for any $r, s, t \in K$. Denote $(u, v) = (\Delta^2 f)(ue_1, ve_2)$. Since (u, v) is Z-bilinear and $2 = 0$ in K, it follows that the above determinant is equal to

$$\begin{aligned}&((s+t)^3+s^3+t^3)(1,r)+((r+t)^3+r^3+t^3)(1,s)+((r+s)^3+r^3+s^3)(1,t)\\ &\quad=(s+t, r(s+t))+(s, rs)+(t, rt)+(r+t, s(r+t))+(r, rs)+(t, st)+\\ &\quad+(r+s, t(r+s))+(r, rt)+(s, st)=(s, rt)+(t, rs)+(r, st)+(t, rs)+\\ &\quad+(r, st)+(s, rt)=0.\end{aligned}$$

This completes the proof.

It should be interesting to explain the situation for arbitrary fields. In particular, is the above theorem also true for $m = 4$?

References

[1] M. Ferrero and A. Micali, *Sur les n-applications*, Bull. Soc. Math. France Mém. 59 (1979), pp. 33–53.

[2] A. Prószyński, *Some functors related to polynomial theory*, Fund. Math. 98 (1978), pp. 219–229.

INSTITUTE OF MATHEMATICS
POLISH ACADEMY OF SCIENCES

Accepté par la Rédaction le 16. 2. 1979

Indécidabilité de la théorie des anneaux de séries formelles à plusieurs indéterminées

par

Françoise Delon (Paris)

Abstract. We precise the degree of indecidability of rings of power series with several variables over a field: We define the second order arithmetic in power series ring $k[[\overline{X}]]$, in convergent series ring $k\{\overline{X}\}$, and algebraic series ring $Nk(\overline{X})$; we prove that each arithmetical serie is definable and that none of the inclusions $Nk(\overline{X}) \subset k\{\overline{X}\} \subset k[[\overline{X}]]$ is elementary; we give criteria of non elementary equivalence between power series rings over equivalent fields.

Les anneaux de séries formelles à une indéterminée sur un corps k de caractéristique nulle sont bien connus depuis les travaux d'Ax et Kochen [3] [4] et d'Ershov [9] [10]. On sait ainsi que $k[[X]]$ est décidable ssi k l'est, que $k_1[[X]] \equiv k_2[[X]]$ ssi $k_1 \equiv k_2$ et que l'inclusion $\boldsymbol{C}\{X\} \subset \boldsymbol{C}[[X]]$, où $\boldsymbol{C}\{X\}$ est l'ensemble des séries convergentes, est élémentaire. Le cas de plusieurs indéterminées est entièrement différent: Ershov [11] a montré l'indécidabilité des anneaux $A[[X_1, \ldots, X_m]]$, où A est un anneau commutatif et $m \geqslant 2$. Plus récemment Becker et Lipshitz [5] ont établi la définissabilité de N dans $k[[X_1, \ldots, X_m]]$, si carac $(k) = 0$, et donné des exemples de corps $k_1 \equiv k_2$, $k_1[[X_1, \ldots, X_m]] \not\equiv k_2[[X_1, \ldots, X_m]]$.

En 1951 R. M. Robinson [12] définissait N dans $k[X]$, grâce à la propriété qu'a cet anneau d'être factoriel. *A priori*, la même idée ne permet dans $k[[X_1, \ldots, X_m]]$ que de définir l'ensemble des séries dont le terme constant est un entier. Un raffinement de la méthode, déjà remarqué par Becker et Lipshitz, conduit au résultat. Les techniques utilisées ici sont plus précises en ce sens qu'elles permettent de définir autre chose que des séries constantes; on montre par exemple, que $Z[X_1]$ ou $k_0[X_1]$ (k_0 est constitué par les éléments de k algébriques sur Q) sont définissables dans $k[[X_1, \ldots, X_m]]$; plus généralement, est définissable tout anneau $A[X_1]$ ou $A[[X_1]]$, où A est lui-même définissable dans $k[[X_1, \ldots, X_m]]$. Cela permet de renforcer considérablement les résultats antérieurs:

(i) On définit dans $k[[X_1, \ldots, X_m]]$ le modèle standard de l'arithmétique du second ordre.

(ii) Si $(a_n)_{n\in\omega}$ est une suite arithmétique en n, la série $\Sigma a_n X_1^n$ est définissable. Si k est un corps réel clos, tout réel arithmétique est définissable dans $k[[X_1, ..., X_m]]$. Cela fournit donc des critères de non-équivalence élémentaire entre anneaux de séries sur des corps réels archimédiens.

(iii) L'inclusion $C\{X_1, ..., X_m\} \subset C[[X_1, ..., X_m]]$, $m \geqslant 2$, n'est pas élémentaire. Becker et Lipshitz [5] avaient résolu le cas $m = 6$ dans un langage enrichi, et conjecturé le résultat général que nous démontrons ici.

(iv) Si $Nk(X_1, ..., X_m)$ est l'anneau des séries algébriques sur $k[X_1, ..., X_m]$, nous démontrons

$$Nk(X_1, ..., X_m) \not\prec k[[X_1, ..., X_m]],$$
$$NC(X_1, ..., X_m) \not\prec C\{X_1, ..., X_m\} \not\prec C[[X_1, ..., X_m]].$$

(v) On sait étendre au cas de la caractéristique $p > 0$ et $m \geqslant 3$ les résultats gardant un sens.

Ces résultats, établis indépendamment de [5], sont déja partiellement contenus dans [7], et une note résumée [8] a été publiée.

Conventions et notations. On note $\overline{X}$ le multiplet $(X_1, ..., X_n)$ où l'on suppose $m \geqslant 2$; $(a_1, ..., a_n)$ est l'idéal engendré dans $k[[\overline{X}]]$ par $a_1, ..., a_n$; M est l'idéal maximal de $k[[\overline{X}]]$. La notation $k\{X\}$ sous-entendra que k est un sous-corps de C. La valuation considérée sera toujours la valuation totale associée à l'idéal M. On notera $\mathrm{val}(x)$ la valuation d'une série x.

Les anneaux $k[[\overline{X}]]$, $k\{\overline{X}\}$, $Nk(\overline{X})$ sont factoriels. On appellera associées deux séries admettant les mêmes diviseurs; irréductible une série non inversible minimale pour la divisibilité; premières entre elles des séries non inversibles ne comportant pas de terme commun dans leur décomposition en produit de facteurs irréductibles.

1. Définition d'un ensemble comme intersection de ses saturés. Pour définir un sous-ensemble E de $k[[\overline{X}]]$ on procédera toujours en deux temps:

définition de l'ensemble $E_{ab} = \{x \in k[[\overline{X}]]$; il existe $u \in E, u \equiv x (\mathrm{mod}(a, b))\}$ pour de "bons" a et b.

obtention de l'ensemble E comme intersection des E_{ab}.

C'est la deuxième étape qui est l'objet de ce chapitre; la proposition 1.2 est là pour expliquer la démarche mais ne sert pas dans la preuve des autres résultats et exige, contrairement à eux, un corps de caractéristique nulle.

LEMME 1.1. *Soient a et b deux séries premières entre elles dans $k[[\overline{X}]]$. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes:*

(i) *$a+\lambda b$ et $a+\mu b$ sont associés,*
(ii) $\lambda \equiv \mu (\mathrm{mod}(a+\lambda b))$,
(iii) $\lambda \equiv \mu (\mathrm{mod}(a+\mu b))$.

Démonstration. (i) implique (ii): Supposons qu'il existe u inversible tel que:

$$(a+\lambda b)u = a+\mu b.$$

On en déduit, puisque a et b sont premiers entre eux:

$$u-1 = bc,$$
$$\mu-\lambda u = ac,$$

soit en éliminant u:

$$\mu-\lambda = c(a+\lambda b).$$

(ii) implique (i): Si λ et μ vérifient l'égalité ci-dessus, on a:

$$a+\mu b = (a+\lambda b)(1-cb)$$

où $1+cb$ est une unité, puisque b n'est pas inversible.

L'équivalence (ii) ssi (iii) et alors évidente.

Remarque. Dès qu'on aura démontré la définissabilité d'une relation dans $(k[[\overline{X}]], +, .)$, on se permettra de l'utiliser dans l'écriture d'une formule, en faisant apparaître variables et paramètres; c'est le cas des relations: "$x_1 \equiv x_2$" $(\mathrm{mod}(u_1, ..., u_n))$ et "x_1 divise x_2", qu'on notera "x_1/x_2".

PROPOSITION 1.2. *Soit k un corps de caractéristique 0, a et $b \in k[[\overline{X}]]$ vérifiant les hypothèses:*

a et b sont premiers entre eux,
(1) $\mathrm{val}(a) = 1$,
$\mathrm{val}(b) > 1$.

Alors l'ensemble $\{u \in k[[\overline{X}]]$; il existe $n \in N$, $u \equiv n (\mathrm{mod}(a, b))\}$ est définissable dans $(k[[\overline{X}]], +, .)$.

Démonstration. Si a et b satisfont les hypothèses (1) considérons la formule

$$N(x, a, b) = \exists v[v \neq 0 \wedge n(v, x, a, b)]$$

où $n(v, x, a, b)$ est la formule:

$$(a|v) \wedge \forall \lambda \{(a+\lambda b|v) \rightarrow \exists \mu[\mu \equiv \lambda+1 (\mathrm{mod}(a, b)) \wedge (a+\mu b|v)] \vee [\lambda \equiv x (\mathrm{mod}(a, b))]\}.$$

Montrons qu'elle définit les entiers modulo (a, b).

1° Soit x satisfaisant $N(x, a, b)$. Les séries $a, a+\lambda_1 b, ..., a+\lambda_p b, ...$ avec λ_p congru à p modulo (a, b), sont irréductibles parce qu'exactement de valuation 1, et non associées d'après le lemme 1.1. Une série v non nulle ne peut donc admettre pour diviseurs qu'un nombre fini d'entre elles. Si p_0 est le plus grand entier p pour lequel $a+pb$ divise v (il en existe puisque a divise v), on a nécessairement $x \equiv p_0$ (modulo (a, b)).

2° Supposons réciproquement que x vérifie la congruence ci-dessus et soit $v_0 = a(a+b) ... (a+p_0 b)$. On va montrer que $n(v_0, x, a, b)$ est satisfaite dans

$k[[\bar{X}]]$. Cherchons pour cela tous les diviseurs de v_0 de la forme $a+\lambda b$. Un tel diviseur est nécessairement associé à un facteur irréductible de v_0 et vérifie:

$$\lambda \equiv p(\mathrm{mod}(a, b)), \quad \text{pour un entier } p,\ 0 \leqslant p \leqslant p_0 .$$

Deux cas se présentent:

si $p<p_0$, alors $a+(p+1)b$ divise v, avec $p+1 \equiv \lambda+1 \ (\mathrm{mod}(a, b))$,

si $p = p_0$, on a $\lambda \equiv p \equiv p_0 \ (\mathrm{mod}(a, b))$, correspondant aux deux termes de la disjonction de la formule $n(v, x, a, b)$.

LEMME 1.3. *L'intersection des idéaux (X_1, X_2^p) quand p décrit N, ou tout ensemble infini d'entiers, est l'idéal principal (X_1).*

Démonstration. L'idéal (X_1) est manifestement inclus dans $\bigcap_{p \in N} (X_1, X_2^p)$. Pour montrer l'inclusion inverse, considérons un élément x de cette intersection. Pour tout entier p, x s'écrit $x = a_p X_1 + b_p X_2^p$, ce qui montre que $\mathrm{val}(x - a_p X_1) \geqslant p$. Autrement dit, x est la limite pour la topologie M-adique, de la suite $(a_p X_1)_{p \in N}$. On déduit de la complétude et de la séparation de $k[[\bar{X}]]$ que a_p est convergente et que:

$$x = X_1 \lim a_p, \quad \text{donc } x \in (X_1) .$$

LEMME 1.4. *L'intersection $\bigcap_{p,n \in P} (X_1 + X_2^p, X_2^n)$, où P est un ensemble infini d'entiers, est l'idéal $\{0\}$.*

Démonstration. On sait que la substitution envoyant X_1 sur $X_1 + X_2^p$ et laissant invariantes les autres indéterminées, définit un automorphisme de $k[[X]]$, si $p \in N^*$. Du lemme précédent, on déduit donc:

$$\bigcap_{n \in P} (X_1 + X_2^p, X_2) = (X_1 + X_2^p) .$$

Le résultat est alors immédiat, puisque $k[[\bar{X}]]$ est factoriel et que deux séries $X_1 + X_2^p$ et $X_1 + X_2^n$ sont associées ssi $p = n$ (lemme 1.1).

PROPOSITION 1.5. *Soit S un sous-ensemble de $k[[\bar{X}]]$[1] ayant les propriétés suivantes:*

(i) *il existe une formule F (éventuellement avec paramètres $\bar{m}$), telle que, si a et b vérifient* (1), *$F(\bar{x}, a, b)$ définit le saturé S_{ab} de S pour la congruence associée à (a, b);*

(ii) *si $\bar{y}_1, \bar{y}_2 \in S$ et $y_1 \equiv y_2 (\mathrm{mod}(X_1, X_2))$, alors $y_1 = y_2$;*

alors S est définissable avec paramètre X_1 (et éventuellement $\bar{m}$).

Démonstration. Considérons la relation binaire R, définie de la façon suivante: $R(a, b)$ ssi il existe c non inversible et non irréductible tel que

$a = X_1 + c$,

b n'est ni inversible, ni irréductible,

a ne divise pas b.

Cette relation est plus forte que les hypothèses (1) sur a et b; on a donc, quand a et b sont liés par R: $\bar{x} \in S_{ab}$ ssi $F(\bar{x}, a, b)$. Nous allons en déduire: $S = \bigcap_{R(a,b)} S_{ab}$. Ceci montrera que S est défini par la formule en $\bar{x}$:

$$\{\forall a \forall b [\mathrm{déf}_R(a, b) \to F(\bar{x}, a, b)]\}$$

où $\mathrm{déf}_R$ est une définition de R.

L'inclusion $S \subset \bigcap_{R(a,b)} S_{ab}$ est évidente par réflexivité des congruences; pour montrer l'inclusion réciproque, soit $x \in \bigcap_{R(a,b)} S_{ab}$. Pour tout couple (a, b) lié par R, il existe $\bar{y}_{ab} \in S$, $\bar{y}_{ab} \equiv x (\mathrm{mod}(a, b))$; en particulier pour $a = X_1 + X_2^p$ et $b = X_2^n$, avec $p, n \in N^*$.

D'après la condition (ii) sur S, on voit que y_{ab} est indépendant des entiers p et n. Autrement dit, il existe dans S un élément congru à x, modulo $(X_1 + X_2^p, X_2^n)$ pour tous entiers p et n. D'après le lemme 1.4 il lui est nécessairement égal; donc $\bar{x} \in S$.

2. Définition d'un modèle de l'arithmétique du second ordre. Cas de la caractéristique 0.

THÉORÈME 2.1. *L'ensemble N est définissable dans $(k[[\bar{X}]], +, .)$.*

COROLLAIRE 2.2. *L'anneau $k[[\bar{X}]]$ est indécidable.*

Démonstration du théorème. La définissabilité de N avec paramètre X_1 se déduit des propositions 1.2 et 1.5. L'élimination du paramètre X_1 se fait grâce au lemme suivant:

LEMME 2.2. *La relation entre $x_1, \ldots, x_m$: "il existe un k-automorphisme de $k[[\bar{X}]]$ envoyant X_i sur x_i" est définissable sans paramètre.*

Démonstration. On définit cette relation par la formule

$$I_m(x_1, \ldots, x_m) = \{\bigwedge_{i=1}^{m} (x_i \text{ non inversible}) \wedge$$

$$\wedge \forall u [(u \text{ inversible}) \vee \exists u_1, \ldots, \exists u_m (u = \sum_{i=1}^{m} u_i x_i)]\}$$

soient en effet des séries non inversibles $x_1, \ldots, x_m$ telles que toute série non inversible s'écrive $\Sigma u_i x_i$. Une telle décomposition existe en particulier pour X_j, $j = 1, \ldots, m$. Ceci montre que les formes initiales de degré 1 des séries x_i sont linéairement indépendantes; on sait que cette condition est suffisante pour que la substitution:

$$f(X_1, \ldots, X_m) \to f(x_1, \ldots, x_m)$$

soit un automorphisme de $k[[\bar{X}]]$. Cet automorphisme conserve manifestement toute série constante.

Réciproquement l'existence d'un tel automorphisme implique la satisfaction de $I_m(x_1, \ldots, x_m)$ dans $k[[\bar{X}]]$.

THÉORÈME 2.3. *Une structure isomorphe au modèle standard de l'arithmétique du second ordre est définissable, avec paramètre X_1, dans $(k[[\bar{X}]], +, .)$.*

L'ensemble N a été précédemment défini.

Les parties de N vont être représentées par les séries en X_1 dont les coefficients sont 0 ou 1. L'"appartenance" d'un entier n à une telle série se traduira par le fait que le $(n+1)$-ème coefficient de la série est égal à 1.

LEMME 2.4. *Soient a et b deux séries vérifiant* (1) (cf. prop. 1). *L'ensemble des couples (x, y) tels qu'il existe $n \in N^*$ pour lequel on a:*

$$x \equiv n(\mathrm{mod}(a, b)),$$
$$y \equiv X_1^n(\mathrm{mod}(a, b)),$$

est définissable, avec paramètres a, b et X_1.

Démonstration. Considérons la formule suivante:

$$\begin{aligned}\exists v[(v \neq 0) \wedge [a+(1+X_1)b|v] \wedge \\ \wedge \forall\lambda\forall\lambda'\{(a+\lambda b|v) \wedge (\lambda' \text{ est un entier}) \wedge [\lambda \equiv \lambda'(\mathrm{mod}(X_1))]\}) \\ \rightarrow \exists\mu\{[\mu \equiv \lambda'+1+X_1(\lambda-\lambda')(\mathrm{mod}(a, b))] \wedge (a+\mu b|v)\} \vee \\ \vee\{[\lambda' \equiv x(\mathrm{mod}(a, b))] \wedge [\lambda-\lambda' \equiv y(\mathrm{mod}(a, b))]\}.\end{aligned}$$

Elle est construite pour imposer à la série v des diviseurs de la forme $a+\lambda_n b$, avec $\lambda_n \equiv n+X_1^n(\mathrm{modulo}(a, b))$ et λ_n^1 est alors égal à n. Soit en effet λ_n' entier, $\lambda_n' \equiv \lambda_n(\mathrm{mod}(X_1))$; λ_n' est alors nécessairement égal à n, d'où:

$$\lambda_n-\lambda_n' \equiv X_1^n(\mathrm{mod}(a, b)),$$

et

$$\lambda_n'+1+X_1(\lambda_n-\lambda_n') \equiv n+1+X_1^{n+1} \equiv \lambda_{n+1}(\mathrm{mod}(a, b)).$$

Cet ensemble de diviseurs de v est non vide (par la condition $a+(1+X_1)b|v$); il est nécessairement fini (deux diviseurs $a+\lambda_p b$ et $a+\lambda_n b$ sont non associés dès que $m \neq n$). Le raisonnement est alors le même que pour la proposition 1.2.

D'après ce lemme et la proposition 1.5 on a immédiatement la

PROPOSITION 2.5. *L'ensemble des couples (n, X_1^n), $n \in N$, est définissable avec paramètre X_1.*

PROPOSITION 2.6. *L'ensemble des polynômes en X_1 à coefficients égaux à 0 ou 1 et de degré $\leqslant n$ est définissable avec paramètres X_1 et n.*

Démonstration. On définit d'abord l'ensemble des polynômes s'écrivant $n+P(X_1)$, où P est sans terme constant, à coefficients 0 ou 1, avec $d^0(P) \leqslant n$. La formule suivante définit le saturé modulo (a, b) de cet ensemble:

$$\begin{aligned}(n \in N) \wedge \exists v \neq 0\{[(a+b|v) \vee (a+(1+X_1)b|v)] \wedge \\ \wedge \forall\lambda\forall p\,[(a+\lambda b|v) \wedge (p \in N) \wedge [\lambda \equiv p(\mathrm{mod}(X_1))]] \\ \rightarrow \{(p<n) \wedge \exists\mu[[(\mu \equiv p+1+X_1^{p+1}(\mathrm{mod}(a, b))] \vee \\ \vee (\mu = p+1(\mathrm{mod}(a, b)))] \wedge (a+\mu b|v)]\} \vee \{(p = n) \wedge [\lambda \equiv x(\mathrm{mod}(a, b))]\}\}.\end{aligned}$$

La proposition s'établit alors sans difficulté puisque le terme constant x_0 d'un polynôme x à coefficients entiers, est définissable de la façon suivante:

$$(x_0 \in N) \wedge [(x-x_0) \text{ n'est pas inversible}].$$

PROPOSITION 2.7. *L'ensemble des séries en X_1, à coefficients 0 ou 1, est définissable, avec paramètre X_1.*

Ce résultat est une conséquence de la proposition plus générale:

PROPOSITION 2.8. *Le complété pour la topologie M-adique d'un ensemble définissable est définissable.*

Démonstration. Les familles d'idéaux M^n et $(X_1^n, \ldots, X_m^n)$, $n \in N$, définissent la même topologie sur $k[[\bar{X}]]$. En effet on a manifestement $(X_1^n, \ldots, X_m^n) \subset M^n$ et l'inclusion $M^n \subset (X_1^p, \ldots, X_m^p)$ a lieu dès que $n \geqslant pm$. On peut donc définir le complété d'un ensemble définissable E par la formule en x:

$$(\forall n \in N)\exists y\exists y_1, \ldots, \exists y_m[(y \in E) \wedge (x-y = \Sigma y_i X_i^n)].$$

Cette formule est à paramètre $X_1, \ldots, X_m$. Mais si $x_1, \ldots, x_m$ sont des séries satisfaisant $I_m(x_1, \ldots, x_m)$, les idéaux M^n et $(\bar{x})^n$ sont égaux. Il suffit donc de quantifier universellement les x_i après les avoir substitués aux X_i (sauf éventuellement dans la définition de E).

Nous pouvons maintenant achever la démonstration du théorème 2.3: L'univers des parties de N est l'ensemble de séries défini à la proposition 2.7. L'appartenance est interprétée de la façon suivante: si n est un entier et x une série en X_1, à coefficients 0 ou 1, "$n \in x$" ssi le $(n+1)$-ième coefficient de x est 1. Cette relation est définissable par la formule:

$$\begin{aligned}\exists y\exists z[(n \in N) \wedge (x = y+X_1^n+X_1^{n+1}z) \wedge (y \text{ est un polynôme en } X_1, \\ \text{à coefficients 0 ou 1 avec } d^0(y) \leqslant n-1)].\end{aligned}$$

3. Non équivalence élémentaire entre anneaux de séries sur des corps usuels.

PROPOSITION 3.1. *Soit k un corps de caractéristique 0 et k_0 le sous corps de ses éléments algébriques sur Q. Si $k_0 \neq k$, alors $k_0[[\bar{X}]]$ et $k[[\bar{X}]]$ ne sont pas élémentairement équivalents.*

COROLLAIRE 3.2. *Si Q (resp. L) est le corps des nombres algébriques complexes (resp. réels), les anneaux $Q[[\bar{X}]]$ et $C[[\bar{X}]]$ (resp. $L[[\bar{X}]]$ et $R[[\bar{X}]]$) ne sont pas élémentairement équivalents.*

La proposition 3.1 s'appuie sur la possibilité de définir dans $k[[\bar{X}]]$ l'application

$$s: Z[X_1] \times k[[\bar{X}]] \rightarrow k[[\bar{X}]],$$
$$(P, x) \rightarrow P(x),$$

substitution de la série x dans le polynôme P. Plus précisément, on a les deux lemmes suivants:

LEMME 3.3. *L'ensemble des polynômes en X_1 à coefficients dans Z et de degré $\leqslant n$, est définissable, avec paramètres n et X_1.*

Démonstration. Considérons d'abord les polynômes s'écrivant $n+P(X_1)$, où $P(X_1) \in Z[X_1]$ n'a pas de terme constant et $d^0P \leqslant n$. Si a et b vérifient (1), l'ensemble de ces polynomes est définissable, modulo (a, b), par la formule en x:

$$(n \in N) \wedge \exists v \exists c \big[\{(v \neq 0) \wedge (c \in Z) \wedge [a+(1+cX_1)b|v\} \wedge \\ \wedge \forall \lambda \forall p \big[(a+\lambda b|v) \wedge (p \in N) \wedge \big(p \equiv \lambda (\mathrm{mod}(X_1))\big)\big] \\ \rightarrow \{(p<n) \wedge \exists \mu \exists q \big[(q \in Z) \wedge \big(\mu = p+1+qX_1^{p+1} (\mathrm{mod}(a, b))\big) \wedge (a+\mu b|v)\big]\} \vee \\ \vee \{(p = n) \wedge [\lambda \equiv x (\mathrm{mod}(a, b))]\}\big] .$$

Le lemme suit alors (cf. prop. 2.6).

LEMME 3.4. *La substitution dans un polynôme en X_1 à coefficients entiers est définissable, avec paramètre X_1.*

Démonstration. Nous allons construire une formule $G(x, y, z, X_1)$ exprimant: $x \in Z[X_1]$ et $z = x(y)$. D'après le lemme précédent, la condition portant sur x est définissable, ainsi que le degré n de x en X_1. On définit le coefficient x_p de X_1^p dans x de la façon suivante:

$$\left\{(p \in N) \wedge (p \leqslant n) \wedge \forall y \big[(y \in Z[X_1]) \wedge (d^0(y) = p-1) \wedge (X_1^p | x-y)\big] \right. \\ \left. \rightarrow \left(x_p \text{ est le terme constant de } \frac{x-y}{X_1^p}\right)\right\} \vee \{(p \in N) \wedge (p > n) \wedge (x_p = 0)\} .$$

La formule ci-dessous définit alors z modulo (a, b), si a et b vérifient (1):

$$\exists v \neq 0 \big[a+(1+(x_0+x_1y)X_1)b|v\big] \wedge \forall \lambda \forall p \{[a+(p+\lambda X_1)b|v] \wedge (p \in N)\} \\ \rightarrow \{(p<n) \wedge \exists \mu \big[\mu \equiv p+1+(\lambda + x_{p+1}y^{p+1})X_1 (\mathrm{mod}(a, b))\big] \wedge \\ \wedge (a+\mu b|v)\} \vee \{(p = n) \wedge [\lambda X_1 \equiv zX_1 (\mathrm{mod}(a, b))]\} .$$

Démonstration de la proposition 3.1. L'énoncé:

$$\forall x \exists n \exists y \big[(n \in N) \wedge (y \in Z[X_1]) \wedge (d^0(y) = n) \wedge \\ \wedge (\text{le terme constant de } y(x) \text{ est nul})\big]$$

est satisfait dans $k_0[[\bar{X}]]$ et non dans $k[[\bar{X}]]$.

On élimine le paramètre X_1 grâce au lemme 2.2.

PROPOSITION 3.5. *Si M est un corps réel non archimédien, $M[[\bar{X}]]$ et $R[[\bar{X}]]$ ne sont pas élémentairement équivalents.*

Démonstration. Si l'on prolonge l'ordre de M par l'ordre partiel sur $M[[\bar{X}]]$:

$$x>0 \quad \text{ssi} \quad x(\bar{0})>0 ,$$

cet ordre est définissable par la formule:

$$\exists y (y^2 = x) .$$

Il suffit dès lors de considérer un énoncé exprimant l'existence d'une série supérieure à tous les entiers.

Appelons suite définissable toute suite $(r_n)_{n \in N}$ telle que l'ensemble de couples $\{(n, r_n); n \in N\}$ est définissable; la proposition suivante utilise la possibilité de définir la limite d'une telle suite.

PROPOSITION 3.6. *Soit $r = \lim r_n$, où (r_n) est une suite de rationnels définissable dans $k[[X]]$, et soit M un corps réel clos ne contenant pas r. Alors $M[[\bar{X}]]$ et $R[[\bar{X}]]$ ne sont pas élémentairement équivalents.*

Cette proposition s'applique en particulier quand r_n est une fonction arithmétique de n. On établirait en effet qu'une telle suite est définissable dans $k[[\bar{X}]]$, par une démonstration semblable à celle de la proposition 4.7 (cf. remarque 4.10).

Remarque 3.7. Le degré de transcendance d de k sur son corps premier ($d \in N \cup \{\infty\}$) est fixé par la théorie de $k[[\bar{X}]]$. Nous indiquons la démonstration: Si A est un sous-anneau définissable de $k[[\bar{X}]]$, on généralise le lemme 3.3 en: les polynômes en X_1 à coefficients dans A et de degré $\leqslant n$, sont définissables avec paramètres X_1 et n. Par contre, il faut supposer que X_1 n'intervient dans aucune série $a \in A$ pour pouvoir généraliser le lemme 3.4 au cas des polynômes à coefficients dans A. Si $y_i \in k[[X_2]]$, y_i non inversible, $i \in \omega$, on vérifiera, par induction sur n, qu'il y a, pour tout entier n, une formule $f(x, y_1, ..., y_n, y_{n+1}, z, X_1)$ exprimant

$$x \in Z[y_1, ..., y_n][X_1] \quad \text{et} \quad z = x(y_{n+1}) .$$

Pour que la substitution dans un polynôme en $y_1, ..., y_n$ aît un sens, il faut que les $y_1, ..., y_n$ soient algébriquement indépendants. Remarquons que $Q((X_2))$ est de degré de transcendance infini sur Q; il existe donc $y_i \in Q[[X_2]]$, $i \in \omega$, algébriquement indépendants au-dessus de Q; on peut choisir ces y_i de terme constant nul. On a alors

$d \geqslant n$, ssi

$\exists t_1, ..., t_n \in k[[\bar{X}]]$ tels que, pour tout polynôme P à n variables et à coefficients entiers, $P(t_1, ..., t_n)$ soit inversible dans $k[[\bar{X}]]$, ssi

$$\exists y_1, ..., y_n \in Z[[X_2]], \Big[\Big(\bigwedge_i y_i \text{ non inversible}\Big) \\ \wedge \bigwedge_i (\forall P \in Z[y_1, ..., y_{i-1}][X_1])(P \neq 0 \rightarrow P(y_i) \neq 0)\Big] \\ \rightarrow \exists t_1, ..., t_n \forall Q \in Z[y_1, ..., y_n](Q \not\equiv 0 \rightarrow Q(t_1, ..., t_n) \text{ inversible}) .$$

4. Séries formelles, séries algébriques et (si $k \subset C$) séries convergentes. On se place ici dans un corps de caractéristique nulle, voir la généralisation au chapitre suivant. On considère les deux sous-structures suivantes de $k[[X]]$:

le sous-anneau $Nk(\bar{X})$ des séries algébriques sur $k(\bar{X})$.

si l'on prend pour le un sous-corps de $\boldsymbol{C}$, le sous anneau $k\{\overline{X}\}$ des séries convergentes pour la topologie usuelle sur $\boldsymbol{C}$.

On a les inclusions $Nk(\overline{X}) \subset k\{\overline{X}\} \subset k[[X]]$. La même formule qui définissait N dans $k[[X]]$, le définit dans $Nk(\overline{X})$ et $k\{\overline{X}\}$. Dans $k\{\overline{X}\}$ on peut aussi transposer la définition du modèle de l'arithmétique du second ordre qui avait été établie dans $k[[X]]$. Un autre résultat est que les inclusions $Nk(\overline{X}) \subset k\{\overline{X}\} \subset k[[X]]$ ne sont pas élémentaires (en utilisant des théorèmes d'Artin [1] [2], on montrerait néanmoins que certains énoncés simples, à paramètres dans $Nk(\overline{X})$ (resp. $k\{\overline{X}\}$) sont satisfaits en même temps dans $k[[X]]$ et $Nk(\overline{X})$ (resp. $k\{\overline{X}\}$): c'est le cas des énoncés Σ_1 et de certains énoncés Σ_2, voir [7]).

PROPOSITION 4.1. *L'ensemble N est définissable dans $(Nk(\overline{X}), +, .)$.*

COROLLAIRE 4.2. *L'anneau $Nk(\overline{X})$ est indécidable.*

Démonstration de la proposition. L'ensemble N est inclus dans $Nk(\overline{X})$ et défini par la même formule que dans $k[[X]]$: le lemme suivant établit le seul point délicat de la démonstration.

LEMME 4.3. *La formule $I_m(x_1, \ldots, x_m)$* (cf. lemme 2.2) *traduit dans $Nk(\overline{X})$ l'existence d'un k-automorphisme envoyant X_i sur x_i, $i = 1, \ldots, m$.*

Démonstration. 1° Supposons d'abord que

$$Nk(\overline{X}) \models I_m(x_1, \ldots, x_m).$$

On en déduit, comme dans la démonstration du lemme 2.2, que la substitution

$$s: f(\overline{X}) \to f(\bar{x})$$

est un automorphisme de $k[[\overline{X}]]$. Si $x_1, \ldots, x_m \in N(\overline{X})$, alors $s(Nk(\overline{X})) \subset Nk(\overline{X})$: on ne fait qu'exprimer la transitivité de l'algébricité des extensions du corps $k(\overline{X})$. Ceci permet de considérer la restriction s' de s à $Nk(\overline{X})$. Montrons maintenant que les X_i sont algébriques sur $k[x]$: s' établit un isomorphisme entre $k[\overline{X}]$ et $k[\bar{x}]$, on a donc l'égalité des degrés de transcendance:

$$d_k \cdot k(\overline{X}) = d_k \cdot k(\bar{x});$$

or

$$d_k \cdot k(\bar{x})(\overline{X}) = d_k \cdot k(\overline{X})(\bar{x}) = d_k \cdot k(\overline{X})$$

d'après l'hypothèse $x_k \in N_k(\overline{X})$. Ceci prouve qu'on a $Nk(\overline{X}) \subset Nk(\bar{x})$ et s' admet pour application réciproque la substitution de $\overline{X}$ à $\bar{x}$; c'est donc un automorphisme de $Nk(\overline{X})$.

2° Réciproquement soit t un k-automorphisme de $Nk(\overline{X})$, envoyant X_i sur x_i; il suffit de montrer que tout $v \in M \cap Nk(\overline{X})$ peut s'écrire $\sum_{i=1}^{m} v_i X_i$ avec $v_i \in Nk(\overline{X})$.

Dans ce cas on aura en effet, pour tout $u \in Nk(\overline{X}) \cap M$:

$$\begin{aligned} u &= t(v) \text{ pour un } v \in Nk(\overline{X}) \cap M \\ &= t\Big(\sum_{i=1}^{m} v_i X_i\Big) \\ &= \sum_{i=1}^{m} t(v_i) x_i \end{aligned}$$

ce qui montre que $I_m(\bar{x})$ est satisfaite dans $Nk(\overline{X})$.

Considérons donc la décomposition de v:

$$v(\overline{X}) = X_m v_m + v(X_1, \ldots, X_{m-1}, 0).$$

Si $P(\overline{X}, z) \in k[\overline{X}, z]$ est le polynôme minimal de v sur $k[\overline{X}]$, le polynôme $P(X_1, \ldots, X_{m-1}, 0, z)$ n'est pas identiquement nul en z (sinon X_m est un facteur dans $P(\overline{X}, z)$); $v(X_1, \ldots, X_{m-1}, 0)$ est donc algébrique sur $k[X_1, \ldots, X_{m-1}]$, et par suite $v_m \in Nk(\overline{X})$. L'écriture cherchée de v s'obtient en itérant cette décomposition.

PROPOSITION 4.4. *Une structure isomorphe au modèle standard de l'arithmétique du second ordre est définissable, avec paramètre X_1, dans $(k(\{\overline{X}\}, +, .))$.*

COROLLAIRE 4.5. *L'anneau $k\{\overline{X}\}$ est indécidable.*

Démonstration de la proposition. Les séries en X_1 à coefficients 0 ou 1 sont convergentes et le lemme ci-dessous prouve que les formules utilisées au paragraphe 2 gardent la même signification dans $k\{\overline{X}\}$ que dans $k[[\overline{X}]]$:

LEMME 4.6. *La formule $I_m(x_1, \ldots, x_m)$ traduit dans $k\{\overline{X}\}$ l'existence d'un k-automorphisme envoyant X_i sur x_i, $i = 1, \ldots, m$.*

Démonstration. 1° Supposons $I_m(\bar{x})$ satisfaite dans $k\{\overline{X}\}$. Alors, les x_i étant convergentes, réciproquement les X_i le sont, en tant que séries en $\bar{x}$ (voir [6], paragraphe 5). Ceci et le fait qu'en substituant des séries convergentes dans une série convergente on obtienne une série convergente, montre que la restriction de s à $k\{\overline{X}\}$ est un automorphisme de cet anneau.

2° Comme dans le lemme 4.3 la réciproque consiste à montrer que toute série $v \in k\{X\} \cap M$ s'écrit

$$v = \sum_{i=1}^{m} v_i X_i, \quad \text{avec } v_i \in k\{\overline{X}\}.$$

Si on décompose v sous la forme:

$$v = v(X_1, 0, \ldots, 0) + v_1, \quad \text{avec } v_1 \in k\{\overline{X}\} \cap (X_2, \ldots, X_m).$$

on est ramené par récurrence à montrer qu'un élément de $k\{\overline{X}\} \cap (X_m)$ s'écrit uX_m avec $u \in k\{\overline{X}\}$, ce qui est trivial.

PROPOSITION 4.7. *L'ensemble des couples* $\left(n, \sum_{p=1}^{n} \frac{X_1^p}{p!}\right)$, $n \in N$, *est définissable avec paramètre* X_1, *dans* $k[[\overline{X}]]$, $k\{\overline{X}\}$ *et* $Nk(\overline{X})$.

Démonstration. Soit ψ une formule de l'arithmétique du premier ordre telle que:

$$N \models \psi(a, b) \quad \text{ssi} \quad a = b!$$

Si l'on considère la relativisée ψ^* de ψ à l'ensemble des entiers dans A, si A est un des anneaux de séries de l'énoncé ci-dessus, il est clair qu'on a l'équivalence:

$$A \models \psi^*(a, b) \quad \text{ssi} \quad a, b \in N \text{ et } a = b!$$

Alors le saturé, $\mathrm{mod}(a, b)$ de $\left\{\left(n, \sum_{1}^{n} \frac{X_1^p}{p!}\right), n \in N\right\}$ est défini par la formule:

$$\begin{aligned}\exists v \neq 0 \Big\{ & [a+(1+X_1)b|v] \wedge \\ & \vee \forall \lambda \forall n \big[(a+\lambda b|v) \wedge (n \in N) \wedge (\lambda \equiv n(\mathrm{mod}(X_1)))\big] \\ & \rightarrow \exists \mu \left[\left(\mu \equiv n+1+\frac{X_1^{n+1}}{(n+1)!}\,(\mathrm{mod}(a, b))\right) \wedge (a+\mu b|v)\right] \vee \\ & \vee \big[(x \equiv n(\mathrm{mod}(a, b))) \wedge (y \equiv \lambda - n(\mathrm{mod}(a, b)))\big]\Big\}.\end{aligned}$$

PROPOSITION 4.8. *L'ensemble* $\{(n, \sum_{1}^{n} p!\, X_1^p);\ n \in N\}$ *est définissable avec paramètre* X_1, *dans* $k[[\overline{X}]]$, $k\{\overline{X}\}$ *et* $Nk(X)$.

Démonstration. Il suffit de remplacer dans la démonstration précédente la congruence définissant μ par $\mu \equiv n+1+(n+1)!\, X_1^{n+1}$.

COROLLAIRE 4.9. *Les séries* $\sum_{1}^{\infty} \frac{X_1^n}{n!}$ *et* $\sum_{1}^{\infty} n!\, X_1^n$ *sont définissables dans* $k[[\overline{X}]]$, $k\{\overline{X}\}$ *et* $Nk(\overline{X})$.

Remarque 4.10. On n'a utilisé dans la fonction factorielle que sa définissabilité dans l'arthmétique. On a en fait établi que *si une suite* (r_n) *est arithmétique en* n, *alors la série* $\sum_{1}^{\infty} r_n X_1^n$ *est définissable dans chacun des anneaux de séries considérés.*

PROPOSITION 4.11. *Les inclusions* $Nk(\overline{X}) \subset k\{\overline{X}\} \subset k[[\overline{X}]]$ *et* $Nk(\overline{X}) \subset k[[\overline{X}]]$ *ne sont pas élémentaires.*

Cette proposition est une conséquence immédiate du corollaire 4.9. On peut renforcer ce résultat en considérent l'énoncé:

$$\forall u_1, \ldots, \forall u_m \exists x \left[I_m(\bar{u}) \rightarrow \left(x = \sum_{1}^{\infty} \frac{u_1^p}{p!}\right)\right]$$

et l'énoncé analogue pour l'exponentielle inverse. On établit ainsi la

PROPOSITION 4.12. *Il n'y a équivalence élémentaire entre aucun des anneaux* $k[[\overline{X}]]$, $k\{\overline{X}\}$ *et* $Nk(\overline{X})$.

5. Cas d'une caractéristique non nulle, $m \geqslant 3$. L'anneau des entiers n'est pas contenu dans $k[[\overline{X}]]$ mais on définit une structure isomorphe: un entier n est représenté par X_3^n.

PROPOSITION 5.1. *L'ensemble* N *des puissances de* X_3 *est définissable dans* $(k[[\overline{X}]], +, .)$, $m \geqslant 3$, *avec paramètres* X_1 *et* X_3.

Démonstration. Soient a et b vérifiant les hypothèses (1) et la proprété supplémentaire que X_3 ne divise par a (conditions (2) sur a et b). Considérons la formule:

$$\begin{aligned}\exists v \neq 0 \big\{ & (a+b|v) \wedge \forall \lambda (a+\lambda b|v) \\ & \rightarrow \exists \mu \big[(\mu \equiv \lambda X_3(\mathrm{mod}(a, b))) \wedge (a+\mu b|v)\big] \vee [\lambda \equiv x(\mathrm{mod}(a, b))]\big\}.\end{aligned}$$

Elle impose à la série v des diviseurs $a+\lambda_n b$, avec $\lambda_n \equiv X_3^n(\mathrm{mod}(a, b))$, qui sont deux à deux non associés. En effet si on suppose $a+X_3^n b$ et $a+X_3^p b$ associés, on a d'après le lemme 1.1:

$$X_3^n \equiv X_3^p(\mathrm{mod}(a+X_3^n b)),$$

soit si on suppose $n > p$:

$$X_3^p(X_3^{n-p}-1) \in (a+X_3^n b)$$

donc:

$$X_3^p = A(a+X_3^n b).$$

La série $a+X_3^n b$ n'est pas inversible et contient donc au moins un facteur X_3; ceci implique que X_3 divise a, situation exclue par hypothèse. Cette formule définit donc, modulo (a, b), les puissances de X_3; la condition supplémentaire (X_3 ne divise pas a) ne gêne pas l'application de la proposition 1.5.

PROPOSITION 5.2. *Une structure isomorphe à l'anneau des entiers est définissable dans* $(k[[\overline{X}]], +, .)$, *avec paramètres* X_1 *et* X_3.

Démonstration. L'addition est représentée par la restriction à N de la multiplication de $k[[\overline{X}]]$. La multiplication est moins immédiate: il faut définir

$z = X_3^{nm}$ si $x = X_3^n$ et $y = X_3^m$. Définissons d'abord z dans le cas $1 \leqslant m < n$ par la formule

$$P(z,x,y) = \exists v \neq 0 \{[a+(X_3+x)b|v] \wedge \\ \wedge \forall\lambda\forall\mu[(a+(\lambda+\mu)b|v) \wedge (\lambda = X_3^{m'}) \wedge (\mu = X_3^{n'}) \wedge (m'<n')] \\ \rightarrow [a+(\lambda X_3+\mu x)b|v] \vee [(\lambda = y) \wedge (\mu = z)]\}.$$

Le cas général est donc donné par la formule:

$$[(x = y) \wedge (z = x^2)] \vee [(y|x) \wedge \neg(x|y) \wedge P(z,x,y)] \vee [(x|y) \wedge \neg(y|x) \wedge P(z,y,x)].$$

Nous ne détaillerons pas les autres démonstrations, qui reprennent les mêmes techniques qu'en caractéristique nulle, avec la correction suivante: on utilisait des diviseurs $a+\lambda_n b$ avec $\lambda_n \equiv n(\mathrm{mod}(a,b))$. Cette condition devient maintenant $\lambda_n \equiv X_3^n(\mathrm{mod}(a,b))$. On peut par exemple suivre le plan suivant pour définir le modèle standard de l'arithmétique du second ordre:

a) Exprimer que x et y sont des puissances de même exposant de X_3 et (X_2+X_3) respectivement (x est une puissance de X_3) $\wedge$ (y est une puissance de X_2+X_3) $\wedge$ $\wedge (X_2|x-y)$.

b) Définir l'ensemble des couples $\left(X_3^n, 1+\sum_1^n \delta_i(X_2+X_3)^i\right)$ où $\delta = 0$ ou 1; on part de la définition modulo (a,b) donnée par la formule suivante (a et b vérifient (2)):

$$\exists v \neq 0 (a+X_3 b|v) \wedge \forall\lambda\forall\lambda'\{[(a+\lambda\lambda' b|v) \wedge (\lambda = X_3^n) \wedge \neg(X_3|\lambda')] \\ \rightarrow \exists\mu\{[\mu \equiv X_3\lambda\lambda'(\mathrm{mod}(a,b)) \vee \mu \equiv X_3\lambda(\lambda'+(X_2+X_3)^{n+1})(\mathrm{mod}(a,b))] \wedge \\ \wedge (a+\mu b|v)\} \vee \{[\lambda \equiv x(\mathrm{mod}(a,b))] \wedge [\lambda' \equiv y(\mathrm{mod}(a,b))]\}\}.$$

c) Définir les séries en (X_2+X_3) à coefficients 0 ou 1.

d) Exprimer que le $(n+1)$-ème coefficient d'une telle série est égal à 1.

En conséquence on a la proposition:

PROPOSITION 5.3. *Une structure isomorphe au modèle standard de l'arithmétique de second ordre est définissable dans* $(k[[\overline{X}]], +, .)$, *avec paramètres* X_1, X_2 *et* X_3.

On peut également refaire la démonstration de ce qu'une série $\sum_0^\infty a_p X_3^p$ où a_p est une fonction arithmétique de p est définissable. Le lemme 5.5 prouve l'existence de séries de ce genre transcendantes sur $k[\overline{X}]$. Il établit donc la

PROPOSITION 5.4. *L'inclusion* $Nk(\overline{X}) \subset k[[\overline{X}]]$ *n'est pas élémentaire.*

LEMME 5.5. *La série* $x_0 = \sum_0^\infty X_1^{n!}$ *est transcendante sur* $k[\overline{X}]$.

Démonstration. On montre que le degré d'un éventuel polynôme annulateur de x_0 sur $k[\overline{X}]$ est arbitrairement grand.

En effet si α est une série annulant le polynôme $A(x) = \sum_0^n a_i x^i$ avec $a_i \in k[\overline{X}]$, cherchons à approcher α par un polynôme p. On a alors:

$$A(p) = A(p)-A(\alpha) = (p-\alpha)c, \quad \text{avec } c \in k[\overline{X}][\alpha],$$

d'où

$$\mathrm{val}_{\overline{X}}[A(p)] \geqslant \mathrm{val}_{\overline{X}}(p-\alpha).$$

Par ailleurs:

$$\mathrm{val}_{\overline{X}}[A(p)] \leqslant d^0_{\overline{X}}[A(p)] \\ \leqslant \operatorname{Sup}_{0 \leqslant i \leqslant p} [d^0_{\overline{X}}(a_i) + \mathrm{id}^0_{\overline{X}}(p)] \\ \leqslant \operatorname{Sup}[d^0_{\overline{X}}(a_i)] + d^0_x(A) d^0_{\overline{X}}(p)$$

soit, pour une constante K:

$$\mathrm{val}_{\overline{X}}(p-\alpha) \leqslant K + d^0_x(A) d^0_{\overline{X}}(p).$$

Si l'on suppose que x_0 annule un polynôme Q, on devrait avoir

$$\forall n (n! > K) \Rightarrow d^0(Q) \geqslant n.$$

Bibliographie

[1] M. Artin, *Algebraic approximation of structures over complete local rings*, IHES Publications mathématiques 36 (1969), pp. 23–58.

[2] — *On the solutions of analytic equations*, Inventiones Math. 5 (1968), pp. 277–291.

[3] J. Ax, *On the undecidability of power series fields*, Proc. Amer. Math. Soc. 16² (1965), pp. 846.

[4] — et S. Kochen, *Diophantine problems over local fields: III Decidable fields*, Ann. of Maths. 83 (1966), pp. 437–456.

[5] J. Becker et L. Lipshitz, *Remarks on the elementary theories of formal and convergent power series*, Fund. Math. 105 (1980), pp. 229–239.

[6] H. Cartan, *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, Hermann, Paris 1961.

[7] F. Delon, *Structure des anneaux de séries formelles à plusieurs indéterminées, thèse de 3-ème cycle*, Université Paris VII, Juin 1977.

[8] — *Définition de l'arithmétique dans les anneaux de séries formelles*, CRAS Paris, t. 286 (16 janvier 1978).

[9] Ju. L. Ershov, *Undecidability of certain fields*, Doklady 161 (1965), pp. 349–352.

[10] — *On the elementary theory of maximal normed fields*, 165 (1965), pp. 1390–1393.

[11] — *New examples of undecidable theories*, A. i L. 5 (1966), pp. 37–47.

[12] R. Robinson, *Undecidable rings*, Trans. Amer. Math. Soc. 70 (1951), pp. 137–159.

CNRS, UNIVERSITÉ DE PARIS VII
UER DE MATHÉMATIQUE

Accepté par la Rédaction le 20. 4. 1979