit q un entier, $q \geqslant 3$, et h un nombre réel assez grand $0 < h < 1$. Alors l'ensemble $(\Sigma_{q,h})''$ n'est pas vide. Il contient le nombre q et pour q tel que $q-1$ soit un nombre premier, le rationnel $q/(q-1)$.*

Ceci se démontre à l'aide du lemme suivant.

LEMME 2.8. *Soit θ un nombre algébrique appartenant à $(\Sigma_{q,h})'$. Alors θ est limite d'une suite Θ_m d'éléments de $\Sigma_{q,h}$. Aux nombres θ et Θ_m sont associées les fractions rationnelles $A(z)/Q(z)$ et $A_m(z)/Q_m(z)$. Comme les fractions rationnelles $A(z^k)/Q(z^k)$ et $A_m(z^k)/Q_m(z^k)$ sont holomorphes dans $|z| \leqslant 1$ et vérifient*

$$\left|\frac{A(z^k)}{Q(z^k)}\right| \leqslant h < 1 \text{ sur } |z| = 1 \quad \text{et} \quad \left|\frac{A_m(z^k)}{Q_m(z^k)}\right| \leqslant h < 1 \text{ sur } |z| = 1,$$

on peut définir les nombres $1/\theta_k$ et $1/\Theta_{m,k}$ racines respectives des équations $z = A(z^k)/Q(z^k)$ et $z = A_m(z^k)/Q_m(z^k)$. Alors, pour tout k, tel que le polynôme $A(z^k) - zQ(z^k)$ soit irréductible, le nombre θ_k est limite d'une suite infinie de $\Theta_{m,k}$ tous distincts.

On pose $\alpha_{m,k} = 1/\Theta_{m,k}$ et $\alpha_k = 1/\theta_k$. On choisit ensuite m_0 tel que pour tout m, $m \geqslant m_0$, le polynôme $R_m(z)$, $R_m(z) = A_m(z^k) - zQ_m(z^k)$ ait un degré supérieur au degré du polynôme $R(z)$, $R(z) = A(z^k) - zQ(z^k)$. Ceci est possible d'après la remarque suivant la proposition 2.3.

On montre ensuite, qu'il existe un entier $N(1)$ tel que pour tout $m \geqslant N(1)$, on ait $\alpha_{m,k} \neq \alpha_{m_0,k}$. Sinon, on aurait une infinité de $r(n)$ pour lesquels $\alpha_{r(n),k} = \alpha_{m_0,k}$. Comme l'on a

$$\alpha_{m_0,k} = \frac{A_{r(n)}\left((\alpha_{m_0,k})^k\right)}{Q_{r(n)}\left((\alpha_{m_0,k})^k\right)},$$

en passant à la limite dans cette relation, on aurait

$$\alpha_{m_0,k} = \frac{A\left((\alpha_{m_0,k})^k\right)}{Q\left((\alpha_{m_0,k})^k\right)}.$$

Or, l'équation $z = A(z^k)/Q(z^k)$ possède une racine unique dans $|z| < 1$, d'où l'égalité $\alpha_{m_0,k} = \alpha_k$. Supposons alors le polynôme $R(z)$ irréductible. Les polynômes $R_{m_0}(z)$ et $R(z)$ possédant une racine commune, on aurait $R_{m_0}(z) = R(z)H(z)$ et comme $R_{m_0}(0) = R(0)$, on aurait $H(0) = 1$. Or $H(z)$ possède toutes ses racines dans $|z| > 1$; par suite on a $H(z) \equiv 1$ soit $R_{m_0}(z) = R(z)$, ce qui est impossible, puisque le degré de $R_{m_0}(z)$ est strictement supérieur au degré de $R(z)$. En itérant ce raisonnement, on voit qu'il est possible de construire une suite de $\Theta_{m,k}$ tous distincts et tendant vers θ_k.

Démonstration du théorème 2.7. Pour $q \geqslant 3$, on montre que θ dont l'inverse est racine de l'équation $z = (1 - z)/(q - z)$ appartient à $(\Sigma_{q,h})'$ pour h tel que l'on ait $h^2 > 2/q$. En effet, θ est limite à gauche de la suite Θ_m dont les inverses sont racines de

$$z = \frac{1 - z + z^m}{q - z} = \frac{A_m(z)}{Q_m(z)}$$

et limite à droite de la suite Θ'_m dont les inverses sont racines de

$$z = \frac{1 - z - z^m}{q - z} = \frac{\tilde{A}_m(z)}{\tilde{Q}_m(z)}.$$

Comme pour tout k, les polynômes $1 - z^k - z(q - z^k)$ sont irréductibles, θ_k est d'après le lemme 2.8, limite d'une sous-suite de $\Theta_{m,k}$ tous distincts et d'une sous-suite de $\Theta'_{m,k}$ tous distincts.

Comme

$$R_m(\alpha_k) = A_m(\alpha_k^k) - \alpha_k Q_m(\alpha_k^k) = \alpha_k^{mk}, \quad \text{on a } \Theta_{m,k} < \theta_k,$$

et comme

$$\tilde{R}_m(\alpha_k) = \tilde{A}_m(\alpha_k^k) - \alpha_k \tilde{Q}_m(\alpha_k^k) = -\alpha_k^{mk}, \quad \text{on a } \theta_k < \Theta'_{m,k}.$$

Par suite, θ_k appartient bien à $(\Sigma_{q,h})'$.

On démontrerait de la même façon que les τ_k dont les inverses sont racines de $z = (1 + z^k)/(q + z^k)$ appartiennent à $(\Sigma_{q,h})'$.

Enfin, le nombre q, limite à droite des θ_k et à gauche des τ_k, appartient bien à $(\Sigma_{q,h})''$.

On utilise le même type de démonstration pour montrer que $q/(q-1)$ appartient à $(\Sigma_{q,h})''$ pour $q \geqslant 3$ et $q-1$ premier.

On montre d'abord que l'élément θ dont l'inverse est racine de $z = (q-1-z)/(q-z)$ appartient à $(\Sigma_{q,h})'$ car θ est limite à droite ou à gauche des Θ_m et des Θ'_m dont les inverses sont racines de $z = (q-1-z+z^m)/(q-z+z^m)$ ou de $(q-1-z-z^m)/(q-z-z^m)$. On vérifie ensuite que les polynômes $R_k(z) = q-1-z^k-z(q-z^k)$ sont irréductibles pour $k \geqslant k_0$. S'il n'en était pas ainsi, on aurait $R_k(z) = D_k(z)\,U_k(z)$ avec, par exemple, $D_k(z)$ possédant la racine de module inférieur à 1. Comme l'on a $R_k(0) = q-1$ et $q-1$ premier, ou bien on aurait $U_k(0) = 1$ soit $U_k(z) \equiv 1$, c'est-à-dire $R_k(z)$ irréductible, puisque $U_k(z)$ a toutes ses racines dans $|z| > 1$, ou bien $U_k(0) = q-1$ et par suite θ_k serait un nombre de Pisot. Or il existe une sous-suite extraite de la suite des θ_k qui converge vers $q/(q-1)$. Le nombre $q/(q-1)$ appartiendrait alors à l'ensemble S des nombres de Pisot puisque cet ensemble est fermé, ce qui est impossible pour $q \geqslant 3$ car les éléments de S sont des entiers algébriques.

On termine alors la démonstration comme dans le cas précédent.

Signalons enfin un résultat semblable à celui obtenu pour les ensembles S_q dans Bertin [2].

PROPOSITION 2.9. *Soit θ un nombre algébrique de $\Sigma_{q,h}$ tel que $1/\theta$ soit racine de l'équation $z = A(z)/Q(z)$. Alors si θ n'est pas racine de la même équation $z = A(z)/Q(z)$, pour tout q_1 multiple de q, il existe un nombre réel h_1, $h \leqslant h_1 < 1$, tel que θ appartienne à $(\Sigma_{q_1,h_1})'$.*

Pour démontrer ce résultat, on va définir une suite de nombres algébriques θ_n tous distincts appartenant à Σ_{q_1,h_1} et convergeant vers θ.

Considérons les équations

$$z = \frac{A_n(z)}{Q_n(z)} = \frac{q'A(z) + \varepsilon k z^{n+a} P(z)}{q'Q(z) + \varepsilon k z^{n+s} B(z)},$$

où q' est l'entier supérieur ou égal à 2 défini par $q_1 = q'q$ et k un entier $1 \leqslant k < q'$, où $P(z) = z^s Q(1/z)$, $B(z) = z^a A(1/z)$, s et a désignant respectivement les degrés des polynômes $Q(z)$ et $A(z)$ et où ε vaut $+1$ ou -1.

Comme $|\varepsilon k z^{n+s} B(z)| < |q'B(z)|$ sur $|z| = 1$, la fraction rationnelle $A_n(z)/Q_n(z)$ est holomorphe dans $|z| \leqslant 1$. Donc, si l'on prouve l'existence d'un nombre réel h_1 tel que $|A_n(z)/Q_n(z)| \leqslant h_1 < 1$ sur $|z| = 1$, pour tout $n > 0$, on saura que les θ_n dont les inverses sont racines de $z = A_n(z)/Q_n(z)$ appartiennent à Σ_{q_1,h_1}.

Or, l'inégalité $|A_n(z)|^2 \leqslant h_1^2 |Q_n(z)|^2$ sur $|z| = 1$ peut s'écrire:

$$|Q(z)|^2 \left\{ h_1^2 q'^2 - k^2 + \left|\frac{A(z)}{Q(z)}\right|^2 (h_1^2 k^2 - q'^2) + \varepsilon k q' (h_1^2 - 1) \times \right.$$
$$\left. \times \left[z^{n+s} \frac{B(z)}{Q(z)} + \frac{1}{z^{n+a}} \frac{A(z)}{P(z)} \right] \right\} \geqslant 0.$$

Comme l'on a

$$\left|\frac{B(z)}{Q(z)}\right| \leqslant h < 1 \quad \text{et} \quad \left|\frac{A(z)}{P(z)}\right| \leqslant h < 1,$$

cette quantité sera positive si:

$$h_1^2 q'^2 - k^2 + \left|\frac{A(z)}{Q(z)}\right|^2 (h_1^2 k^2 - q'^2) + 2hkq'(h_1^2 - 1) \geqslant 0$$

ou encore si: $h_1^2 \geqslant \left(\dfrac{hq'+k}{q'+hk}\right)^2$, ce qui est toujours possible, puisque $\dfrac{hq'+k}{q'+hk} < 1$.

On montre ensuite que les α_n racines de $z = A_n(z)/Q_n(z)$ sont tous distincts. En effet, si l'on avait $\alpha_n = \alpha_{n'}$ pour $n' > n$, en retranchant les deux égalités vérifiées par α_n et $\alpha_{n'}$, on tirerait:

$$\varepsilon k \alpha_{n'}^n [1 - \alpha_{n'}^{n'-n}][\alpha_{n'}^a P(\alpha_{n'}) - \alpha_{n'} \alpha_{n'}^s B(\alpha_{n'})] = 0$$

et $\alpha_{n'}$ étant différent de 0 et 1,

$$\frac{1}{\alpha_{n'}} = \frac{A(1/\alpha_{n'})}{Q(1/\alpha_{n'})}. \tag{1}$$

La relation $A_{n'}(\alpha_{n'}) - \alpha_{n'} Q_{n'}(\alpha_{n'}) = 0$ donnerait alors

$$\alpha_{n'} = \frac{A(\alpha_{n'})}{Q(\alpha_{n'})}. \tag{2}$$

Comme l'équation $z = A(z)/Q(z)$ possède $1/\theta$ comme unique racine dans $|z| \leqslant 1$, on aurait $\alpha_{n'} = 1/\theta$. La relation (1) donnerait alors $\theta = A(\theta)/Q(\theta)$, ce qui est exclu dans l'hypothèse.

On voit alors facilement que les α_n tendent vers $1/\theta$ quand n tend vers $+\infty$. Puis, en prenant $\varepsilon = 1$ (resp. $\varepsilon = -1$) on définit une suite θ_n (resp. θ'_n) tendant à droite (resp. à gauche) vers θ dans Σ_{q_1,h_1}.

La proposition se trouve ainsi démontrée.

III. Définition des ensembles $\mathscr{T}_q$ et théorème d'approximation des éléments de $\Sigma_{q,h}$ et de $\mathscr{T}_q$

1. Définition de l'ensemble $\mathscr{T}_q$. On dira qu'un nombre algébrique θ appartient à l'ensemble $\mathscr{T}_q$, s'il est strictement supérieur à 1 et si son inverse est racine d'une équation de la forme $z = A(z)/Q(z)$, $A(z)$ et $Q(z)$ étant des polynômes à coefficients entiers avec $A(0) \neq 0$, $Q(0) = q$ fixé, $A(z)/Q(z)$ holomorphe dans $|z| \leqslant 1$ et telle que $|A(z)| \leqslant |Q(z)|$ sur $|z| = 1$.

Remarque. L'ensemble $\mathscr{T}_q$ contient tous les ensembles $\Sigma_{q,h}$ pour tout h, $0<h<1$, mais il contient également des nombres de Salem c'est-à-dire des entiers algébriques supérieurs à 1, racines d'un polynôme réciproque irréductible, ayant tous ses conjugués dans $|z|\leqslant 1$ et ayant effectivement des conjugués sur $|z|=1$.

En effet, l'ensemble $\mathscr{T}_q$ contient par exemple, les nombres de Salem, racines des équations $z=(1-qz^n)/(q-z^n)$ pour $n\geqslant n_0$. Ces nombres algébriques supérieurs à 1, sont bien des nombres de Salem car ils sont racines de l'équation $Q(z)-z^nP(z)=0$ avec $Q(z)=1-qz$, $P(z)=-Q(1/z)$ et la racine supérieure à 1 de $P(z)$ est un nombre de Pisot; par suite, d'après Salem [13], de telles équations définissent des nombres de Salem pour $n\geqslant n_0$.

Proposition 3.1. *L'ensemble des nombres algébriques de $\mathscr{T}_q$ est un ensemble fermé.*

Cette proposition se démontre de la même façon que le théorème 2.1.

Remarque. La fraction rationnelle $f(z)=A(z)/Q(z)$ introduite dans la définition de $\mathscr{T}_q$ est une fonction de Schur. On va donc rappeler les principaux résultats obtenus au sujet des ces fonctions.

2. Rappels sur les fonctions de Schur (cf. Schur [14] et Chamfy [5]).

Définition 3.2. On désigne par *fonction de Schur* $f(z)$, une fonction holomorphe dans $|z|\leqslant 1$ et bornée par 1 sur $|z|=1$.

Cette fonction holomorphe $f(z)$ possède donc dans $|z|\leqslant 1$, un développement en série de Taylor de la forme $f(z)=u_0+u_1z+\ldots+u_nz^n+\ldots$

On va supposer dans tous ces rappels les u_i réels; ceci suffit pour les applications. Puisque $f(z)$ est holomorphe dans $|z|\leqslant 1$ et bornée par 1 sur $|z|=1$, d'après le principe du maximum, on a $|u_0|\leqslant 1$.

Si $|u_0|\neq 1$, on peut former $f_1(z)$,

$$f_1(z)=\frac{f(z)-u_0}{z[1-u_0f(z)]}.$$

C'est une nouvelle fonction de Schur et l'on a $|f_1(0)|\leqslant 1$.

Si $|u_0|=1$, alors $f(z)$ est constante et l'on a $f_1(z)=0$.

En considérant la nouvelle fonction de Schur $f_1(z)$, on peut répéter le raisonnement précédent et définir par récurrence la suite de fonctions de Schur:

$$f_{n+1}(z)=\frac{f_n(z)-f_n(0)}{z[1-f_n(0)f_n(z)]}.$$

Deux cas peuvent alors se présenter:

Cas 1 ou bien *on a* $|f_n(0)|<1$, *pour tout* $n\geqslant 0$. La fonction de Schur $f(z)$ est dite de *rang infini*.

Cas 2 ou bien il existe un entier $s\geqslant 0$ tel que $|f_n(0)|<1$ *pour* $n\leqslant s-1$ *et* $|f_s(0)|=1$. Dans ce cas, on dit que la fonction de Schur $f(z)$ est de *rang* s.

Schur a alors montré qu'une condition nécessaire et suffisante pour que le cas 2 se présente est que $f(z)=D_s(z)/E_s(z)$, $D_s(z)$ et $E_s(z)$ étant des polynômes premiers entre eux, de degré s, vérifiant $E_s(z)=\pm z^sD_s(1/z)$, $E_s(z)$ ayant tous ses zéros extérieurs au cercle unité.

Rappelons également les résultats suivants:

Théorème 3.3. *Soit $f(z)$ une fonction de Schur de la forme $A(z)/Q(z)$, dont le développement en série de Taylor au voisinage de l'origine s'exprime par*:

$$f(z)=u_0+u_1z+\ldots+u_nz^n+\ldots$$

Soit s le rang fini ou infini de la fonction $f(z)$.

1. *Pour tout entier n, $1\leqslant n\leqslant s+1$, il existe un couple unique de polynômes $D_n(z)$ et $E_n(z)$ de degré n, premiers entre eux, tels que $E_n(0)=1$, $E_n(z)=-z^nD_n(1/z)$, $E_n(z)$ ayant tous ses zéros extérieurs au disque $|z|\leqslant 1$, la fraction rationnelle $D_n(z)/E_n(z)$ possédant dans $|z|\leqslant 1$, le développement en série de Taylor*:

$$\frac{D_n(z)}{E_n(z)}=u_0+u_1z+\ldots+u_{n-1}z^{n-1}+w_nz^n+\ldots$$

De plus, si $f(1)=1$

$$D_{s+1}(z)=(1-z)A(z),\qquad E_{s+1}(z)=(1-z)Q(z);$$

si $f(1)=-1$,

$$D_s(z)=A(z),\qquad E_s(z)=Q(z),$$
$$D_{s+1}(z)=(1+z)A(z),\qquad E_{s+1}(z)=(1+z)Q(z).$$

(*En particulier, on a*

$$D_1(z)=u_0-z,\qquad D_2(z)=u_0+\frac{u_1}{1+u_0}z-z^2,$$

$$E_1(z)=1-u_0z,\qquad E_2(z)=1-\frac{u_1}{1+u_0}z-u_0z^2.)$$

De même, pour tout entier n, $1\leqslant n\leqslant s+1$, il existe un couple unique de polynômes premiers entre eux, $D_n^*(z)$ et $E_n^*(z)$ de degré n, tels que $E_n^*(0)=1$, $E_n^*(z)=z^nD_n^*(1/z)$, $E_n^*(z)$ ayant tous ses zéros extérieurs au disque $|z|\leqslant 1$, la fraction rationnelle $D_n^*(z)/E_n^*(z)$ possédant dans $|z|\leqslant 1$, le développement en série de Taylor:

$$\frac{D_n^*(z)}{E_n^*(z)}=u_0+u_1z+\ldots+u_{n-1}z^{n-1}+w_n^*z^n+\ldots$$

De plus, si $f(1) = -1$

$$D^*_{s+1}(z) = (1-z)A(z), \quad E^*_{s+1}(z) = (1-z)Q(z),$$

si $f(1) = 1$

$$D^*_s(z) = A(z), \qquad E^*_s(z) = Q(z),$$
$$D^*_{s+1}(z) = (1+z)A(z), \quad E^*_{s+1}(z) = (1+z)Q(z).$$

(*En particulier, on a*

$$D^*_1(z) = u_0 + z, \qquad D^*_2(z) = u_0 + \frac{u_1}{1-u_0}z + z^2,$$

$$E^*_1(z) = 1 + u_0 z, \qquad E^*_2(z) = 1 + \frac{u_1}{1-u_0}z + u_0 z^2.)$$

2. *On a les inégalités* $w_n < u_n < w^*_n$ *pour* $n < s$,

$$w_s < u_s = w^*_s \text{ si } f(1) = 1 \quad \text{et} \quad w_s = u_s < w^*_s \text{ si } f(1) = -1.$$

Ces inégalités caractérisent les fonctions de Schur.

PROPOSITION 3.4. 1. *Pour* $1 \leqslant n \leqslant s$, *on a les relations suivantes*:

$$D_{n+1}(z) = \frac{w^*_n - u_n}{w^*_n - w_n}(1+z)D_n(z) + \frac{u_n - w_n}{w^*_n - w_n}(1-z)D^*_n(z),$$

$$E_{n+1}(z) = \frac{w^*_n - u_n}{w^*_n - w_n}(1+z)E_n(z) + \frac{u_n - w_n}{w^*_n - w_n}(1-z)E^*_n(z),$$

$$D^*_{n+1}(z) = \frac{w^*_n - u_n}{w^*_n - w_n}(1-z)D_n(z) + \frac{u_n - w_n}{w^*_n - w_n}(1+z)D^*_n(z),$$

$$E^*_{n+1}(z) = \frac{w^*_n - u_n}{w^*_n - w_n}(1-z)E_n(z) + \frac{u_n - w_n}{w^*_n - w_n}(1+z)E^*_n(z).$$

2. *Pour* $1 \leqslant n \leqslant s-1$, *on a les relations*:

$$D_{n+2}(z) = (1+z)D_{n+1}(z) - \frac{u_{n+1} - w_{n+1}}{u_n - w_n} zD_n(z),$$

$$E_{n+2}(z) = (1+z)E_{n+1}(z) - \frac{u_{n+1} - w_{n+1}}{u_n - w_n} zE_n(z),$$

$$D^*_{n+2}(z) = (1+z)D^*_{n+1}(z) - \frac{u_{n+1} - w^*_{n+1}}{u_n - w^*_n} zD^*_n(z),$$

$$E^*_{n+2}(z) = (1+z)E^*_{n+1}(z) - \frac{u_{n+1} - w^*_{n+1}}{u_n - w^*_n} zE^*_n(z).$$

3. *On a pour* $1 \leqslant n \leqslant s$:

$$f_n(z) = \frac{[E^*_n(z) + E_n(z)]f(z) - [D^*_n(z) + D_n(z)]}{[E_n(z) - E^*_n(z)]f(z) - [D_n(z) - D^*_n(z)]}.$$

3. Le théorème d'approximation des nombres algébriques de $\mathscr{T}_q$.

THÉORÈME 3.5. *Soit* θ *un élément de* $\mathscr{T}_q$. *Alors le nombre* $1/\theta$ *est racine d'une équation* $z = A(z)/Q(z) = f(z)$, *où* $f(z)$ *est la fonction de Schur possédant dans* $|z| \leqslant 1$ *le développement en série de Taylor*:

$$f(z) = u_0 + u_1 z + \ldots + u_n z^n + \ldots$$

1. *Si* $f(z)$ *est de rang infini,*

(a) *Pour tout* $n \geqslant 1$, *les équations* $z = D_n(z)/E_n(z)$, *où les* $D_n(z)$ *et* $E_n(z)$ *sont les polynômes définis dans le théorème* 3.3, *possèdent une racine unique* τ_n *dans* $|z| \leqslant 1$, *vérifiant* $0 < \tau_n < 1$ *et* $\tau_n < 1/\theta$.

De plus, la suite des $1/\tau_n$ *est décroissante et tend vers* θ *quand* n *tend vers* $+\infty$.

(b) *Il existe un entier* n_0 (*éventuellement infini*) *tel que pour tout* $n \geqslant n_0$, *le équations* $z = D^*_n(z)/E^*_n(z)$, *où les polynômes* $D^*_n(z)$ *et* $E^*_n(z)$ *sont ceux définis dans le théorème* 3.3, *possèdent une racine unique* τ^*_n *dans* $|z| \leqslant 1$, *vérifiant* $0 < \tau^*_n < 1$ *et* $1/\theta < \tau^*_n$.

De plus, la suite des $1/\tau^*_n$, *définie pour* $n \geqslant n_0$, *est croissante et tend vers* θ *quand* n *tend vers* $+\infty$.

2. *Si* $f(z)$ *est de rang fini* s,

(a) *Pour* $n \leqslant s+1$, *on définit comme dans* 1 (a) *la suite* τ_n, *avec* $1/\tau_n$ *décroissante, telle que* $\theta < 1/\tau_n$ *pour* $n < s$,

$$\theta < 1/\tau_s \text{ si } f(1) = 1, \quad \theta = 1/\tau_s \text{ si } f(1) = -1$$

et dans tous les cas $\theta = 1/\tau_{s+1}$.

(b) *Il existe un entier* n_0, $n_0 \leqslant s+1$, *tel que pour tout* $n \geqslant n_0$, *la suite* $1/\tau^*_n$ *définie comme dans* 1 (b) *soit croissante, vérifiant* $1/\tau^*_n < \theta$ *pour* $n < s$,

$$1/\tau^*_s = \theta \text{ si } f(1) = 1, \quad 1/\tau^*_s < \theta \text{ si } f(1) = -1 \text{ et si } \tau^*_s \text{ existe},$$

et dans tous les cas $1/\tau^*_{s+1} = \theta$.

La démonstration du théorème 3.5 est basée sur l'interprétation des inégalités $|f_n(1/\theta)| < 1$ pour $n \leqslant s-1$, où $f_n(z)$ désigne le $n^{\text{ième}}$ transformé de Schur de la fonction $f(z)$, telle que $1/\theta$ soit racine de l'équation $z = f(z)$.

On peut supposer $s \geqslant 3$, sinon la démonstration est très simplifiée.

$1^{\text{ère}}$ *étape. Interprétation de* $|f_1(1/\theta)| < 1$. Par définition, on a

$$f_1(z) = \frac{f(z) - f(0)}{z[1 - f(0)f(z)]}, \quad f(0) = u_0 \quad \text{et} \quad |u_0| < 1.$$

La fonction $f_1(z)$ étant une fonction de Schur, vérifie donc $|f_1(1/\theta)|<1$, d'après le principe du maximum. Or

$$f_1\left(\frac{1}{\theta}\right)=\frac{f(1/\theta)-u_0}{\frac{1}{\theta}\left[1-u_0 f\left(\frac{1}{\theta}\right)\right]}=\frac{(1/\theta)-u_0}{\frac{1}{\theta}\left[1-u_0\frac{1}{\theta}\right]}.$$

Comme l'on a, $0<1/\theta<1$ et $|u_0|<1$, il s'ensuit: $\frac{1}{\theta}\left[1-u_0\frac{1}{\theta}\right]>0$ et l'inégalité $|f_1(1/\theta)|<1$ est donc équivalente aux deux inégalités:

$$-\frac{1}{\theta}\left[1-u_0\frac{1}{\theta}\right]\underset{(1)}{\leq}\frac{1}{\theta}-u_0\underset{(2)}{\leq}\frac{1}{\theta}\left[1-u_0\frac{1}{\theta}\right].$$

L'inégalité (2) donne: $u_0\left(1-\frac{1}{\theta^2}\right)>0$ soit $u_0>0$.

L'inégalité (1) s'écrit $u_0\frac{1}{\theta^2}-\frac{2}{\theta}+u_0<0$.

Si l'on désigne par τ_1 l'unique racine de module inférieur à 1, $0<\tau_1<1$, du polynôme $g(X)=u_0X^2-2X+u_0$, on voit que l'inégalité (1) signifie:

$$\theta<1/\tau_1.$$

De plus, l'équation $g(X)=0$ peut s'écrire

$$X=\frac{u_0-X}{1-u_0X}=\frac{D_1(X)}{E_1(X)}.$$

2ème *étape*: *Interprétation de l'inégalité* $|f_2(1/\theta)|<1$. D'après la proposition 3.4, 3, on a:

$$f_2\left(\frac{1}{\theta}\right)=\frac{\left[E_2^*\left(\frac{1}{\theta}\right)+E_2\left(\frac{1}{\theta}\right)\right]\frac{1}{\theta}-\left[D_2^*\left(\frac{1}{\theta}\right)+D_2\left(\frac{1}{\theta}\right)\right]}{\left[E_2\left(\frac{1}{\theta}\right)-E_2^*\left(\frac{1}{\theta}\right)\right]\frac{1}{\theta}-\left[D_2\left(\frac{1}{\theta}\right)-D_2^*\left(\frac{1}{\theta}\right)\right]},$$

puisque $f\left(\frac{1}{\theta}\right)=\frac{1}{\theta}$.

Or le dénominateur de $f_2(1/\theta)$ est positif.

En effet, par définition,

$$f_2(z)=\frac{f_1(z)-f_1(0)}{z[1-f_1(0)f_1(z)]},\quad \text{d'où}\quad f_2\left(\frac{1}{\theta}\right)=\frac{f_1\left(\frac{1}{\theta}\right)-f_1(0)}{\frac{1}{\theta}\left[1-f_1(0)f_1\left(\frac{1}{\theta}\right)\right]}.$$

Or

$$\left|f_1(0)f_1\left(\frac{1}{\theta}\right)\right|<1,\quad \text{d'où}\quad \frac{1}{\theta}\left[1-f_1(0)f_1\left(\frac{1}{\theta}\right)\right]>0.$$

De plus,

$$f_1\left(\frac{1}{\theta}\right)=\frac{\left[E_1^*\left(\frac{1}{\theta}\right)+E_1\left(\frac{1}{\theta}\right)\right]\frac{1}{\theta}-\left[D_1^*\left(\frac{1}{\theta}\right)+D_1\left(\frac{1}{\theta}\right)\right]}{\left[E_1\left(\frac{1}{\theta}\right)-E_1^*\left(\frac{1}{\theta}\right)\right]\frac{1}{\theta}-\left[D_1\left(\frac{1}{\theta}\right)-D_1^*\left(\frac{1}{\theta}\right)\right]}$$

et la quantité

$$\left[E_1\left(\frac{1}{\theta}\right)-E_1^*\left(\frac{1}{\theta}\right)\right]\frac{1}{\theta}-\left[D_1\left(\frac{1}{\theta}\right)-D_1^*\left(\frac{1}{\theta}\right)\right]=\frac{2}{\theta}\left(1-u_0\frac{1}{\theta}\right)$$

est strictement positive, par suite, la quantité

$$\left[E_2\left(\frac{1}{\theta}\right)-E_2^*\left(\frac{1}{\theta}\right)\right]\frac{1}{\theta}-\left[D_2\left(\frac{1}{\theta}\right)-D_2^*\left(\frac{1}{\theta}\right)\right]$$
$$=\left\{\left[E_1\left(\frac{1}{\theta}\right)-E_1^*\left(\frac{1}{\theta}\right)\right]\frac{1}{\theta}-\left[D_1\left(\frac{1}{\theta}\right)-D_1^*\left(\frac{1}{\theta}\right)\right]\right\}\frac{1}{\theta}\left[1-f_1(0)f_1\left(\frac{1}{\theta}\right)\right]$$

est strictement positive.

L'inégalité $|f_2(1/\theta)|<1$ est donc équivalente aux inégalités:

$$(1)\qquad D_2\left(\frac{1}{\theta}\right)-\frac{1}{\theta}E_2\left(\frac{1}{\theta}\right)<0$$

et

$$(2)\qquad D_2^*\left(\frac{1}{\theta}\right)-\frac{1}{\theta}E_2^*\left(\frac{1}{\theta}\right)>0.$$

(α) *Etude de l'inégalité* (1). Comme le polynôme $E_2(z)$ a toutes ses racines dans $|z|>1$, le polynôme $V_2(z)=D_2(z)-zE_2(z)$ possède dans $|z|<1$, au plus une racine, d'après le théorème de Rouché et le théorème de continuité des zéros d'une famille de fonctions holomorphes et bornées dans un disque. Nous allons montrer que ce polynôme possède effectivement une racine τ_2, de module inférieur à 1, vérifiant $0<\tau_2<1$.

D'après la proposition 3.4, 1 on a:

$$D_2(1)=\frac{w_1^*-u_1}{w_1^*-w_1}2D_1(1).$$

Or $D_1(1)=u_0-1<0$ et comme $(w_1^*-u_1)/(w_1^*-w_1)>0$, on a $D_2(1)<0$.

D'où $V_2(0) = D_2(0) = u_0 > 0$ et $V_2(1) = 2D_2(1) < 0$. Ceci prouve bien le résultat annoncé. L'inégalité (1) signifie alors $\theta < 1/\tau_2$.

Comparons enfin les racines τ_1 et τ_2.

Comme la racine τ_1 vérifie l'équation: $u_0\tau_1^2 - 2\tau_1 + u_0 = 0$, on en déduit:

$$V_2(\tau_1) = D_2(\tau_1) - \tau_1 E_2(\tau_1) = \tau_1(1+\tau_1)(1-u_0)\left(1 + \frac{u_1}{1-u_0^2}\right) > 0$$

ce qui signifie

$$\tau_1 < \tau_2.$$

(β) *Etude de l'inégalité* (2). On vérifie aisément que l'équation $D_2^*(z) - zE_2^*(z) = 0$ possède la racine $z = 1$. De plus cette équation possède au plus une racine dans $|z| < 1$. On a également

$$\left(\frac{D_2^*(z) - zE_2^*(z)}{1-z}\right)_{z=0} = u_0 > 0.$$

Par suite, ou bien l'équation $D_2^*(z) - zE_2^*(z) = 0$ ne possède pas de racine entre 0 et 1 et l'inégalité (2) est toujours vérifiée, ou bien elle possède une racine τ_2^*, $0 < \tau_2^* < 1$, et l'inégalité (2) signifie $1/\tau_2^* < \theta$.

3ème *étape*: *Interprétation de l'inégalité* $|f_n(1/\theta)| < 1$. D'après la proposition 3.4, 3 on a:

$$f_n\left(\frac{1}{\theta}\right) = \frac{\left[E_n^*\left(\frac{1}{\theta}\right) + E_n\left(\frac{1}{\theta}\right)\right]\frac{1}{\theta} - \left[D_n^*\left(\frac{1}{\theta}\right) + D_n\left(\frac{1}{\theta}\right)\right]}{\left[E_n\left(\frac{1}{\theta}\right) - E_n^*\left(\frac{1}{\theta}\right)\right]\frac{1}{\theta} - \left[D_n\left(\frac{1}{\theta}\right) - D_n^*\left(\frac{1}{\theta}\right)\right]}.$$

On démontre par récurrence que le dénominateur de $f_n(1/\theta)$ est strictement positif. En effet, on a par définition,

$$f_n(z) = \frac{f_{n-1}(z) - f_{n-1}(0)}{z[1 - f_{n-1}(0)f_{n-1}(z)]}$$

et puisque $|f_{n-1}(0)f_{n-1}(1/\theta)| < 1$ et que le dénominateur de $f_{n-1}(1/\theta)$ est positif, on en déduit que le dénominateur de $f_n(1/\theta)$ est positif.

Par suite, l'inégalité $|f_n(1/\theta)| < 1$ est équivalente aux inégalités:

$$D_n\left(\frac{1}{\theta}\right) - \frac{1}{\theta}E_n\left(\frac{1}{\theta}\right) < 0 \tag{1}$$

et

$$D_n^*\left(\frac{1}{\theta}\right) - \frac{1}{\theta}E_n^*\left(\frac{1}{\theta}\right) > 0. \tag{2}$$

(α) *Etude de l'inégalité* (1). Le polynôme $E_n(z)$ ayant toutes ses racines dans $|z| > 1$, le polynôme $V_n(z) = D_n(z) - zE_n(z)$ possède dans $|z| < 1$, au plus une racine.

Or $V_n(0) = D_n(0) = u_0 > 0$ et $V_n(1) = 2D_n(1)$.

Mais d'après la proposition 3.4, 1:

$$D_n(1) = 2\frac{w_{n-1}^* - u_{n-1}}{w_{n-1}^* - w_{n-1}} D_{n-1}(1).$$

Comme les quantités $(w_i^* - u_i)/(w_i^* - w_i)$ sont positives pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$, on voit par récurrence, puisque $D_1(1)$ est négatif, que l'on a: $D_n(1) < 0$ soit $V_n(1) < 0$.

Le polynôme $V_n(z)$ possède donc une unique racine τ_n dans $|z| < 1$ et cette racine vérifie $0 < \tau_n < 1$.

L'inégalité (1) signifie alors: $\theta < 1/\tau_n$.

Nous allons montrer que la suite des $1/\tau_n$ est décroissante.

D'après la proposition 3.4, 2, les polynômes $V_n(z)$ vérifient la relation de récurrence

$$(*) \qquad V_{n+2}(z) = (1+z)V_{n+1}(z) - z\frac{u_{n+1} - w_{n+1}}{u_n - w_n} V_n(z), \qquad n \geqslant 1.$$

On a démontré dans la 2ème étape que l'on avait: $\tau_1 < \tau_2$. On va donc supposer que l'on a $\tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_n < \tau_{n+1}$, et l'on va montrer que l'on a $\tau_{n+1} < \tau_{n+2}$.

D'après (*)

$$V_{n+2}(\tau_{n+1}) = -\tau_{n+1}\frac{u_{n+1} - w_{n+1}}{u_n - w_n} V_n(\tau_{n+1}).$$

Or $V_n(0) = u_0 > 0$ et l'on a $\tau_n < \tau_{n+1}$, par suite, on a $V_n(\tau_{n+1}) < 0$.

Comme $(u_{n+1} - w_{n+1})/(u_n - w_n)$ est positif, on en déduit $V_{n+2}(\tau_{n+1}) > 0$. Enfin, comme $V_{n+2}(0)$ est positif, ceci prouve bien que l'on a: $\tau_{n+1} < \tau_{n+2}$.

Deux cas peuvent alors se présenter:

1. *La fonction $f(z)$ est de rang infini.* La suite des $1/\tau_n$ est une suite de nombres réels, décroissante et minorée par θ. Elle converge donc vers une limite τ. Nous allons montrer l'égalité $\theta = \tau$.

Les fonctions holomorphes

$$\frac{1}{z^n}\left[\frac{D_n(z)}{E_n(z)} - f(z)\right]$$

sont uniformément bornées sur $|z| = 1$, donc dans $|z| \leqslant 1$. Par suite, les fonctions $D_n(z)/E_n(z)$ tendent vers la fonction $f(z)$ quand n tend vers $+\infty$, uniformément sur tout compact de $|z| < 1$. En prenant donc un compact contenant $1/\theta$, ce compact contiendra la suite τ_n et sa limite

$1/\tau$. Par suite, on aura:

$$\frac{D_n(\tau_n)}{E_n(\tau_n)} \to f\left(\frac{1}{\tau}\right)$$

quand n tend vers $+\infty$, ou encore $D_n(\tau_n)/E_n(\tau_n) - \tau_n$ c'est-à-dire la suite nulle tend vers $f(1/\tau) - 1/\tau$ quand n tend vers $+\infty$. On a donc $f(1/\tau) = 1/\tau$ et comme l'équation $z = f(z)$ possède une unique racine $1/\theta$ dans $|z| \leqslant 1$, on aura bien $\tau = \theta$.

2. *La fonction de Schur $f(z)$ est de rang fini s.* Pour $n < s$, on obtient comme précédemment une suite $1/\tau_n$ décroissante.

Pour $n = s$, on a $f_s(0) = \varepsilon$ avec $\varepsilon = \pm 1$ et $f_s(z) \equiv \varepsilon$.

D'où

$$f(z) = \frac{[D_s^*(z) + D_s(z)] - \varepsilon[D_s(z) - D_s^*(z)]}{[E_s^*(z) + E_s(z)] - \varepsilon[E_s(z) - E_s^*(z)]}$$

d'après la proposition 3.4, 3.

Donc si $f_s(0) = 1$, on a $f(z) = D_s^*(z)/E_s^*(z)$ d'où $f(1) = 1$ et par suite $\theta < 1/\tau_s$.

De plus, comme $D_{s+1}(z) = (1-z)A(z)$, $E_{s+1}(z) = (1-z)Q(z)$ avec $f(z) = A(z)/Q(z)$, on a bien $\theta = 1/\tau_{s+1}$.

Si $f_s(0) = -1$, alors $f(z) = D_s(z)/E_s(z)$ et l'on a $f(1) = -1$. On a alors $\theta = 1/\tau_s$.

De plus, $D_{s+1}(z) = (1+z)A(z)$, $E_{s+1}(z) = (1+z)Q(z)$ et par suite $\theta = 1/\tau_{s+1}$.

(β) *Etude de l'inégalité* (2). Le polynôme $E_n^*(z)$ ayant toutes ses racines dans $|z| > 1$, on en déduit, d'après le théorème de Rouché, que le polynôme $V_n^*(z) = D_n^*(z) - zE_n^*(z)$ possède au plus une racine dans $|z| < 1$.

Comme dans le cas $n = 2$, ou bien l'équation $V_n(z) = 0$ ne possède pas de racine comprise entre 0 et 1 et par suite, comme $V_n^*(0) = u_0 > 0$, l'inégalité (2) est toujours vérifiée, ou bien cette équation possède une racine τ_n^* avec $0 < \tau_n^* < 1$.

Dans ce deuxième cas, nous allons montrer que si pour un n_0, l'équation $V_{n_0}^*(z) = 0$ possède une racine entre 0 et 1, alors pour tout $n \geqslant n_0$, l'équation $V_n^*(z) = 0$ possèdera une racine τ_n^* entre 0 et 1.

On remarque tout d'abord que 1 est racine de $V_n^*(z) = 0$. Posons alors $U_n^*(z) = V_n^*(z)/(1-z)$. Dire que l'équation $V_{n_0}^*(z) = 0$ possède une racine $\tau_{n_0}^*$ comprise entre 0 et 1, c'est dire que $U_{n_0}^*(1)$ est négatif, puisque l'on a $U_{n_0}^*(0) = u_0 > 0$.

Or, d'après la proposition 3.4, 1, les polynômes $V_n^*(z)$ vérifient la relation

$$(**) \qquad V_{n+1}^*(z) = \frac{w_n^* - u_n}{w_n^* - w_n}(1-z)V_n(z) + \frac{u_n - w_n}{w_n^* - w_n}(1+z)V_n^*(z).$$

soit encore:

$$U_{n+1}^*(z) = \frac{w_n^* - u_n}{w_n^* - w_n}V_n(z) + \frac{u_n - w_n}{w_n^* - w_n}(1+z)U_n^*(z).$$

Or $V_n(1) = 2D_n(1)$ est négatif (cf. (α)). De plus,

$$\frac{w_n^* - u_n}{w_n^* - w_n} \quad \text{et} \quad \frac{u_n - w_n}{w_n^* - w_n}$$

sont positifs d'après le théorème 3.3. Par suite, si l'on a $U_{n_0}^*(1) < 0$, on aura $U_{n_0+1}^*(1) < 0$. Ceci entraîne donc le résultat annoncé.

Nous allons montrer à présent que la suite $1/\tau_n^*$, définie pour $n \geqslant n_0$ est croissante.

L'inégalité $D_n^*\left(\frac{1}{\theta}\right) - \frac{1}{\theta}E_n^*\left(\frac{1}{\theta}\right) > 0$ signifie $\frac{1}{\theta} < \tau_n^*$.

La relation (**) nous donne pour $z = \tau_n^*$:

$$V_{n+1}^*(\tau_n^*) = \frac{w_n^* - u_n}{w_n^* - w_n}(1-\tau_n^*)V_n(\tau_n^*).$$

Or, on a démontré les inégalités: $\tau_n < 1/\theta < \tau_n^*$. Par suite, on a $V_n(\tau_n^*) < 0$, d'où $V_{n+1}^*(\tau_n^*) < 0$, c'est-à-dire $\tau_{n+1}^* < \tau_n^*$, d'où le résultat.

Deux cas peuvent se présenter:

1. *La fonction $f(z)$ est de rang infini*: La suite infinie de nombres réels $1/\tau_n^*$, définie pour $n \geqslant n_0$, est une suite croissante, majorée par θ; elle tend donc vers une limite $\tilde{\tau}$. Nous allons montrer l'égalité $\theta = \tilde{\tau}$. Les fonctions holomorphes dans $|z| \leqslant 1$,

$$\frac{1}{z^n}\left[\frac{D_n^*(z)}{E_n^*(z)} - f(z)\right]$$

sont uniformément bornées dans $|z| \leqslant 1$. Par suite, les fonctions $D_n^*(z)/E_n^*(z)$ convergent vers la fonction $f(z)$, uniformément sur tout compact de $|z| < 1$. En considérant un compact contenant $1/\theta$, les τ_n^* pour $n \geqslant n_0$ et $1/\tilde{\tau}$, on voit que $D_n^*(\tau_n^*)/E_n^*(\tau_n^*)$ converge vers $f(1/\tilde{\tau})$, puis que $1/\tilde{\tau} = f(1/\tilde{\tau})$ d'où $\theta = \tilde{\tau}$, puisque l'équation $z = f(z)$ possède une racine unique dans $|z| \leqslant 1$.

2. *La fonction $f(z)$ est de rang fini s.* Pour $n < s$, on a toujours la croissance de la suite $1/\tau_n^*$, pour $n \geqslant n_0$. Pour $n = s$, on a $f_s(0) = \varepsilon$ avec $\varepsilon = \pm 1$ et $f_s(z) \equiv \varepsilon$.

Si $f_s(0) = 1$, alors $f(z) = D_s^*(z)/E_s^*(z)$ d'où $f(1) = 1$ et $\theta = 1/\tau_s^*$.

De plus $D_{s+1}^*(z) = (1+z)A(z)$, $E_{s+1}^*(z) = (1+z)Q(z)$ avec $f(z) = A(z)/Q(z)$. Par suite, on a $\theta = 1/\tau_{s+1}^*$.

Si $f_s(0) = -1$, alors $f(z) = D_s(z)/E_s(z)$ d'où $f(1) = -1$ et $1/\tau_s^* < \theta$, pour $n_0 \leqslant s$.

De plus, $D_{s+1}^*(z) = (1-z)A(z)$, $E_{s+1}^*(z) = (1-z)Q(z)$ d'où $\theta = 1/\tau_{s+1}^*$.

Ceci achève la démonstration du théorème 3.5.

On peut alors déduire du théorème 3.5, divers résultats concernant les ensembles $\Sigma_{q,h}$ et $\mathscr{T}_q$.

COROLLAIRE 3.6. *Les éléments des $\Sigma_{q,h}$ pour q fixé et h quelconque $0 < h < 1$, sont tous inférieurs à $q+\sqrt{q^2-1}$.*

En effet, avec les notations du théorème 3.5, on a $\theta < 1/\tau_1$ avec $1/\tau_1 = (1+\sqrt{1-u_0^2})/u_0$ et $u_0 = k/q$, $0 < k < q$. Or la plus grande des valeurs de $1/\tau_1$ est obtenue pour $k = 1$, d'où le corollaire.

COROLLAIRE 3.7. *Le plus grand élément de $\Sigma_{q,h}$ (pour $h \geqslant 1/(q-1)$ et $q > 2$ car tous les nombres de $\Sigma_{2,h}$, sont des nombres de Pisot car leurs inverses sont racines de $z = A(z)/Q(z)$ et l'on a forcément $A(0) = 1$ pour $q = 2$) appartient à l'ensemble S des nombres de Pisot.*

En effet, tous les éléments θ de $\Sigma_{q,h}$ vérifient l'inégalité:

$$D_1\left(\frac{1}{\theta}\right) - \frac{1}{\theta} E_1\left(\frac{1}{\theta}\right) < 0$$

soit $u_0 \dfrac{1}{\theta^2} - \dfrac{2}{\theta} + u_0 < 0$ ou encore $u_0 < \dfrac{2\theta}{1+\theta^2}$.

Or la fonction $\dfrac{2x}{1+x^2}$ est décroissante pour $x > 1$, puisque sa dérivée est négative.

Par suite, si l'on a $u_0 < 2\theta/(1+\theta^2) \leqslant 2/q$, on aura $u_0 = 1/q$ et θ appartiendra à S.

Or la condition $2\theta/(1+\theta^2) \leqslant 2/q$ signifie $\theta \geqslant \theta'$, où θ' est un nombre de $\Sigma_{q,h}$, puisque $1/\theta'$ est l'unique racine inférieure à 1 de l'équation $z = 1/(q-z)$.

Par suite, tous les nombres θ de $\Sigma_{q,h}$, supérieurs à θ' (pour $h \geqslant 1/(q-1)$) appartiennent à l'ensemble S des nombres de Pisot.

COROLLAIRE 3.8. *Le plus grand élément $\hat{\theta}$ de $\Sigma_{q,h}$, pour q fixé et h quelconque voisin de 1, est supérieur aux éléments θ_1 et θ_2 de $\Sigma_{q,h}$ ainsi définis: $1/\theta_1$ est l'unique racine de module inférieur à 1 de l'équation $z = (1-z)/(q-z)$ et $1/\theta_2$ celle de $z = \big(1-(q-1)z\big)/(q-z)$.*

On a les inégalités $\theta_1 < \theta_2 \leqslant \hat{\theta}$. De plus, si $1/\hat{\theta}$ est racine de l'équation $z = f(z)$, où $f(z) = u_0 + u_1 z + \ldots$ dans $|z| \leqslant 1$, on a $u_1 < 0$.

D'après le corollaire 3.7, les plus grands éléments de $\Sigma_{q,h}$ sont supérieurs à θ' et possèdent un u_0 valant $1/q$. D'après le théorème 3.5, on a l'inégalité:

$$D_2\left(\frac{1}{\theta}\right) - \frac{1}{\theta} E_2\left(\frac{1}{\theta}\right) < 0,$$

ce qui peut encore s'écrire:

$$\frac{u_1 q^2}{q+1} < \frac{-\theta^2 + (q+1)\theta - 1}{\theta}.$$

Or la fonction $\big(-x^2 + (q+1)x - 1\big)/x$ est décroissante pour $x \geqslant 1$, car sa dérivée est négative. Par suite, si l'on a $-\theta^2 + \theta(q+1) - 1 \leqslant 0$, c'est-à-dire si $\theta \geqslant \theta_1$, on aura $u_1 < 0$. On sait, en outre, que $\left|\dfrac{u_1}{1-u_0^2}\right| < 1$ soit $|q^2 u_1| < q^2 - 1$ et que $q^2 u_1$ est un entier. Donc, si l'on a:

$$\frac{q+1}{\theta}\big(-\theta^2 + (q+1)\theta - 1\big) \leqslant -(q+1)(q-2),$$

c'est-à-dire si $\theta \geqslant \theta_2$, l'entier $q^2 u_1$ vérifiera:

$$-q^2 + 2 \leqslant q^2 u_1 \leqslant -q^2 + q + 1.$$

COROLLAIRE 3.9. *Les plus grands éléments de l'ensemble $\mathscr{T}_q$ sont, par ordre décroissant, la racine supérieure à 1, $\hat{\tau}$, de l'équation $z = (1-qz)/(q-z)$, puis le nombre de Salem τ, racine de l'équation*

$$z = \frac{1 + (2-q)z - 2(q-1)z^2 - qz^3}{q + 2(q-1)z - (2-q)z^2 - z^3}.$$

Nous allons chercher les éléments θ de $\mathscr{T}_q$ supérieurs ou égaux à τ.

Alors, le nombre $1/\theta$ est racine de l'équation $z = f(z)$ avec $f(z) = u_0 + u_1 z + \ldots$ dans $|z| \leqslant 1$. D'après le corollaire 3.7, comme $\tau > \theta'$, on a $u_0 = 1/q$. D'après le théorème 3.5, on a:

$$\frac{u_1 q^2}{q+1} \leqslant \frac{-\theta^2 + (q+1)\theta - 1}{\theta}.$$

La fonction $\big(-x^2 + (q+1)x - 1\big)/x$ étant décroissante pour $x \geqslant 1$, pour obtenir les plus grands éléments de $\mathscr{T}_q$, il faut prendre la plus petite valeur possible de l'entier $q^2 u_1$. Or, on a toujours $q^2 u_1 \geqslant -q^2 + 1$.

Si $q^2 u_1 = -q^2 + 1$, on a alors $u_1 = w_1$. Par suite, le rang de la fonction de Schur $f(z)$ est 1, d'après le théorème 3.3, 2. On obtient alors le nombre $\hat{\tau}$, racine supérieure à 1 de $z = (1-qz)/(q-z)$.

Si $q^2 u_1 = -q^2 + 2$, comme l'on cherche les $\theta \geqslant \tau$, d'après le théorème 3.5, on a $V_n(1/\theta) \leqslant 0$ avec $V_n(z) = D_n(z) - zE_n(z)$, ce qui entraîne

$$V_n(1/\tau) \leqslant 0. \tag{1}$$

Or

$$V_{n+2}(z) = (1+z)V_{n+1}(z) - z\frac{u_{n+1} - w_{n+1}}{u_n - w_n} V_n(z).$$

Par suite, grâce à (1), on obtient:

$$u_{n+1}-w_{n+1}\leqslant\frac{1+1/\tau}{1/\tau}\,\frac{V_{n+1}(1/\tau)}{V_n(1/\tau)}(u_n-w_n). \tag{2}$$

On a donc pour les θ vérifiant $\tau\leqslant\theta<\hat{\tau}$:

$$u_0=\frac{1}{q},$$

$$D_1(z)=\frac{1}{q}-z,\qquad w_1=-1+\frac{1}{q^2},\qquad u_1=\frac{-q^2+2}{q^2},$$

$$V_1(z)=\frac{1}{q}-2z+\frac{1}{q}z^2,\qquad u_1-w_1=\frac{1}{q^2}.$$

On en déduit alors:

$$D_2(z)=\frac{1}{q}+\frac{2-q^2}{q(q+1)}z-z^2,$$

$$V_2(z)=\frac{1}{q}+z\left[-1+\frac{-q^2+2}{q(q+1)}\right]+z^2\left[-1+\frac{-q^2+2}{q(q+1)}\right]+\frac{1}{q}z^3,$$

d'où $w_2=\dfrac{(1-q^2)q(q+1)+(2-q^2)^2}{q^3(q+1)}$.

Or

$$\frac{D_2(z)}{E_2(z)}-f(z)=(w_2-u_2)z^2+\ldots$$

$$=\frac{(q+1)+(2-q^2)z-q(q+1)z^2}{q(q+1)-(2-q^2)z-(q+1)z^2}-\frac{1+a_1z+\ldots+a_sz^s}{q+q_1z+\ldots+q_rz^r}.$$

Par suite, $q^2(q+1)(u_2-w_2)$ est un entier. De plus, u_2-w_2 doit vérifier la relation (2), pour $n=1$, soit:

$$q^2(q+1)(u_2-w_2)\leqslant\frac{1+1/\tau}{1/\tau}\,\frac{V_2(1/\tau)}{V_1(1/\tau)}\,\frac{1}{q^2}q^2(q+1)=1,$$

puisque $1/\tau$ vérifie l'équation

$$z=\frac{1+(2-q)z-2(q-1)z^2-qz^3}{q+2(q-1)z-(2-q)z^2-z^3}.$$

Par suite, l'entier $q^2(u_2-w_2)$ vaut 0 ou 1. Le cas $u_2=w_2$ ne peut avoir lieu car q^3u_2 est un entier et q^3w_2 ne l'est pas.

La seule possibilité est donc:

$$u_2-w_2=\frac{1}{q^2(q+1)}\quad\text{soit}\quad u_2=\frac{-q^2-2q+4}{q^3}.$$

On a alors

$$D_3(z)=\frac{1}{q}+\frac{2-q}{q}z-\frac{2(q-1)}{q}z^2-z^3,$$

$$V_3(z)=D_3(z)-zE_3(z).$$

On obtient alors $V_3(1/\tau)=0$ et $u_3=w_3$.

Par suite, le seul nombre θ de $\mathscr{T}_q$ vérifiant $\tau\leqslant\theta<\hat{\tau}$ est le nombre de Salem τ, racine de l'équation $V_3(z)=0$ soit:

$$z=\frac{1+(2-q)z-2(q-1)z^2-qz^3}{q+2(q-1)z-(2-q)z^2-z^3}.$$

IV. Généralisation p-adique des nombres de $\mathscr{T}_q$

Dans ce chapitre, on désignera par P l'ensemble de toutes les valuations du corps $\boldsymbol{Q}$ des nombres rationnels, par $|\ |_p$ la valuation p-adique et $|\ |$ la valuation ordinaire.

Soit $\boldsymbol{Q}_p$ le complété de $\boldsymbol{Q}$ pour la valuation p-adique et $\boldsymbol{C}_p$ le complété pour la valuation p-adique de la clôture algébrique de $\boldsymbol{Q}_p$. On désigne par V_P l'anneau des adèles rationnels.

On a donc: $V_P=\{x=(x_p)_{p\in P},\ |x_p|_p\leqslant 1$ pour $p\in P$ sauf pour un nombre fini$\}$.

Cet anneau possède l'élément unité $e_P=(e_p)_{p\in P}$ où $e_p=1$ pour tout p de P.

Si I désigne un sous-ensemble fini de P, on désigne par V_I l'anneau des I-adèles rationnels: $V_I=\{x=(x_p)_{p\in P}$ où $x_p=0$ si $p\notin I\}$.

L'ensemble V_I est donc isomorphe au produit $\prod_{p\in I}\boldsymbol{Q}_p$.

Pour tout élément a de V_I et tout polynôme $A(X)$ à coefficients rationnels, $A(X)=a_0+a_1X+\ldots+a_nX^n$, on pose $A(a)=a_0e_I+a_1a+\ldots+a_na^n$.

Un élément a de V_I est dit algébrique, s'il existe un polynôme $A(X)$ à coefficients rationnels tel que $A(a)=0$. Ceci est équivalent au fait que toutes les composantes a_p, pour tout p dans I, de a, sont algébriques, puisque I est fini.

On désignera par $\mathscr{F}(q,k,\delta)$, comme dans Pisot [12], l'ensemble des fractions rationnelles $\varphi(z)=A(z)/Q(z)$, telles que $A(z)$ et $Q(z)$ soient des polynômes à coefficients entiers rationnels, avec $A(0)\neq 0$, $Q(0)=q\neq 0$ fixé, $Q(z)$ ayant dans $|z|\leqslant 1$, au plus k zéros, $k\geqslant 0$, tous dans une couronne fixe $0<\delta\leqslant|z|<1$ et telles que $|\varphi(z)|\leqslant 1$ sur $|z|=1$.

1. Cas où $I=\{p\}$ et où, par suite, V_I est isomorphe à $\boldsymbol{Q}_p$.

DÉFINITION 4.1. On dira qu'un nombre algébrique θ de $\boldsymbol{Q}_p$ appartient *à l'ensemble* $\mathscr{T}_q^{(p)}(k,\delta)$, si θ appartient à $\boldsymbol{Q}_p$ et vérifie $|\theta|_p>1$ et s'il existe des polynômes $A(z)$ et $Q(z)$ à coefficients entiers rationnels, premiers entre eux, tels que $A(0)\neq 0$, $Q(0)=q$ (q entier $\geqslant 2$), $A(z)/Q(z)$ appartenant à $\mathscr{F}(q,k,\delta)$ et tels que $1/\theta$ soit l'unique racine située dans $|z|_p<1$ de l'équation $z=A(z)/Q(z)$. On suppose de plus que $A(z)/Q(z)$ appartienne à $H(\Delta_p)$ où $\Delta_p=D_p(0,1^+)$, autrement dit que les pôles de $A(z)/Q(z)$ dans $\boldsymbol{C}_p$ soient tous dans $|z|_p>1$, et que l'on ait $|A(z)/Q(z)|_p<1$ sur $|z|_p=1$.

Remarque. Cette définition entraîne que p divise tous les coefficients des polynômes $A(z)$ et $Q(z)$ sauf q.

PROPOSITION 4.2. *L'ensemble* $\mathscr{T}_q^{(p)}(k,\delta)$ *est fermé dans* $\boldsymbol{Q}_p$.

Considérons une suite de nombres θ appartenant à $\mathscr{T}_q^{(p)}(k,\delta)$ et tendant vers une limite θ^* dans $\boldsymbol{Q}_p$, telle que l'on ait $|\theta^*|_p>1$. A cette suite, on associe la suite des fractions rationnelles $A(z)/Q(z)$ introduites dans la définition de θ. Ces fractions rationnelles appartiennent à l'ensemble $\mathscr{F}(q,k,\delta)$.

Or, d'après le théorème 0.2, il existe un élément $A^*(z)/Q^*(z)$ de $\mathscr{F}(q,k,\delta)$, tel que dans $\boldsymbol{C}_p$, une sous-suite de la suite des $A(z)/Q(z)$ converge uniformément dans tout disque $|z|_p\leqslant r_p<|q|_p=1$, vers la fraction rationnelle $A^*(z)/Q^*(z)$.

Puisque l'on a $|A(z)/Q(z)|_p<1$ sur $|z|_p=1$ et que $A(z)/Q(z)$ appartient à $H(\Delta_p)$, on en déduit que l'on a $|A^*(z)/Q^*(z)|_p<1$ sur $|z|_p=1$ et que $A^*(z)/Q^*(z)$ appartient à $H(\Delta_p)$.

Par suite, l'équation $z=A^*(z)/Q^*(z)$ possède une racine unique dans $|z|_p<1$, d'après le théorème de Rouché p-adique et cette racine appartient donc à $\boldsymbol{Q}_p$. Cette racine est $1/\theta^*$. En effet, on a $\dfrac{1}{\theta}=\dfrac{A(1/\theta)}{Q(1/\theta)}$ et la convergence des $A(z)/Q(z)$ vers $A^*(z)/Q^*(z)$ étant uniforme dans tout disque fermé de $|z|_p<1$, on en déduit par passage à la limite $\dfrac{1}{\theta^*}=\dfrac{A^*(1/\theta^*)}{Q^*(1/\theta^*)}$. Comme l'équation $z=A^*(z)/Q^*(z)$ possède une racine unique dans $|z|_p<1$, ceci achève la démonstration.

Cas particulier. En prenant $k=0$ dans la définition précédente, on obtient l'ensemble fermé de nombres algébriques $\mathscr{T}_q^{(p)}$.

EXEMPLE. Soit p un nombre premier ne divisant pas q et tel que l'on ait $q>p$. Alors l'équation $z=(p-pz^m)/(q-pz^m)$ nous définit des inverses de nombres θ appartenant à $\mathscr{T}_q^{(p)}$.

On voit également sur cet exemple que l'ensemble $\mathscr{T}_q^{(p)}$ possède des nombres algébriques de n'importe quel degré.

2. Cas où I est un sous-ensemble fini quelconque de P.

DÉFINITION 4.3. On dira qu'un nombre algébrique $\theta=(\theta_p)_{p\in I}$ appartenant à V_I, *appartient à l'ensemble* $\mathscr{T}_q^I$, si $|\theta_p|_p>1$ pour tout p de I et s'il existe des polynômes $A(z)$ et $Q(z)$ à coefficients entiers rationnels premiers entre eux tels que $A(0)\neq 0$, $Q(0)=q$ entier fixé, $q\geqslant 2$, avec $A(z)/Q(z)\in\mathscr{F}(q,0)$, tels que $1/\theta=(1/\theta_p)_{p\in I}$ soit racine de l'équation $z=A(z)/Q(z)$ et que pour chaque p de I, $1/\theta_p$ soit l'unique racine dans $|z|_p<1$ de l'équation $z=A(z)/Q(z)$.

On suppose de plus que,

(a) pour tout p de $I-\{0\}$, les pôles de $A(z)/Q(z)$ dans $\boldsymbol{C}_p$ sont tous dans $|z|_p>1$ et que $|A(z)/Q(z)|_p<1$ sur $|z|_p=1$.

(b) pour p n'appartenant pas à $I\cup\{0\}$, on a $|A(0)|_p=1$.

(c) les racines dans $\boldsymbol{C}$ de l'équation $z=A(z)/Q(z)$, différentes de $1/\theta_{(0)}$ si 0 appartient à I, appartiennent toutes à $|z|\geqslant 1$.

Remarque. La condition (b) implique, en regardant le polygône de Newton relatif au polynôme $A(z)-zQ(z)$ que pour $p\notin I\cup\{0\}$, les racines de $z=A(z)/Q(z)$ dans $\boldsymbol{C}_p$ appartiennent toutes au complémentaire du disque $|z|_p<1$.

PROPOSITION 4.4. *L'ensemble* $\mathscr{T}_q^I$ *est fermé dans* V_I.

Soit une suite de nombres θ de $\mathscr{T}_q^I$, tendant vers θ^* élément de V_I tel que $|\theta_p^*|_p>1$ pour tout p de I. A chaque θ de $\mathscr{T}_q^I$ est associé une suite $A(z)/Q(z)$ de fractions rationnelles appartenant à $\mathscr{F}(q,0)$. Comme précédemment, on peut en extraire une sous-suite notée encore $A(z)/Q(z)$, qui converge vers un élément $A^*(z)/Q^*(z)$ de $\mathscr{F}(q,0)$, uniformément sur tout compact de $|z|<1$ et uniformément dans tout disque $|z|_p\leqslant r_p<|q|_p$ pour tout p de P.

1^er^ *cas. L'ensemble I contient la valeur absolue ordinaire.*

(1) Si p appartient à $I-\{0\}$, on montre comme dans la proposition 4.2 que la suite θ_p tend vers θ_p^* dont l'inverse est l'unique racine dans $\boldsymbol{Q}_p$ de l'équation $z=A^*(z)/Q^*(z)$.

(2) Si p n'appartient pas à I, d'après la convergence uniforme, dans tout disque $|z|_p\leqslant r_p<|q|_p$, de la suite $A(z)/Q(z)$ vers $A^*(z)/Q^*(z)$ et puisque $|A(0)|_p=1$, cela entraîne $|A^*(0)|_p=1$.

(3) Si p est la valuation ordinaire, alors d'après la proposition 3.1, la suite $\theta_{(0)}$ converge vers $\theta_{(0)}^*$ tel que $1/\theta_{(0)}^*$ soit l'unique racine dans $|z|<1$ de l'équation $z=A^*(z)/Q^*(z)$.

2^ème^ *cas. L'ensemble I ne contient pas la valuation ordinaire.* Alors pour p dans I (resp. $p\notin I$, $p\neq 0$), on fait le raisonnement du 1^er^ cas (1) (resp. du 1^er^ cas (2)).

Si p est la valuation ordinaire, on considère la famille de fonctions holomorphes et bornées dans $|z|\leqslant 1$, $z-A(z)/Q(z)$, qui converge unifor-

mément sur tout compact de $|z|<1$ vers la fonction holomorphe et bornée dans $|z|\leqslant 1$, $z-A^*(z)/Q^*(z)$. Comme les fonctions holomorphes $z-A(z)/Q(z)$ ne possèdent pas de zéro dans $|z|<1$, d'après le théorème sur la continuité des zéros d'une famille de fonctions holomorphes et bornées dans un disque, on voit que $z-A^*(z)/Q^*(z)$ ne possède pas de zéro dans $|z|<1$. La proposition se trouve ainsi démontrée.

Nous allons maintenant comparer l'ensemble $\mathscr{T}_q^I$ et l'ensemble des nombres algébriques S_I défini dans la thèse d'A. Decomps [8].

L'ensemble S_I est l'ensemble des éléments $\theta=(\theta_p)_{p\in I}$ de V_I, vérifiant pour tout p de I, $|\theta_p|_p>1$ et pour lesquels il existe un polynôme $A'(z)$ à coefficients entiers rationnels, ayant les propriétés suivantes:

1° θ est racine du polynôme $A'(z)$.

2° pour tout p de I, les racines de $A'(z)$ dans $\boldsymbol{C}_p$, distinctes de θ_p, appartiennent au disque $|z|_p\leqslant 1$.

3° pour tout p de P, $p\notin I$, les racines de $A'(z)$ dans $\boldsymbol{C}_p$, appartiennent au disque $|z|_p\leqslant 1$.

En supposant le polynôme $A'(z)$ primitif, on voit facilement qu'il a une expression de la forme :

$$A'(z)=bz^s+a_{s-1}z^{s-1}+\ldots+a_0,$$

avec $b=\prod_{p\in I-\{0\}}p^{t_p}$, t_p entier positif, et $|a_{s-1}|_p=1$ pour p dans $I-\{0\}$.

De plus, les racines du polynôme $A'(z)$ dans le corps $\boldsymbol{C}$ des complexes, appartiennent toutes au disque $|z|\leqslant 1$ (sauf éventuellement $\theta_{(0)}$ si 0 appartient à I). Réciproquement, un élément θ de V_I, vérifiant pour tout p de I, $|\theta|_p>1$, et racine dans V_I d'un tel polynôme, appartient à S_I.

Corollaire 4.5. *L'ensemble $\mathscr{T}_q^I$ est un sous-ensemble fermé de S_I.*

En effet, d'après la remarque suivant la définition 4.1, on voit que si θ appartient à $\mathscr{T}_q^I$, alors $|\theta_p|_p>1$ pour p dans I et θ est racine d'un polynôme $A'(z)$, à coefficients entiers rationnels, où $A'(z)$ est le polynôme réciproque du polynôme $A(z)-zQ(z)$ avec $A'(z)$ de la forme:

$$A'(z)=\Big(\prod_{p\in I-\{0\}}p^{t_p}\Big)z^s+a_{s-1}z^{s-1}+\ldots+a_0$$

où $|a_{s-1}|_p=1$ pour $p\in I-\{0\}$.

De plus, les racines de $A'(z)$ dans $\boldsymbol{C}$, différentes de $\theta_{(0)}$, si 0 appartient à I, sont dans $|z|\leqslant 1$.

Remarque. Si I contient au moins une valeur absolue p-adique, le polynôme $A'(z)$ ayant pour racine l'élément θ de V_I est proportionnel au polynôme minimal de θ dans V_I, noté $\mathrm{Pm}_I(\theta,z)$.

On a donc la relation $A'(z)=b\,\mathrm{Pm}_I(\theta,z)$ avec $b=\prod_{p\in I-\{0\}}p^{t_p}$.

En effet, dans le cas contraire, on aurait:

$A'(z)=b\,\mathrm{Pm}_I(\theta,z)B(z)$ avec $B(z)$ polynôme unitaire de $\boldsymbol{Z}[z]$ de degré supérieur ou égal à 1, avec $B(0)\neq 0$. Or les racines de $B(z)$ dans $\boldsymbol{C}_p$ pour p dans P appartiennent toutes au disque $|z|_p\leqslant 1$. De plus, pour tout p dans I, $p\neq 0$, d'après la remarque suivant la définition 4.1, tous les coefficients a_i de $A'(z)$, pour $i\neq s-1$, sont divisibles par p. Par suite, pour $p\neq 0$, p dans I, les racines autres que θ_p appartiennent à $|z|_p<1$. D'où $|B(0)|_p<1$ pour p dans I, $p\neq 0$ et par suite, $\prod_{p\in P}|B(0)|_p<1$, ce qui entraine $B(0)=0$ et la contradiction.

On peut également démontrer la proposition suivante.

Proposition 4.6. *Si l'ensemble I contient au moins une valeur absolue p-adique l'ensemble $\mathscr{T}_q^I$ est un sous-ensemble fermé de tous les ensembles $S_I^{p'}$, pour tout p' dans $I-\{0\}$, les $S_I^{p'}$ étant les ensembles définis par F. Bertrandias* [4].

Donnons d'abord la définition des ensembles $S_I^{p'}$.

Si p' est un élément de P, $S_I^{p'}$ est l'ensemble des éléments algébriques θ de V_I tels que $|\theta|_p>1$ pour tout p de I et pour lesquels il existe un polynôme $A(z)$ à coefficients entiers rationnels, ayant les propriétés suivantes.

1° θ est racine de $A(z)$ dans V_I.

2° les racines de $A(z)$ dans $\boldsymbol{C}_{p'}$ (distinctes de $\theta_{p'}$ si $p'\in I$) appartiennent au disque $|z|_{p'}<1$.

3° pour tout p de I, les racines de $A(z)$ dans $\boldsymbol{C}_p$, distinctes de θ_p appartiennent au disque $|z|_p\leqslant 1$.

4° pour tout p de P, $p\notin I$, les racines de $A(z)$ dans $\boldsymbol{C}_p$ appartiennent au disque $|z|_p\leqslant 1$.

Remarquons que les conditions imposeés au polynôme $A(z)$ entrainent (si $A(z)$ est supposé primitif) que l'on a: $A(z)=bz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_0$, avec $|a_{n-1}|_p=1$ pour $p\in I-\{0\}$ et $b=\prod_{p\in I-\{0\}}p^{t_p}$, t_p entier positif.

Réciproquement, un élément θ de V_I vérifiant $|\theta_p|_p>1$ pour p dans I, racine dans V_I d'un polynôme $A(z)$ de la forme ci-dessus, appartient à $S_I^{p'}$, si l'on rajoute la condition: les racines de $A(z)$ dans $\boldsymbol{C}_{p'}$ (distinctes de $\theta_{p'}$ si $p'\in I$) appartiennent au disque $|z|_{p'}<1$.

Pour démontrer la proposition 4.6 il suffit alors de remarquer que pour toute valuation p-adique p' de I, l'équation $z=A(z)/Q(z)$ ne possède pas de racine dans $\boldsymbol{C}_{p'}$ située sur $|z|_{p'}=1$, car l'on a sur $|z|_{p'}=1$, $|A(z)/Q(z)|_{p'}<1$.

Bibliographie

[1] M. Amara, *Ensembles fermés de nombres algébriques*, Ann. Sci. École Norm. Sup., 3ème série, 83 (1966), p. 215–270.

[2] Marie-José Bertin, *Caractérisation de l'ensemble dérivé de l'ensemble S_q*, C. R. Acad. Sci. Paris 279 (1974), A 251–254.

[3] Marie-José Bertin, *De nouveaux ensembles fermés de nombres algébriques*, Séminaire Delange–Pisot–Poitou 17 (1975–1976), Exp. No 31.
[4] Françoise Bertrandias, *Ensembles remarquables d'adèles algébriques*, Bull. Soc. Math. France — Mémoire 4 (1965).
[5] Christiane Chamfy, *Fonctions méromorphes dans le cercle unité et leurs séries de Taylor*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 8 (1958), p. 211–261.
[6] A. Connes, *Localisation de zéros de polynômes*, Séminaire Delange–Pisot–Poitou, 12 (1970–1971), Exp. No 18.
[7] — *Ordres faibles et localisation de zéros de polynômes*, Séminaire Choquet 9 (1969–1970), Exp. No 5.
[8] Annette Decomps-Guilloux, *Généralisation des nombres de Salem aux adèles*, Acta Arith. 16 (1970), p. 265–314.
[9] J. Dufresnoy et C. Pisot, *Etude de certaines fonctions méromorphes bornées sur le cercle unité. Application à un ensemble fermé de nombres algébriques*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 72 (1955), p. 69–92.
[10] J. B. Kelly, *A closed set of algebraic integers*, Amer. J. Math. 72 (1950), p. 565–572.
[11] C. Pisot, *Familles compactes de fractions rationnelles et ensembles fermés de nombres algébriques*, Ann. Sci. École Norm. Sup., 3ème série, 81 (1964), p. 165–188.
[12] — *Quelques aspects de la théorie des entiers algébriques*, Séminaire de Math. Sup. Montréal été 1963, Presses Univ. Montréal, 1966.
[13] R. Salem, *A remarquable class of algebraic integers. Proof of a conjecture of Vijayaraghavan*, Duke Math. Journ. 11 (1944), p. 103–109.
[14] I. Schur, *Über Potenzreihen die im innern des Einheitskreises beschränkt sind*, Journ. Reine Angew. Math. 147 (1917), p. 205–232.

Reçu le 12. 4. 1978

et dans la forme modifiée le 16. 12. 1978 (1014)

ACTA ARITHMETICA
XXXIX (1981)

Facteurs premiers d'entiers en progression arithmétique

par

M. Langevin (Lozère)

1. Historique et résultats. Une application simple de la méthode de Baker est donnée par l'énoncé suivant où P désigne la fonction plus grand facteur premier:

Théorème 0. *Pour tout réel* $t<1$,

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\inf_{0<n'-n<n^t} P(nn')/\log\log n\Big)>0.$$

Démonstration. Ecrire l'égalité du quotient n'/n avec son expression comme produit de puissances de nombres premiers, former le logarithme des deux membres et appliquer la méthode de Baker (par exemple, voir [5]).

Jointe à des arguments arithmétiques et combinatoires, cette technique a permis à Ramachandra, Shorey, Tijdeman (séparément ou collectivement) d'étudier les facteurs premiers d'entiers consécutifs. Le but de cet article est d'établir un théorème global contenant leurs résultats et les généralisant aux entiers d'une progression arithmétique.

Notations: la lettre p est réservée aux nombres premiers; on définit les fonctions π et ω par $\pi(n)=\sum_{p\leqslant n}1$, $\omega(n)=\sum_{p\mid n}1$; si X est un ensemble fini d'entiers, on écrit $P(X)$, $\omega(X)$, ... pour $P\big(\prod_{x\in X}x\big)$, $\omega\big(\prod_{x\in X}x\big)$, ...; on note $\log_2, \log_3$ pour loglog, logloglog; on abrège cardinal en card; $(a,b)=\sup(d, d|a, d|b)$.

Théorème 1 (Théorème global). *Soient des réels* $t_1<1$, $t_2>0$, $t_3<1$, $t_4>1$, $t_5>0$, $t_6>0$. *Soient* n, k, a *des entiers tels que*

$$n>1,\quad a\geqslant 1,\quad (n,a)=1,\quad k\geqslant 2,\quad a<n^{t_1}. \tag{1}$$

Aucune partie X *de l'ensemble* $\{n+a, n+2a, \ldots, n+ka\}$ *ne peut vérifier simultanément*:

$$\omega(X)\leqslant j\operatorname{card}X, \tag{2}$$

$$\pi\big(P(X)\big)\leqslant j\cdot k^{t_2}, \tag{3}$$

$$\operatorname{card}X\geqslant \xi \tag{4}$$