STUDIA MATHEMATICA, T. LXIX. (1981)

Éléments ergodiques et totalement ergodiques dans $L^\infty(\Gamma)$

par

FRANÇOISE LUST-PIQUARD (Paris)

Abstract. Let Γ be a l.c.a. group. We give necessary and sufficient conditions in order that a function $f \in L^\infty(\Gamma)$ be ergodic (all means on $L^\infty(\Gamma)$ coincide on f) or totally ergodic (for every $\chi \in \hat{\Gamma}$, χf is ergodic). If Γ is discrete and countable, we compare the subspaces of totally ergodic elements in $l^\infty(\Gamma)$ and $L^\infty(\overline{\Gamma})$ ($\overline{\Gamma}$ is the Bohr compactification of Γ), using mappings A_m, B_ω between $l^\infty(\Gamma)$ and $L^\infty(\overline{\Gamma})$, which commute with translations by Γ and coincide with the identity on $C(\overline{\Gamma})$. In particular, we generalize Eberlein's decomposition of weak almost periodic functions. Using the mappings A_m, we show that if Λ is a subset of $\boldsymbol{Z}$, if $\Delta^+(\Lambda)$ the density is positive, the space $C_\Lambda(\boldsymbol{T}) \subset C(\boldsymbol{T})$ contains c_0 as a closed subspace.

Les notations sont celles du livre de Rudin [18], elles sont résumées à la fin de l'article.

Soit Γ un groupe l.c.a. On sait qu'il existe sur $L^\infty(\Gamma)$ plusieurs moyennes (c'est-à-dire plusieurs formes linéaires positives de norme 1, invariantes par translation par Γ). Les deux premières parties de l'article sont consacrées à l'étude des éléments de $L^\infty(\Gamma)$ sur lesquels toutes les moyennes coïncident. Par exemple, les fonctions presque périodiques et faiblement presque périodiques en font partie, mais il y en a bien d'autres. Nous vérifions d'abord (proposition 1) que ce sont exactement les éléments ergodiques de $L^\infty(\Gamma)$ au sens d'Eberlein [3], c'est-à-dire les éléments f tels que la fermeture, pour la norme de $L^\infty(\Gamma)$, de l'enveloppe convexe de l'orbite de f par Γ contient une constante. Le théorème ergodique d'Eberlein [3] donne un critère pour reconnaître ces éléments. Lorsque Γ est discret, nous en déduisons facilement un critère plus maniable:

THÉORÈME 1. *Soient Γ un groupe abélien discret, G son dual ϑ un système fondamental de voisinages compacts de $\{0\}$ dans G. Soit $(\nu_v)_{v\in\vartheta}$ une famille dans $l^1(\Gamma)$ telle que*

(i) $\forall v \in \vartheta\ \ \|\nu_v\| = 1 = \langle \nu_v, 1\rangle$,

(ii) $\forall v \in \vartheta$ support $\hat{\nu}_v \subset v$.

Un élément $f \in l^\infty(\Gamma)$ est ergodique si et seulement si, pour toute famille $(\gamma_v)_{v\in\vartheta}$ dans Γ, la famille $\langle f, \check{\nu}_v * \delta_{\gamma_v}\rangle$ converge, suivant le filtre des sections de ϑ.

Le théorème 1 a une conséquence surprenante: soit $E(\Gamma)$ l'ensemble des éléments totalement ergodiques de $l^\infty(\Gamma)$, c'est-à-dire des fonctions f elles que, pour tout $g \in G$, gf est ergodique. La condition "*K est un fermé dans un groupe compact métrisable G, les éléments de $I(K)^\perp \subset PM(G)$ sont transformés de Fourier d'éléments totalement ergodiques de $l^\infty(\Gamma)$*" est équivalente à une condition sur $A(K) = A(G)/I(K)$ qui a un sens dans un cadre beaucoup plus général, où la notion de moyenne n'intervient plus:

"*Pour tout $k \in K$, pour tout système fondamental décroissant de voisinages $v_n(k)$ dans K, toute suite (φ_n) vérifiant*

(i) $\|\varphi_n\|_{A(K)} = 1 = \varphi_n(k)$,

(ii) support $\varphi_n \subset v_n(k)$,

est de Cauchy pour $\sigma\big(A(K), I(K)^\perp\big)$".

Ce sont là les résultats les plus importants de la première partie.

Les principaux résultats de l'article sont obtenus dans la deuxième partie. Nous avons besoin de tout un outillage: les applications B_ω, déjà introduites par Rudin [16], les applications A_m, qui sont nouvelles. Ces applications font correspondre les éléments de $L^\infty(\Gamma)$ et $l^\infty(\Gamma_d)$, en particulier les éléments ergodiques. Nous obtenons en passant les

THÉORÈME 2. *Si Γ est métrisable, les seuls éléments de $L^\infty(\Gamma)$ dont l'orbite par Γ est relativement compacte pour $\sigma\big(L^\infty(\Gamma), L^1(\Gamma)''\big)$ sont les fonctions faiblement presque périodiques.*

THÉORÈME 3. *Soit $\Lambda \subset \boldsymbol{Z}$ un ensemble tel que la densité supérieure de répartition $\Delta^+(\Lambda)$ soit positive. Alors $C_\Lambda(\boldsymbol{T})$ contient un sous espace fermé isomorphe à c_0.*

L'introduction de la Γ'-ergodicité, lorsque Γ' est un sous groupe dénombrable dense de Γ, faite dès la première partie, permet d'utiliser des suites, et non des filtres. Cela est fondamental pour le lemme 6, dont découlent les théorèmes 4, 5, 6:

THÉORÈME 4. *Soient Γ un groupe abélien compact, séparable, Γ' un sous groupe dénombrable dense. Une condition nécessaire et suffisante pour que $f \in L^\infty(\Gamma)$ soit Γ'-ergodique est que, pour une suite (ν_k) dans $l^1(\Gamma')$, définie comme dans le théorème 1, pour toute suite (γ_k) dans Γ', la suite $(f * \nu_k * \delta_{\gamma_k})$ soit de Cauchy pour $\sigma\big(L^\infty(\Gamma), L^\infty(\Gamma)'\big)$.*

THÉORÈME 5. *Soient Γ un groupe discret dénombrable, K un fermé du dual G. Si les éléments de $l^\infty(\Gamma)$ dont les transformés de Fourier sont orthogonaux à $I(K)$ sont ergodiques, les éléments de $L^\infty_K(\bar{\Gamma})$ sont Γ-ergodiques.* ($\bar{\Gamma}$ est le compactifié de Bohr de Γ; $I(K)$ est l'idéal de $A(G)$ formé des fonctions nulles sur K.)

THÉORÈME 6. *Soient Γ un groupe discret dénombrable, K un fermé de son dual. Si les éléments de $l^\infty(\Gamma)$ dont les transformés de Fourier sont orthogonaux à $I(K)$ sont faiblement presque périodiques, alors $L^\infty_K(\bar{\Gamma}) = C_K(\bar{\Gamma})$.*

Ce théorème généralise un résultat de [10].

Nous donnons un exemple ($K = K_1 + K_2$, où $K_1 \cup K_2$ est un Kronecker dans $\boldsymbol{T}$) pour lequel les éléments de $I(K_1+K_2)^\perp$ sont transformés de Fourier d'éléments de $l^\infty(\boldsymbol{Z})$ totalement ergodiques, mais pas tous faiblement presque périodiques.

Dans les troisème et quatrième parties, nous considérons des questions étudiées par Eberlein [3] dans le cadre des fonctions faiblement presque périodiques, mais cette fois dans le cadre des fonctions totalement ergodiques. Dans la troisième partie, nous démontrons le

THÉORÈME 7. *Soit Γ un groupe abélien discret. Alors $E^\Gamma(\bar{\Gamma})$ est isométriquement isomorphe à un sous espace complémenté de $E(\Gamma)$.* ($E^\Gamma(\bar{\Gamma})$ est l'ensemble des éléments totalement Γ-ergodiques de $L^\infty(\bar{\Gamma})$.)

De plus cette décomposition généralise la décomposition des fonctions faiblement presque périodiques sur Γ [4].

Dans la quatrième partie, nous étudions l'algèbre des multiplicateurs $E'(\Gamma)$ de $E(\Gamma)$ (pour la multiplication ponctuelle). Il est connu que $E'(\boldsymbol{R})$ et $E'(\boldsymbol{Z})$ sont strictement incluses dans $E(\boldsymbol{R})$ et $E(\boldsymbol{Z})$ respectivement (voir l'addendum). Cette question est liée à un problème de Rubel et Shields [15]: les fonctions Riemann-intégrables de $L^\infty(\boldsymbol{T})$ (notées RI$(\boldsymbol{T})$) sont des multiplicateurs de $E(\boldsymbol{T})$, mais forment-elles tout $E'(\boldsymbol{T})$?

Nous montrons (proposition 7) que les fonctions mesurables de $l^\infty(\boldsymbol{T}_d)$ dont les images canoniques dans $L^\infty(\boldsymbol{T})$ sont Riemann-intégrables forment un sous-espace strict de $E'(\boldsymbol{T}_d)$. Lorsque Γ est compact nous obtenons bien une caractérisation abstraite de $E'(\Gamma)$, mais sans pouvoir répondre à la question de Rubel et Shields. Pour étudier la multiplication ponctuelle dans $E(\Gamma)$ il est commode d'étudier d'abord les convolutions dans $L^\infty(\Gamma)$, qui généralisent bien sûr la convolution dans WAP(Γ) [3]. Ce sont des applications bilinéaires sur $L^\infty(\Gamma) \times L^\infty(\Gamma)$, à valeurs dans $L^\infty(\Gamma_d)$. En réalité, elles prennent leurs valeurs dans WAP(Γ_d) et nous donnons des conditions suffisantes pour qu'elles les prennent dans l'espace eds fonctions presque périodiques (théorème 8).

Chacune des quatre parties sera précédée d'un plan détaillé.

I. La première partie nous permet de préciser des résultats connus (proposition 1, théorème ergodique d'Eberlein), d'en tirer les premières conséquences (corollaires 1 et 2, théorème 1, corollaires 3 et 4), et de donner des exemples. Elle s'organise ainsi:

1. Définitions et préliminaires.

2. Le théorème d'Eberlein et ses conséquences: critères d'ergodicité pour les éléments de $l^\infty(\Gamma)$ lorsque Γ est discret (démonstration du théorème 1).

3. Exemples.

4. Critères d'ergodicité pour $L^\infty(\Gamma)$, lorsque Γ est non discret, utilisant $L^1(\Gamma)$.

1. Définition 1. Soient Γ un groupe l.c.a., Γ' un sous groupe de Γ. Une forme linéaire continue m sur $L^\infty(\Gamma)$, vérifiant

$$\|m\| = 1 = \langle m, 1\rangle$$

est une *moyenne* si elle est invariante par translation par Γ, une *moyenne Γ'-invariante* si elle est invariante par translation par Γ'.

L'existence d'une infinité de moyennes sur $L^\infty(\Gamma)$ est due à Banach [1] lorsque Γ est discret, à Rudin [16] lorsque Γ est l.c.a. non discret.

Définition 2. Soient Γ un groupe l.c.a., Γ' un sous groupe dense. Un élément $f \in L^\infty(\Gamma)$ est dit *ergodique* (ou *Γ'-ergodique*) s'il existe une fonction constante, adhérente pour la norme de $L^\infty(\Gamma)$ à l'enveloppe convexe de l'orbite de f par Γ (ou par Γ').

Remarquons que tout élément $r \in L^\infty(\Gamma)$ qui est un point fixe pour la translation par Γ' est une constante. En effet, pour toute $\varphi \in L^1(\Gamma)$ $r*\varphi$ est dans $C(\Gamma)$ et est invariant par Γ', donc par Γ. Donc r est aussi invariant par Γ.

Si Γ est séparable, il est clair que, pour tout élément f ergodique dans $L^\infty(\Gamma)$, il existe un sous groupe dénombrable Γ', dense dans Γ, tel que f est Γ'-ergodique. Alors la notion de Γ'-ergodicité permettra d'utiliser des suites et non des filtres.

Enfin il est évident que toutes les moyennes Γ'-invariantes coïncident sur les éléments Γ'-ergodiques. La réciproque est vraie:

Proposition 1. *Soient Γ un groupe* l.c.a., *Γ' un sous groupe dense. Les éléments Γ'-ergodiques de $L^\infty(\Gamma)$ sont exactement les éléments sur lesquels toutes les moyennes Γ'-invariantes coïncident.*

Cette proposition est démontrée en partie dans [15]. Elle entraîne que les éléments Γ'-ergodiques forment un sous-espace fermé de $L^\infty(\Gamma)$.

Démonstration. Si $f \in L^\infty(\Gamma)$ n'est pas Γ'-ergodique, sa partie réelle, par exemple, ne l'est pas non plus. D'après l'argument de [15], en appliquant dans $\mathrm{Re}\, L^\infty(\Gamma)$ (le sous ensemble de $L^\infty(\Gamma)$ formé des fonctions à valeurs réelles) le théorème de Hahn–Banach, puis le théorème du point fixe de Markov–Kakutani, on obtient une forme linéaire l, continue sur $\mathrm{Re}\, L^\infty(\Gamma)$, invariante par translation par Γ', telle que

(i) $\langle l, 1\rangle = 0$,

(ii) $\langle l, f+\bar f\rangle \neq 0$.

A la formé linéaire l sont associées deux formes linéaires positives l^+, l^-, continues sur $\mathrm{Re}\, L^\infty(\Gamma)$, définies par $l = l^+ - l^-$, $|l| = l^+ + l^-$ et

$$\forall r \geqslant 0,\ r \in \mathrm{Re}\, L^\infty(L), \qquad |l|(r) = \sup_{\substack{s \in \mathrm{Re}\, L^\infty(\Gamma)\\ |s| \leqslant r}} |l(s)|.$$

Comme l^+ et l^- sont invariantes par translation par Γ', on leur associe des moyennes Γ'-invariantes $l^+/\|l^+\|$, $l^-/\|l^-\|$ en les prolongeant canoniquement en formes linéaires continues sur $l^\infty(\Gamma)$. Ces moyennes ne coïncident pas sur f: en effet, par contruction

$$\|l^+\| = \langle l^+, 1\rangle = \langle l^-, 1\rangle = \|l^-\|,$$

$$\left\langle \frac{l^+}{\|l^+\|}, f+\bar f\right\rangle - \left\langle \frac{l^-}{\|l^-\|}, f+\bar f\right\rangle = \left\langle \frac{l}{\|l^+\|}, f+\bar f\right\rangle \neq 0.$$

Donnons maintenant des exemples de fonctions ergodiques. Rappelons qu'une fonction faiblement presque périodique sur Γ (ce qu'on note $\mathrm{WAP}(\Gamma)$) est une fonction de $C(\Gamma)$ dont l'orbite par Γ est relativement compacte pour $\sigma(C(\Gamma), C(\Gamma)')$.

Lemme 0. (a) *Soient Γ un groupe compact, Γ' un sous groupe dense. Pour toute fonction $f \in C(\Gamma)$ et toute moyenne m, Γ'-invariante sur $L^\infty(\Gamma)$, ou $l^\infty(\Gamma_d)$, ou $l^\infty(\Gamma'_d)$*

$$\langle f, m\rangle = \langle f, \eta_\Gamma\rangle$$

(η_Γ est la mesure de Haar de Γ).

(b) *Soient Γ un groupe* l.c.a., *Γ' un sous groupe dense. Toute fonction $f \in \mathrm{WAP}(\Gamma)$ est Γ'-ergodique dans $L^\infty(\Gamma)$ et dans $l^\infty(\Gamma_d)$.*

Démonstration. (a) $C(\Gamma)$ est un sous espace fermé de $L^\infty(\Gamma)$, $l^\infty(\Gamma_d)$, $l^\infty(\Gamma'_d)$. L'orbite par Γ d'un élément $f \in C(\Gamma)$ est relativement compacte pour la norme de $C(\Gamma)$, et l'orbite par Γ' y est dense en norme. L'adhérence pour la norme de son enveloppe convexe contient la constante $\langle f, \eta_\Gamma\rangle$.

(b) $\mathrm{WAP}(\Gamma)$ est un sous-espace fermé de $L^\infty(\Gamma)$ et $l^\infty(\Gamma_d)$. D'après [3], toute fonction $f \in \mathrm{WAP}(\Gamma)$ est ergodique, et est aussi uniformément continue sur Γ. Son orbite par Γ' est donc dense pour la norme de $C(\Gamma)$ dans son orbite par Γ.

Pour énoncer les résultats, il sera commode d'utiliser la terminologie suivante [5]:

Définition 3. Soit Γ un groupe l.c.a. On appelle *famille moyennante dans* $L^1(\Gamma)$ une famille filtrante vérifiant

(i) $\forall \alpha \in A$ $\|\varphi_\alpha\|_{L^1(\Gamma)} = 1 = \langle \varphi_\alpha, 1\rangle$,

(ii) $\forall \gamma \in \Gamma$ $\|\varphi_\alpha * \delta_\gamma - \varphi_\alpha\|_{L^1(\Gamma)} \to 0$.

Si $(\varphi_\alpha)_{\alpha\in A}$ est une famille moyennante, $(\varphi_\alpha * \delta_{\gamma_\alpha})_{\alpha\in A}$ est aussi une famille moyennante, pour toute famille $(\gamma_\alpha)_{\alpha\in A}$ dans Γ. Il est évident que tout point adhérent suivant A à une famille moyennante $(\varphi_\alpha)_{\alpha\in A}$ pour $\sigma(L^1(\Gamma)'', L^\infty(\Gamma))$ est une moyenne sur $L^\infty(\Gamma)$. Réciproquement, toute moyenne sur $L^\infty(\Gamma)$ est adhérente à une famille moyennante [5]. Nous retrouverons d'ailleurs ce résultat, comme conséquence du corollaire 2.

Lorsque $\Gamma = \mathbf{Z}$, il est intéressant de relier la notion abstraite de moyenne sur $l^\infty(\mathbf{Z})$ à la notion plus concrète de densité supérieure (ou inférieure) de répartition d'un ensemble Λ dans $\mathbf{Z}$.

Rappelons que

$$\Delta^+(\Lambda) = \overline{\lim_{k\to\infty}}\, \sup_n \frac{\operatorname{Card}(\Lambda \cap [-k+n, k+n])}{2k+1},$$

$$\Delta^-(\Lambda) = \underline{\lim_{k\to\infty}}\, \inf_n \frac{\operatorname{Card}(\Lambda \cap [-k+n, k+n])}{2k+1}.$$

Proposition 2. *Soit Λ un ensemble dans $\mathbf{Z}$. Alors*

$$\Delta^+(\Lambda) = \sup_m \langle 1_\Lambda, m\rangle,$$

$$\Delta^-(\Lambda) = \inf_m \langle 1_\Lambda, m\rangle$$

lorsque m parcourt l'ensemble des moyennes sur $l^\infty(\mathbf{Z})$.

Démonstration. La suite de terme général

$$\nu_k = \frac{1}{2k+1} \sum_{n=-k}^{+k} \delta_n$$

est une famille moyennante dans $l^1(\mathbf{Z})$. Il en de même pour toute suite $(\nu_k * \delta_{n_k})$. Par définition il existe une suite (n_k) dans $\mathbf{Z}$ telle que

$$\Delta^+(\Lambda) = \overline{\lim}\langle 1_\Lambda, \nu_k * \delta_{n_k}\rangle = \overline{\lim}\|1_\Lambda * \nu_k\|_\infty$$

d'où

$$\Delta^+(\Lambda) \leqslant \sup_m \langle 1_\Lambda, m\rangle.$$

Par ailleurs, pour toute moyenne m

$$\forall k \ \langle 1_\Lambda, m\rangle = \langle 1_\Lambda * \nu_k, m\rangle \leqslant \|1_\Lambda * \nu_k\|_\infty.$$

Donc

$$\sup_m \langle 1_\Lambda, m\rangle \leqslant \underline{\lim}\langle 1_\Lambda, \nu_k * \delta_{n_k}\rangle \leqslant \Delta^+(\Lambda).$$

Pour achever la démonstration, il suffit de remarquer que $\Delta^-(\Lambda) = 1 - \Delta^+(\Lambda^c)$. En passant, nous avons retrouvé le résultat connu:

$$\Delta^+(\Lambda) = \lim_{k\to\infty} \sup_n \frac{\operatorname{Card}(\Lambda \cap [-k+n, k+n])}{2k+1}.$$

2. Notre travail s'appuie essentiellement sur le théorème suivant:

Théorème ergodique d'Eberlein. *Soient Γ un groupe* l.c.a., *Γ' un sous groupe dense. Les conditions suivantes, pour $f \in L^\infty(\Gamma)$, sont équivalentes:*

(a) *f est Γ'-ergodique.*

(b) *Pour une famille moyennante $(\nu_\alpha)_{\alpha\in A}$ dans $l^1(\Gamma')$, $(f*\nu_\alpha)_{\alpha\in A}$ converge en norme, suivant A.*

(c) *Pour une famille moyennante $(\nu_\alpha)_{\alpha\in A}$ dans $l^1(\Gamma')$, $(f*\nu_\alpha)_{\alpha\in A}$ converge, suivant A, pour $\sigma(L^\infty(\Gamma), L^\infty(\Gamma)')$.*

(d) *Pour toute famille moyennante $(\nu_\alpha)_{\alpha\in A}$ dans $l^1(\Gamma')$, $(f*\nu_\alpha)_{\alpha\in A}$ converge en norme, suivant A.*

Démonstration. Par convolution la famille $(\nu_\alpha)_{\alpha\in A}$ définit une famille d'opérateurs sur $L^\infty(\Gamma)$, de norme 1, laissant stable l'enveloppe convexe de l'orbite par Γ' de chaque élément f de $L^\infty(\Gamma)$, et vérifiant

$$\forall \gamma \in \Gamma' \ \forall f \in L^\infty(\Gamma) \ \|f*\nu_\alpha*\delta_\gamma - f*\nu_\alpha\|_{L^\infty(\Gamma)} \to 0.$$

Comme toute fonction de $L^\infty(\Gamma)$ invariante par Γ' est une constante, le théorème énoncé est un cas particulier du théorème 3.1 de [3].

Voici un exemple de famille moyennante dans $l^1(\Gamma)$. (Il résultera du corollaire 2 que toute moyenne sur $l^\infty(\Gamma)$ est adhérente à une famille de ce type.)

Lemme 1. *Soit Γ un groupe abélien discret. Soit $\vartheta = \{v\}$ un système fondamental de voisinages compacts de $\{0\}$ dans le dual G de Γ. Soit $(\nu_v)_{v\in\vartheta}$ une famille dans $l^1(\Gamma)$ telle que*

(i) $\forall v \in \vartheta \ \|\nu_v\| = 1 = \langle \nu_v, 1\rangle$,

(ii) $\forall v \in \vartheta$ support $\hat{\nu}_v \subset v$.

Alors $(\nu_v)_{v\in\vartheta}$ est une famille moyennante dans $l^1(\Gamma)$.

Démonstration. L'existence d'une telle famille exprime que le point $\{0\}$ est un ensemble de Ditkin fort pour $A(G)$ et résulte de [18]. Pour tout $\gamma \in \Gamma$

$$\|\hat{\nu}_v(\gamma - 1)\|_{A(G)} \leqslant \|\gamma - 1\|_{A(v)}.$$

Comme le point $\{0\}$ est de synthèse pour $A(G)$ [18], on a

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists v_0 \in \vartheta \ \forall v \subset v_0 \ \|\gamma - 1\|_{A(v)} \leqslant \varepsilon.$$

Il en résulte que, pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\|\hat{\nu}_v(\gamma - 1)\|_{A(G)} \to 0$, suivant le filtre des sections de ϑ.

On notera que si Γ est dénombrable, la famille $(\nu_v)_{v\in\vartheta}$ est une suite, lorsqu'on choisit ϑ dénombrable.

Corollaire 1 du théorème d'Eberlein. *Soit G un groupe* l.c.a., *de dual Γ. Soit θ l'injection canonique*

$$G \to \bar{G}.$$

Un élément $S \in \mathrm{PM}(G)$ est transformé de Fourier d'un élément ergodique avec constante 0 de $L^\infty(\Gamma)$ si et seulement s'il existe une suite décroissante (v_n) de voisinages compacts de $\{0\}$ dans $\bar{G}$, et une suite (S_n) dans $\mathrm{PM}(G)$ telles que

(i) $\forall n$ support $S_n \subset \theta^{-1}(v_n^c)$,

(ii) $\|S - S_n\|_{\mathrm{PM}(G)} \to 0$.

Démonstration. Soit $(\nu_v)_{v\in\vartheta}$ une famille moyennante dans $l^1(\Gamma)$, vérifiant les conditions du lemme 1. Pour toute $S \in \mathrm{PM}(G)$, à support dans $\theta^{-1}(v^c)$, $\hat{S}$ est ergodique avec constante 0 car

$$\forall v' \in \vartheta \;\; v' \subset v \;\; S\hat{\nu}_{v'} = 0.$$

Or l'espace des éléments ergodiques avec constante 0 est fermé en norme dans $L^\infty(\Gamma)$. Réciproquement, si $\hat{S}$ est ergodique avec constante 0, d'après le théorème ergodique d'Eberlein et le lemme 1, $\|S\hat{\nu}_v\|_{\mathrm{PM}(G)} \to 0$. Pour tout n, il existe $w_n \in \vartheta$ tel que

$$\|S - (S - S\hat{\nu}_{w_n})\| \leqslant \frac{1}{n}.$$

Comme $(1 - \hat{\nu}_{w_n})$ est nulle en $\{0\}$ et comme $\{\cap\}$ est de synthèse pour $A(\bar{G})$, il existe $\varphi_n \in A(\bar{G})$, nulle dans un voisinage V_n de 0 dans $\bar{G}$, telle que

$$\|S - S\varphi_n\|_{\mathrm{PM}(G)} \leqslant \frac{1}{n}(1 + \|S\|).$$

Si K est un fermé de G, rappelons que l'idéal $J(K) \subset A(G)$ est la fermeture en norme de l'idéal des fonctions de $A(G)$ nulles dans un voisinage de K. L'espace transformé de Fourier dans $L^1(\Gamma)$ est noté $\hat{J}(K)$.

Le corollaire 1 signifie que les éléments ergodiques avec constante 0 dans $L^\infty(\Gamma)$ sont les éléments adhérents en norme à $\bigcup_{v\in\vartheta} \hat{J}\big(\theta^{-1}(v^c)\big)^\perp$ lorsque ϑ est un système fondamental de voisinages ouverts de $\{0\}$ dans $\bar{G}$. Les moyennes sur $L^\infty(\Gamma)$ sont donc exactement les éléments positifs de norme 1 dans $L^1(\Gamma)''$, appartenant à tous les $\hat{J}\big(\theta^{-1}(v^c)\big)^{\perp\perp}$. On en déduit le

Corollaire 2. *Soient Γ un groupe l.c.a., de dual G, θ l'injection canonique de G dans $\bar{G}$, ϑ un système fondamental de voisinages ouverts de $\{0\}$ dans $\bar{G}$. Toute moyenne m sur $L^\infty(\Gamma)$ est adhérente pour $\sigma(L^1(\Gamma)'', L^\infty(\Gamma))$, suivant A, à une famille filtrante $(\varphi_\alpha)_{\alpha\in A}$ dans $L^1(\Gamma)$, vérifiant*

(i) $\forall \alpha \in A \;\; \|\varphi_\alpha\|_{L^1(\Gamma)} = 1 = \langle \varphi_\alpha, 1\rangle$,

(ii) $\forall v \in \vartheta \;\; \exists \alpha \in A \;\; \forall \; \alpha' > \alpha$ support $\hat{\varphi}_{\alpha'} \subset \theta^{-1}(v)$.

Il est facile de vérifier, en utilisant le fait que $\{0\}$ est de synthèse pour $A(\bar{G})$, qu'une telle famille $(\varphi_\alpha)_{\alpha\in A}$ est moyennante. On a donc montré en passant que toute moyenne est adhérente à une famille moyennante [5].

Si Γ est discret, les familles du corollaire 2 sont exactement les familles du lemme 1.

Lorsque Γ est discret, le théorème ergodique d'Eberlein entraîne le théorème 1, qui se révèle le plus commode dans la pratique pour reconnaître qu'un élément de $l^\infty(\Gamma)$ est ergodique.

Démonstration du théorème 1. Rappelons que

$$\text{si } f \in L^\infty(\Gamma) \qquad \check{f}(\gamma) = f(-\gamma),$$

$$\text{si } \nu \in L^1(\Gamma) \qquad \langle \check{\nu}, f\rangle = \langle \nu, \check{f}\rangle,$$

si $f \in l^\infty(\Gamma)$ est ergodique, la famille $(f * \nu_v * \delta_{\gamma_v})$ converge en norme dans $l^\infty(\Gamma)$, donc ponctuellement, d'après le théorème ergodique d'Eberlein et le lemme 1.

Réciproquement, si $\langle f, \check{\nu}_v * \delta_{\gamma_v}\rangle$ converge pour toute famille (γ_v), vérifions que le filtre des sections de $(f * \nu_v)_\vartheta$ est de Cauchy pour la norme de $l^\infty(\Gamma)$. (Sa limite sera évidemment une constante.) En effet, dans le cas contraire, on aurait

$$\exists \varepsilon > 0 \;\; \forall v \in \vartheta \;\; \exists \omega_1(v),\; \omega_2(v) \in \vartheta,\;\; \omega_1 \subset \omega_2 \subset v \;\; \exists \gamma_v \in \Gamma$$
$$|\langle f, \check{\nu}_{\omega_1(v)} * \delta_{\gamma_v}\rangle - \langle f, \check{\nu}_{\omega_2(v)} * \delta_{\gamma_v}\rangle| > \varepsilon.$$

On poserait

$$\check{\nu}_{(v,1)} = \check{\nu}_{\omega_1(v)}, \qquad \check{\nu}_{(v,2)} = \check{\nu}_{\omega_2(v)}, \qquad A = \{(v, i) |\; v \in \vartheta,\; i = 1, 2\}.$$

Le filtre des sections de la famille filtrante $\langle f, \check{\nu}_{(v,i)} * \delta_{\gamma_v}\rangle$ ne serait pas un filtre de Cauchy, donc ne convergerait pas. Ceci est contraire à l'hypothèse puisque le filtre des sections de A est plus fin que le filtre des sections de ϑ.

Par transformation de Fourier, le théorème 1 entraîne

Corollaire 3. *Soient K un fermé dans un groupe abélien compact métrisable G, de dual Γ, et $\mathcal{I}$ un idéal dans $A(G)$, de spectre K. Soit (v_n) une base décroissante de voisinages compacts de $\{0\}$ dans G. Soit (φ_n) une suite dans $A(G)$ telle que*

(i) $\forall n \;\; \|\varphi_n\| = 1 = \varphi_n(0)$,

(ii) $\forall n$ support $\varphi_n \subset v_n$.

Chacune des conditions suivantes est nécessaire et suffisante pour que les éléments de $\mathcal{I}(K)^\perp$ soient transformés de Fourier d'éléments ergodiques de $l^\infty(\Gamma)$:

(a) *soit (φ_n) une suite vérifiant* (i) *et* (ii); *pour toute suite (γ_n) dans Γ, $(\varphi_n\gamma_n)$ est de Cauchy pour $\sigma\big(A(G)/\mathcal{I}(K),\; \mathcal{I}(K)^\perp\big)$,*

(b) *toute suite (φ_n) vérifiant* (i) *et* (ii) *est de Cauchy pour $\sigma\big(A(G)/\mathcal{I}(K),\; \mathcal{I}(K)^\perp\big)$.*

DÉFINITION 4. Soient Γ un groupe l.c.a., G sont dual. Un élément $f \in L^\infty(\Gamma)$ est dit *totalement ergodique* si pour tout $g \in G$, gf est ergodique.

Cette notion est introduite dans [15] lorsque Γ est compact. Elle sera raffinée dans la troisième partie de ce travail (définition 4 bis).

En reprenant les notations du corollaire 3, comment exprimer que les éléments de $\mathscr{I}(K)^\perp$ ont des transformés de Fourier totalement ergodiques? Si $\hat{f}$ est dans $\mathscr{I}(K)^\perp$, $\widehat{\bar{g}f}$ est dans $\mathscr{I}(K-g)^\perp$. D'après le corollaire 1, si g n'est pas dans K, $\bar{g}f$ est ergodique avec constante 0. La condition cherchée est donc:

COROLLAIRE 4. *On garde les hypothèses et notations du corollaire* 3. *Une condition nécessaire et suffisante pour que les éléments de $\mathscr{I}(K)^\perp$ soient transformés de Fourier d'éléments totalement ergodiques de $l^\infty(\Gamma)$ est:*

Pour tout $k \in K$, pour toute base décroissante de voisinages compacts $v_n(k)$, toute suite (φ_n^k) dans $A(G)/\mathscr{I}(K)$ vérifiant

(i) $\forall n \ \|\varphi_n^k\| = 1 = \varphi_n^k(k)$,

(ii) $\forall n$ support $\varphi_n^k \subset v_n(k)$

est de Cauchy pour $\sigma\big(A(G)/\mathscr{I}(K), \mathscr{I}(K)^\perp\big)$.

Or une telle propriété a un sens dans un cadre beaucoup plus général, et est invariante par isomorphisme d'algèbre: le bon cadre est celui d'une algèbre R semisimple, unitaire, régulière, séparable, considérée comme algèbre de fonctions sur son spectre K, telle que tout point k du spectre est un ensemble de Ditkin fort. (Cette dernière condition exprime qu'il existe dans R des fonctions (φ_n^k) vérifiant (i) et (ii).) On peut dire alors que R' est "totalement ergodique" si toutes les suites (φ_n^k) vérifiant (i) et (ii) sont de Cauchy pour $\sigma(R, R')$.

3. Etudions maintenant quelques exemples. La dernière remarque du paragraphe 2 sera utilisée dans l'exemple 5.

EXEMPLE 1. Soit $K \subset [0,1[$ un ensemble symétrique mince, c'est-à-dire

$$K = \Big\{\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k t_k \,\Big|\, \varepsilon_k = 0 \text{ ou } 1\Big\}$$

où (t_k) est une suite dans $[0, 1[$ telle que $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t_{k+1}}{t_k} < +\infty$. On note encore K l'image de K dans $\boldsymbol{T}$. Les points de K pour lesquels $\varepsilon_k = 1$ pour un nombre fini d'indices seulement s'appellent les têtes de K.

Soit (φ_n) une suite dans $A(\boldsymbol{T})$, vérifiant les conditions (i) et (ii) du corollaire 3, relativement à une suite (v_n), base décroissante de voisinages de $\{0\}$ dans $\boldsymbol{T}$. D'après [11], il existe une suite (μ_n) formée de mesures à support fini dans l'ensemble des têtes de K, équivalente à la base canonique de c_0, dans $\mathrm{PM}(K)$, et telle que

$$\forall n \ |\langle \mu_n, \varphi_n\rangle| > 1.$$

Alors (φ_n) contient une suite équivalente à la base canonique de l^1 dans $A(K)$, et ne peut être de Cauchy pour $\sigma\big(A(K), I(K)^\perp\big)$, les éléments de $I(K)^\perp$ ne sont pas tous transformés de Fourier d'éléments ergodiques de $l^\infty(\boldsymbol{Z})$.

Soit G le sous groupe dénombrable de $\boldsymbol{T}$ engendré par les têtes de K, et soit (ψ_m) une approximation de l'identité pour la multiplication dans $A(G)$. Pour tout n, il existe $m(n)$ tel que

$$|\langle \mu_n, \varphi_n \psi_{m(n)}\rangle| > \tfrac{1}{2}$$

La suite (μ_n) est encore équivalente à la base canonique de c_0 dans $\mathrm{PM}(G)$. La suite $(\varphi_n\psi_{m(n)})$ est dans $A(G)$, elle contient une suite équivalente à la base canonique de l^1 dans $A(G)/I(G\cap K)$. Il en résulte qu'il existe plusieurs moyennes $\boldsymbol{Z}$-invariantes sur $L^\infty_{G\cap K}(\boldsymbol{Z})$, adhérentes à $(\widehat{\varphi_n\psi_{m(n)}})$.

EXEMPLE 2. Soit $\Lambda \subset \boldsymbol{Z}$, contenant un ensemble

$$F = \bigcup_N \Big\{\sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k n_k \,\Big|\, \varepsilon_k = 0 \text{ ou } 1\Big\}$$

où (n_k) est une suite d'entiers positifs telle que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{n_k}{n_{k+1}} < +\infty$ et $n_{k+1} \geqslant 4\sum_{j=1}^{k} n_j$ pour tout k.

Alors, d'après [12], F n'est pas dense dans $\bar{\boldsymbol{Z}}$. L'ensemble

$$H = \bigcap_N \overline{\Big\{\sum_{k=N}^{\infty} \varepsilon_k n_k\Big\}}$$

est un sous groupe fermé strict de $\bar{\boldsymbol{Z}}$. Dans tout quotient métrisable de $\bar{\boldsymbol{Z}}/H$, l'ensemble F est l'ensemble des têtes d'un ensemble symétrique. Quitte à extraire une sous suite de (n_k), on peut supposer que c'est l'ensemble des têtes d'un ensemble symétrique mince. On est ramené à l'exemple 1. D'une part $C_\Lambda(\boldsymbol{T})$ contient C_0, d'autre part, pour tout groupe Γ dénombrable infini dans $H^\perp$, les éléments de $L^\infty_\Lambda(\boldsymbol{T})$ ne sont pas tous Γ-ergodiques.

D'après [14], cette situation est réalisée dès que $M_\Lambda(\boldsymbol{T})$ contient une mesure dont la transformée de Fourier ne tend pas vers 0 à l'infini.

EXEMPLE 3. Les éléments de $H^\infty(\boldsymbol{T}) = L^\infty_{\boldsymbol{Z}^+}(\boldsymbol{T})$ ne sont pas tous ergodiques. Ceci est démontré dans [15].

Les seuls exemples que nous connaissons d'espaces $L^\infty_\Lambda(\boldsymbol{T})$ dont tous les éléments sont totalement ergodiques vérifient $L^\infty_\Lambda(\boldsymbol{T}) = C_\Lambda(\boldsymbol{T})$. Y en a-t-il d'autres? (problème 1).

Exemple 4. Soit K un fermé dans un groupe compact G, de dual Γ. Si les éléments $\hat{f}$ de $I(K)^{\perp}$ ont des transformés de Fourier dans $\mathrm{WAP}(\Gamma)$, le lemme 0 entraîne que f est totalement ergodique. Cette hypothèse est réalisée dès que $M(K)$ est dense en norme dans $I(K)^{\perp}$ [3]. C'est le cas si K est dénombrable, si K est un ensemble de Helson, ou encore dans l'exemple suivant, dû à Katznelson–McGehee [9]: l'ensemble $K\subset \boldsymbol{T}$ est un parfait non Helson, contenant un ensemble dénombrable dense de la forme $\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$, chaque K_j étant un ensemble fini, de manière que

$$I(K)^{\perp} = M(K)+\bigoplus_{l^1}\mathrm{PM}(K_j).$$

Exemple 5. Soit $K = K_1+K_2\subset \boldsymbol{T}$ l'ensemble de Varopoulos [20]: $K_1\cup K_2$ est un parfait de Kronecker. Alors la bijection canonique

$$K_1\times K_2 \leftarrow K_1+K_2$$

induit un isomorphisme d'algèbre

$$C(K_1)\hat{\otimes} C(K_2) \overset{T}{\longmapsto} A(K_1+K_2).$$

On veut montrer que les éléments de $I(K_1+K_2)^{\perp}$ ont des transformés de Fourier totalement ergodiques dans $l^{\infty}(\boldsymbol{Z})$. Soit (v_n) une base de voisinages de (0) dans $\boldsymbol{T}$, soit (f_n) une suite dans $C(\boldsymbol{T})$ vérifiant

(i) $\forall n\ \ \|f_n\|_{C(\boldsymbol{T})} = 1 = f_n(0)$,

(ii) $\forall n$ support $f_n\subset v_n$.

Pour toute suite (γ_n) dans $\boldsymbol{Z}$, la suite $(\gamma_n f_n)*\delta_{k_1}$ est de Cauchy pour $\sigma\big(C(K_1), M(K_1)\big)$. D'après [7], l'espace $C(K_1)$ a la propriété de Dunford–Pettis et dans ce cas la suite

$$[(\gamma_n f_n)*\delta_{k_1}]\otimes[(\gamma_n f_n)*\delta_{k_2}]$$

est encore de Cauchy pour $\sigma\big(C(K_1)\hat{\otimes} C(K_2), (C(K_1)\hat{\otimes} C(K_2))'\big)$. La suite $(\varphi_n^{k_1+k_2}) = \big(T(f_n*\delta_{k_1}\otimes f_n*\delta_{k_2})\big)$ vérifie donc la condition (a) du corollaire 3.

On reprendra cet exemple dans la deuxième partie (paragraphe 4) pour montrer que les transformés de Fourier des éléments de $I(K_1+K_2)^{\perp}$ ne sont pas tous faiblement presque périodiques.

4. Si Γ est un groupe l.c.a., le théorème ergodique d'Eberlein caractérise les éléments ergodiques de $L^{\infty}(\Gamma)$ en utilisant les familles moyennantes dans $l^1(\Gamma_d)$. Lorsque Γ n'est pas discret, existe-t-il une caractérisation, analogue au théorème 1, faisant intervenir les familles moyennantes (φ_a) dans $L^1(\Gamma)$? La réponse est oui, mais le critère est mal commode, et ne peut pas se généraliser comme on l'a fait après le corollaire 4. On peut donc, en première lecture, sauter la fin de cette première partie.

La difficulté essentielle est qu'on ne peut pas utiliser le théorème ergodique abstrait d'Eberlein (théorème 3.1 dans [3]) pour la convolution

par (φ_a). En effet, il n'y a aucune raison a priori pour que la convolution par φ_a laisse stable le fermeture en norme de l'enveloppe convexe de l'orbite par Γ des éléments de $L^{\infty}(\Gamma)$.

Proposition 3. *Soient Γ un groupe* l.c.a. *non discret, f un élément ergodique de $L^{\infty}(\Gamma)$, $(\varphi_a)_{a\in A}$ une famille moyennante dans $L^1(\Gamma)$. Alors*

(a) *$\langle f,\varphi_a\rangle$ converge suivant A,*

(b) *$(f*\varphi_a)$ converge uniformément suivant A.*

Démonstration. Tout point adhérent à $(\varphi_a)_{a\in A}$ suivant A est une moyenne, ce qui entraîne (a).

(b) $(f*\varphi_a)$ est une famille dans $C(\Gamma)$. Comme dans la démonstration du théorème 1, on vérifie que le filtre des sections de $(f*\varphi_a)$ est de Cauchy pour la norme de $C(\Gamma)$.

Proposition 4. *Soit Γ un groupe abélien compact.*

(a) *Un élément $f\in L^{\infty}(\Gamma)$ est ergodique si et seulement si, pour toute famille moyennante $(\varphi_a)_{a\in A}$ dans $L^1(\Gamma)$, $(f*\varphi_a)_{a\in A}$ converge uniformément, suivant A.*

(b) *Un élément $f\in L^{\infty}(\Gamma)$ est ergodique si et seulement si, pour toute famille moyennante $(\varphi_a)_{a\in A}$ dans $L^1(\Gamma)$, $\langle f,\varphi_a\rangle$ converge, suivant A.*

Démonstration. La proposition 3 entraîne que les conditions sont nécessaires. Vérifions que la condition (a) est suffisante.

Soit η la mesure de Haar de Γ. La constante $\langle f,\eta\rangle$ est adhérente pour $\sigma\big(L^{\infty}(\Gamma, L^1(\Gamma)\big)$ à l'enveloppe convexe de l'orbite de f par Γ. Toute moyenne m sur $L^{\infty}(\Gamma)$ est adhérente suivant A à une famille moyennante $(\varphi_a)_{a\in A}$. Si $(f*\varphi_a)_{a\in A}$ converge uniformément dans $C(\Gamma)$, c'est nécessairement vers la constante $\langle f,m\rangle$, qui est donc égale à $\langle f,\eta\rangle$.

La condition (b) est suffisante parce qu'elle entraîne que les $(f*\varphi_a)$ convergent uniformément.

Pour la partie (b) de la proposition 4, on peut se limiter à des familles moyennantes de $L^1(\Gamma)$ qui vérifient les conditions du corollaire 2. Mais nous ne voyons pas comment donner à ces conditions un sens intrinsèque, ni comment généraliser la condition de totale ergodicité pour les éléments de $L^{\infty}_K(\Gamma)$ (où K est un sous ensemble de G) comme nous l'avions fait pour les groupes discrets.

Proposition 5. *Soient Γ un groupe compact abélien, f un élément totalement ergodique de $L^{\infty}(\Gamma)$. Alors l'adhérence, pour la norme, de l'enveloppe convexe disquée de l'orbite de f par Γ, contient $f*B_1\big(L^1(\Gamma)\big)$.*

($B_1\big(L^1(\Gamma)\big)$ désigne la boule unité de $L^1(\Gamma)$.)

Démonstration. Soit φ un polynôme trigonométrique de norme 1 dans $L^1(\Gamma)$. Soit $(\nu_a)_{a\in A}$ une famille moyennante dans $l^1(\Gamma_d)$. D'après le théorème ergodique d'Eberlein, pour tout g dans le dual de Γ

$$(\bar{g}f)*\nu_a \to \hat{f}(g)\quad \text{pour la norme de } L^{\infty}(\Gamma).$$

Comme

$$(\bar{g}f)*\nu_a = \bar{g}(f*g\nu_a)$$

on a

$$\|f*g\nu_a - f*g\|_{L^\infty(\Gamma)} \to 0$$

d'où

$$\|f*\varphi\nu_a - f*\varphi\|_{L^\infty(\Gamma)} \to 0.$$

Or

$$\|\varphi\nu_a\|_{l^1(\Gamma_d)} = |\langle|\varphi|, \nu_a\rangle| \to \|\varphi\|_{L^1(\Gamma)} = 1.$$

II. Dans la deuxième partie, nous établissons une correspondance entre $l^\infty(\Gamma_d)$ et $L^\infty(\Gamma)$, qui conserve la Γ-ergodicité, et nous en déduisons les conséquences.

Cette partie s'organise de la façon suivante:

1. Définition et propriétés des applications B_ω; démonstration du théorème 2.
2. Définition et propriétés des applications A_m; démonstration du théorème 3.
3. Le lemme fondamental (lemme 6) et ses conséquences (théorèmes 4, 5, 6).
4. Un exemple.

1. Les applications B_ω. Soient Γ un groupe l.c.a., Γ' un sous groupe dense. Pour tout $\omega \in L^1(\Gamma)''$, pour toute $f \in L^\infty(\Gamma)$, on défini $f \odot \omega$ dans $l^\infty(\Gamma')$ par

$$f \odot \omega(\gamma') = \langle(\check{f})_{\gamma'}, \omega\rangle.$$

On pose

$$B_\omega\colon L^\infty(\Gamma) \to l^\infty(\Gamma')$$
$$f \rightsquigarrow f \odot \omega.$$

De telles applications ont été utilisées par Rudin dans [16] et [17]. Elles interviennent de façon naturelle quand on utilise la topologie $\sigma(L^\infty(\Gamma), L^\infty(\Gamma)')$. Elles ont les propriétés suivantes:

(a) *Pour tout* $\gamma \in \Gamma'$ $B_\omega(f_\gamma) = [B_\omega(f)]_\gamma$.
Pour toute $\nu \in l^1(\Gamma')$ $B_\omega(f*\nu) = B_\omega(f)*\nu$.

(b) *Soit* $\omega \in L^1(\Gamma)''$. *Si f est Γ'-ergodique dans* $L^\infty(\Gamma)$, $B_\omega(f)$ *est ergodique dans* $l^\infty(\Gamma')$.

En effet, supposons d'abord que $\|\omega\| = 1 = \langle\omega, 1\rangle$. Alors, si m est une moyenne sur $l^\infty(\Gamma')$, la forme linéaire

$$f \rightsquigarrow \langle B_\omega(f), m\rangle$$

est une moyenne Γ'-invariante sur $L^\infty(\Gamma)$.

Or tout $\omega \in L^1(\Gamma)''$ admet une décomposition $\omega = \omega^+ - \omega^-$, où ω^+, ω^- sont des formes linéaires positives. Alors

$$B_\omega = \|\omega^+\| \frac{B_{\omega^+}}{\|\omega^+\|} - \|\omega^-\| \frac{B_{\omega^-}}{\|\omega^-\|}.$$

(c) *Si* ω *vérifie* $\|\omega\| = 1 = \langle\omega, 1\rangle$, *si* $f \in L^\infty(\Gamma)$ *est positive*, $B_\omega(f)$ *est positive.*

(d) Soit ϑ un système fondamental de voisinages de $\{0\}$ dans Γ. Soit $(\varphi_v)_\vartheta$ une famille dans $L^1(\Gamma)$ vérifiant

(i) $\forall v \in \vartheta$ $\|\varphi_v\| = 1 = \langle\varphi_v, 1\rangle$

(ii) $\forall v \in \vartheta$ $\operatorname{support}\varphi_v \subset v$.

Si ω *est adhérent à* $(\varphi_v)_\vartheta$ *suivant* ϑ *pour* $\sigma(L^1(\Gamma)'', L^\infty(\Gamma))$, *alors pour tout* g *dans le dual de* Γ, *et toute* $f \in L^\infty(\Gamma)$

$$B_\omega(gf) = gB_\omega(f).$$

(e) Par hypothèse Γ' est dense dans Γ, l'application canonique du dual G de Γ dans le dual de Γ'_d est injective.

Soient K *un fermé dans* G, $\bar{K}$ *son adhérence dans le dual de* Γ'_d. *Alors si* $f \in L^\infty(\Gamma)$ *est orthogonale à* $\hat{I}(K) \subset L^1(\Gamma)$, $B_\omega(f)$ *est orthogonale à* $\hat{I}(\bar{K}) \subset l^1(\Gamma')$.

En effet, soit $\mu \in \hat{I}(\bar{K}) \subset l^1(\Gamma')$. Alors $B_\omega(f)*\mu = B_\omega(f*\mu)$. Or $f*\mu = 0$ car, pour toute $\varphi \in L^1(\Gamma)$, $\mu*\varphi$ est dans $\hat{I}(K)$.

L'exemple de Rudin [16]. Soit Γ un groupe l.c.a. Rudin donne un exemple d'un élément $f \in L^\infty(\Gamma)$ non ergodique: f est la fonction caractéristique d'un compact de Γ, de mesure de Haar positive, d'intérieur vide. Il existe alors un point h dans le spectre de $L^\infty(\Gamma)$, dont l'image canonique dans $M(\Gamma)$ est δ_0, tel que

$$f \odot h = 0.$$

Alors, pour toute moyenne m sur $l^\infty(\Gamma_d)$,

$$0 = \langle f \odot h, m\rangle \neq \langle f, \eta\rangle.$$

R e m a r q u e 1. Soient Γ un groupe l.c.a. séparable, Γ' un sous groupe dénombrable dense. Pour tout h dans le spectre de $L^\infty(\Gamma)$, pour toute moyenne m sur $l^\infty(\Gamma')$ définissons $h \odot m \in L^\infty(\Gamma)'$ par

$$\forall f \in L^\infty(\Gamma)\ \langle f, h \odot m\rangle = \langle f \odot h, m\rangle.$$

Alors *toute moyenne* M *sur* $L^\infty(\Gamma)$ *est adhérente pour* $\sigma(L^1(\Gamma)'', L^\infty(\Gamma))$ *au sous espace* F *de* $L^1(\Gamma)''$ *engendré par les* $h \odot m$.

En effet, dans $L^\infty(\Gamma)$ l'espace $F^\perp$ est formé des fonctions f telles que, pour toute suite moyennante (ν_k) dans $l^1(\Gamma')$, $(f*\nu_k)$ converge vers 0 pour $\sigma(L^\infty(\Gamma), L^1(\Gamma)'')$. Toute moyenne Γ'-invariante est donc dans $F^{\perp\perp}$.

L'intérêt des applications B_ω est dû en partie au lemme suivant:

LEMME 2. *Soit Γ un groupe* l.c.a. *non discret, métrisable. Pour toute $f \in L^\infty(\Gamma)$ et tout compact $K \subset \Gamma$, il existe $\omega \in L^\infty(\Gamma)'$ tel que: $f \odot \omega \in l^\infty(\Gamma_d)$, $f \odot \omega = f$ presque partout sur K (pour la mesure de Haar η de Γ).*

Démonstration. Soit $(v_n)_{n=0}^{n=\infty}$ une base décroissante de voisinages compacts de $\{0\}$ dans Γ. Soit (φ_n) dans $L^1(\Gamma)$ telle que

(i) $\forall n$ $\|\varphi_n\|_{L^1(\Gamma)} = 1 = \langle \varphi_n, 1\rangle$,

(ii) $\forall n$ support $\varphi_n \subset v_n$.

Alors

$$\varphi_n \to \delta_0 \quad \text{pour} \quad \sigma(M(v_0), C(\Gamma)),$$

$$f*\varphi_n \to f \quad \text{pour} \quad \sigma(L^\infty(\Gamma), L^1(\Gamma)),$$

$$1_K(f*\varphi_n) \to 1_K f \quad \text{pour} \quad \sigma(L^1(\Gamma), L^\infty(\Gamma)).$$

Il existe une suite (ψ_n) dans $L^1(\Gamma)$, telle que chaque ψ_n est combinaison convexe d'éléments $\varphi_{n'}$ $(n' > n)$, et telle que

$$\|1_K(f*\psi_n) - 1_K f\|_{L^1(\Gamma)} \to 0.$$

Cette suite converge sur K en mesure, pour la mesure $1_K\eta$. Il existe une sous suite (ψ_{n_i}) telle que

$$1^K(f*\psi_{n_i}) - 1_K f \to 0 \quad \text{ponctuellement presque partout sur } K.$$

Si ω est adhérent à (ψ_{n_i}) suivant un filtre plus fin que le filtre des sections de $\mathbf{N}$, pour $\sigma(L^1(\Gamma)'', L^\infty(\Gamma))$,

$$f \odot \omega = f \quad \text{presque partout sur } K.$$

Le théorème 2 constitue une première conséquence de ce lemme.

Démonstration du théorème 2. Si Γ n'est pas discret, il suffit de montrer qu'un élément f dans $L^\infty(\Gamma)$, dont l'orbite par Γ est relativement compacte pour $\sigma(L^\infty(\Gamma), L^1(\Gamma)'')$, est dans $C(\Gamma)$. Si $\gamma_n \to \gamma$ dans Γ,

$$f_{-\gamma_n} \to f_{-\gamma} \quad \text{pour} \quad \sigma(L^\infty(\Gamma), L^1(\Gamma)).$$

L'hypothèse entraîne donc

$$f_{-\gamma_n} \to f_{-\gamma} \quad \text{pour} \quad \sigma(L^\infty(\Gamma), L^1(\Gamma)'').$$

En particulier, pour tout $\omega \in L^1(\Gamma)''$,

$$f \odot \omega(\gamma_n) \to f \odot \omega(\gamma).$$

Il en résulte que $f \odot \omega$ est dans $C(\Gamma)$. Du lemme 2, on déduit que f est elle-même dans $C(\Gamma)$.

Les applications B_ω envoient les éléments Γ'-ergodiques de $L^\infty(\Gamma)$ dans l'ensemble des éléments ergodiques de $l^\infty(\Gamma')$. Inversement nous

allons construire des applications de $l^\infty(\Gamma')$ dans $L^\infty(\Gamma)$, lorsque Γ est compact.

2. Les applications A_m. Soient Γ un groupe l.c.a., G un groupe muni de la topologie discrète, dense dans $\hat{\Gamma}$. (Alors Γ s'identifie à un sous groupe dense de $\hat{G}$.) On va construire des applications A_m:

$$L^\infty(\Gamma) \to L^\infty(\hat{G}).$$

On gardera en mémoire les cas typiques suivants:

$$l^\infty(\mathbf{T}_d) \to L^\infty(\mathbf{T}),$$

$$l^\infty(\mathbf{Z}) \to L^\infty(\overline{\mathbf{Z}}).$$

Soit m une moyenne sur $L^\infty(\Gamma)$. A tout $f \in L^\infty(\Gamma)$ on associe une mesure $A_m(f) \in M(\hat{G})$:

$$C(\hat{G}) \to \mathbf{C},$$

$$r \rightsquigarrow \langle rf, m\rangle.$$

En réalité $A_m(f)$ est dans $L^\infty(\hat{G})$: en effet, soit $(\varphi_\alpha)_{\alpha\in A}$ dans $L^1(\Gamma)$ telle que

(i) $\forall \alpha \in A$ $\|\varphi_\alpha\| = 1 = \langle \varphi_\alpha, 1\rangle$,

(ii) $\varphi_\alpha \to m$ $\sigma(L^1(\Gamma)'', L^\infty(\Gamma))$.

Alors, si $r \in C(\hat{G})$,

$$|\langle rf, m\rangle| = \lim_\alpha |\langle rf, \varphi_\alpha\rangle| \leqslant \lim_\alpha \langle |r|\,|f|, \varphi_\alpha\rangle$$
$$\leqslant \|f\|_\infty \lim_\alpha \langle |r|, \varphi_\alpha\rangle = \|f\|_\infty \langle |r|, \eta_{\hat{G}}\rangle.$$

Donc $\|A_m(f)\|_{L^\infty(\hat{G})} \leqslant \|f\|_{L^\infty(\Gamma)}$.

Nous avons ainsi démontré le

LEMME 3. *Soient Γ un groupe* l.c.a., *G un groupe discret, dense dans $\hat{\Gamma}$. L'application A_m définie sur $L^\infty(\Gamma)$ par*

$$\forall g \in G \quad \widehat{A_m(f)}(g) = \langle \bar{g}f, m\rangle$$

est une application continue de $L^\infty(\Gamma)$ dans $L^\infty(\hat{G})$.

A_m coïncide avec l'identité sur $C(\hat{G}) \subset L^\infty(\Gamma)$.

Les applications A_m ont les propriétés suivantes:

(a) *Pour tout $\gamma \in \Gamma$ $A_m(f_\gamma) = [A_m(f)]_\gamma$.*

(b) Pour toute moyenne M, Γ-invariante sur $L^\infty(\hat{G})$, la forme linéaire

$$f \rightsquigarrow \langle A_m(f), M\rangle$$

définit une moyenne sur $L^\infty(\Gamma)$. En particulier, A_m *envoie les éléments* *ergodiques de $L^\infty(\Gamma)$ dans les éléments Γ-ergodiques de $L^\infty(\hat{G})$, avec la même constante d'ergodicité.*

(c) *Si $f \in L^\infty(\Gamma)$ est positive, $A_m(f)$ est positive.*

(d) *Pour tout $g \in G$, $A_m(gf) = gA_m(f)$.*

(e) *Supposons Γ discret, et soit K un fermé de $\hat{\Gamma}$. Si $f \in l^\infty(\Gamma)$ est orthogonale à $\widehat{J(K)} \subset l^1(\Gamma)$, le spectre de $A_m(f)$ est porté par $K \cap G$, c'est-à-dire $A_m(f)$ est orthogonale à $\widehat{I(K)} \subset L^1(\hat{G})$.*

En effet, pour tout $g \in K^c \cap G$, $\bar{g}f$ est ergodique avec constante 0, donc $\widehat{A_m(f)}(g) = 0$. Si Γ n'est pas discret, il résulte du corollaire 1 que le spectre de $A_m(f)$ est porté par $\bar{K} \cap G$, où $\bar{K}$ est la fermeture de K dans $\bar{\hat{\Gamma}}$.

Le théorème 3 constitue une première utilisation des applications A_m.

Démonstration du théorème 3. Nous montrons d'abord que $C_\Lambda^{\perp\perp}(T) \subset C''(\boldsymbol{T})$ contient un élément f qui coïncide avec un élément de $A(\boldsymbol{T}_d)$. L'élément f va être la limite, pour $\sigma(C_\Lambda(\boldsymbol{T}), M(\boldsymbol{T}))$, d'une famille $(\widehat{1_\Lambda \nu_a})$ dans $C_\Lambda(\boldsymbol{T})$. D'après l'hypothèse et la proposition 2, il existe une moyenne m sur $l^\infty(\boldsymbol{Z})$, telle que $\langle m, 1_\Lambda\rangle$ est positif. Choisissons pour (ν_a) une famille filtrante dans $l^1(\boldsymbol{Z})$, convergent vers m, pour $\sigma(l^{1''}(\boldsymbol{Z}), l^\infty(\boldsymbol{Z}))$. La fonction $A_m(1_\Lambda)$ est dans $L^\infty(\bar{\boldsymbol{Z}})$, sa transformée de Fourier est dans $A(\boldsymbol{T}_d)$.

La famille $(\widehat{1_\Lambda \nu_a})$ converge ponctuellement sur $\boldsymbol{T}$ vers $\widehat{A_m(1_\Lambda)}$.

Elle converge vers 0 sur les mesures diffuses: en effet, soit μ une telle mesure. D'après [3], deuxième partie, et [4],

$$\lim_a |\langle 1_\Lambda \hat{\mu}, \nu_a\rangle| \leqslant \lim_a \langle |\hat{\mu}|, \nu_a\rangle = \langle |\hat{\mu}|, m\rangle = 0.$$

L'élément f coïncide donc, comme forme linéaire sur $M(\boldsymbol{T})$, avec un élément de $A(\boldsymbol{T}_d)$.

Pour achever la démonstration, il suffit d'utiliser le lemme 4.

Lemme 4. *Soit B un sous espace fermé de $C(\boldsymbol{T})$. Si $B^{\perp\perp}$ contient un élément f non nul dans $c_0(\boldsymbol{T}_d)$, alors B contient un sous espace fermé isomorphe à c_0.*

Démonstration. Elle est standard et se fait en deux étapes:

(a) Nous vérifions que pour tout f dans $C''(\boldsymbol{T})$, coïncidant avec un élément de $c_0(\boldsymbol{T}_d)$, il existe une suite (ϑ_k) dans $C(\boldsymbol{T})$, équivalente à la base canonique de c_0 telle que

$$\forall t \in \boldsymbol{T} \quad \sum_{k=1}^{K} \vartheta_k(t) \to f(t).$$

En effet, tout élément f dans $c_0(\boldsymbol{T}_d)$ est limite uniforme de fonctions à

support fini. Posons $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$, avec $\|f_n\|_\infty \leqslant 1/2^n$ pour tout n, chaque f_n étant de plus à support fini.

Comme chaque f_n est à support fini, pour chaque n il existe $(u_k^{(n)})$ dans $C(\boldsymbol{T})$ telle que

(i) $\forall t \in \boldsymbol{T}\ f_n(t) = \lim_K \sum_{k=1}^{K} u_k^{(n)}(t)$,

(ii) $\forall t \in \boldsymbol{T}\ \forall K\ \forall (a_k) \in l^\infty\ \left|\sum_{k=1}^{K} a_k u_k^{(n)}(t)\right| \leqslant 2 \times \frac{1}{2^n} \times \sup_k |a_k|$.

Si nous posons

$$\vartheta_k(t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_k^{(n)}(t)$$

nous obtenons

(iii) $\|\vartheta_k\|_\infty \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \|u_k^{(n)}\|_\infty \leqslant 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$,

(iv) $\forall t \in \boldsymbol{T}\ f(t) = \lim_K \sum_{k=1}^{K} \vartheta_k(t)$,

(v) $\forall K\ \forall (a_k) \in l^\infty\ \forall t \in \boldsymbol{T}\ \left|\sum_{k=1}^{K} a_k \vartheta_k(t)\right| \leqslant 2\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\right) \sup_k |a_k|$.

(b) Si $f \in C''(\boldsymbol{T})$ vérifie les hypothèses de la partie (a), si de plus f est dans $B^{\perp\perp}$, alors il existe dans B une suite (v_k') équivalente à la base canonique de c_0, telle que

$$\forall t \in \boldsymbol{T} \quad \sum_{k=1}^{K} v_k'(t) \to f(t).$$

Cela résulte d'un lemme de Singer et d'un lemme de Odell et Rosenthal [13] et [19].

3. On considère maintenant un groupe Γ abélien compact, Γ' un sous groupe dense. Γ va jouer le rôle que tenait $\hat{G}$. Que peut-on dire de $A_m \circ B_\omega$ dans les cas suivants?

$$L^\infty(\Gamma) \xrightarrow{B_\omega} l^\infty(\Gamma_d) \xrightarrow{A_m} L^\infty(\Gamma),$$

$$L^\infty(\Gamma) \xrightarrow{B_\omega} l^\infty(\Gamma') \xrightarrow{A_m} L^\infty(\Gamma).$$

Une réponse sera donnée avec le lemme fondamental 6. Nous avons besoin d'abord d'un lemme technique facile:

Lemme 5. *Soit Γ un groupe abélien compact métrisable. Pour toute*

$f \in L^\infty(\Gamma)$, toute suite bornée (μ_n) dans $M(\Gamma)$ telle que

$$\mu_n \to \mu \quad \text{pour} \quad \sigma\big(M(\Gamma), C(\Gamma)\big)$$

il existe une sous suite (μ_{n_k}) telle que $f*\mu_{n_k} \to f*\mu$ ponctuellement η_Γ-presque partout.

Démonstration. Il suffit de vérifier que $f*\mu_n$ converge vers $f*\mu$ en mesure, ou encore en norme $L^1(\Gamma)$. Or on approche f en norme $L^1(\Gamma)$ par une fonction f' dans $C(\Gamma)$, et $f'*\mu_n$ converge uniformément vers $f'*\mu$.

Lemme 6. *Soit Γ un groupe compact.*

(a) *pour toute $f \in L^\infty(\Gamma)$, il existe $\omega \in L^1(\Gamma)''$ et une moyenne m sur $l^\infty(\Gamma_d)$ tels que*

$$A_m(f \odot \omega) = f,$$

(b) *on suppose Γ métrisable. Soit Γ' un sous groupe dénombrable dense de Γ. Pour toute $f \in L^\infty(\Gamma)$, il existe $\omega \in L^1(\Gamma)''$, $\gamma \in \Gamma$, une moyenne m sur $l^\infty(\Gamma')$ tels que*

$$A_m(f_{-\gamma} \odot \omega) = f_{-\gamma},$$

en considérant $f_{-\gamma} \odot \omega$ comme élément de $l^\infty(\Gamma')$.

Démonstration. (a) Toute fonction f de $L^\infty(\Gamma)$ a un spectre dénombrable, donc est en réalité dans un $L^\infty(\hat{G}')$ où $\hat{G}'$ est un quotient métrisable de Γ. D'après le lemme 2, il existe $\omega \in L^1(\hat{G}')''$ tel que $f \odot \omega = f$, $\eta_{\hat{G}'}$-presque partout. D'après le théorème de Hahn–Banach, il existe $\omega \in L^1(\Gamma)''$ tel que $f \odot \omega = f$, η_Γ-presque partout. Alors, pour tout g dans le dual de Γ, $\bar{g}(f \odot \omega) = \bar{g}f$ presque partout. Alors η_Γ est une moyenne sur le sous espace fermé de $l^\infty(\Gamma_d)$, invariant par translation, engendré par les $\bar{g}(f \odot \omega)$. D'après les théorèmes de Hahn–Banach et de Markov–Kakutani il existe une moyenne m sur $l^\infty(\Gamma_d)$ qui coïncide avec η_Γ sur ce sous espace. Alors

$$\widehat{A_m(f \odot \omega)}(g) = \langle \bar{g}(f \odot \omega), m\rangle = \langle \bar{g}(f \odot \omega), \eta_\Gamma\rangle = \langle \bar{g}f, \eta_\Gamma\rangle = \hat{f}(g).$$

(b) On choisit toujours ω de façon que $f \odot \omega \in l^\infty(\Gamma_d)$ soit égal à f, η_Γ-presque partout.

Soit $G = (g_n)_{n=1}^{n=\infty}$ le dual de Γ, soit (ν_k) une suite moyénnante dans $l^1(\Gamma')$. Elle converge vers η_Γ pour $\sigma\big(M(\Gamma), C(\Gamma)\big)$. D'après le lemme 5, pour tout entier N, il existe une sous suite (ν_{k_i}) telle que

$$\forall g \in \{g_1, \ldots, g_N\} \ (\bar{g}f)*\nu_{k_i} \to \langle \bar{g}f, \eta\rangle \text{ ponctuellement presque partout.}$$

D'après le choix de ω, pour tout $g \in G$ et toute $\nu \in l^1(\Gamma')$

$$(\bar{g}f)*\nu = [\bar{g}(f \odot \omega)]*\nu \text{ presque partout.}$$

Donc

$\forall g \in \{g_1, \ldots, g_N\}$ $[\bar{g}(f \odot \omega)]*\nu_{k_i} \to \langle \bar{g}f, \eta\rangle$ ponctuellement presque partout.

Il existe un ensemble $E_N \subset \Gamma$, de mesure 1, tel que

$$(1) \qquad \forall \gamma \in E_N \ \forall g \in \{g_1, \ldots, g_N\}, \ \langle [\bar{g}(f*\omega)]_{-\gamma}, \check{\nu}_{k_i}\rangle \to \hat{f}(g).$$

Il s'agit maintenant de passer à la limite lorsque $N \to +\infty$, et de construire m. Soit K_N l'ensemble des points adhérents à $(\nu_{k_i})_{i=1}^{i=\infty}$ pour $\sigma\big(l^\infty(\Gamma')', l^\infty(\Gamma')\big)$, suivant un filtre plus fin que le filtre des sections de N. C'est un compact pour cette topologie, et tous ses éléments sont des moyennes sur $l^\infty(\Gamma')$. Lorsque N croît, on extrait des sous suites successives de (ν_k), la suite décroissante des K_N a une intersection non vide. Soit m dans cette intersection. D'après (1), on a

$$\forall N \ \forall \gamma \in E_N \ \forall g \in \{g_1, \ldots, g_N\}, \ \langle [\bar{g}(f \odot \omega)]_{-\gamma}, \check{m}\rangle = \hat{f}(g)$$

ou encore, en posant $E = \bigcap_N E_N$ (E est de mesure 1):

$$(2) \qquad \forall \gamma \in E \ \forall g \in G \ \langle [\bar{g}(f \odot \omega)]_{-\gamma}, \check{m}\rangle = \hat{f}(g),$$

$$(3) \qquad \forall \gamma \in E \ \forall g \in G \ \langle \bar{g}(f_{-\gamma} \odot \omega), \check{m}\rangle = g(\gamma)\hat{f}(g) = \widehat{f_{-\gamma}}(g).$$

Cela signifie que, pour tout $\gamma \in E$,

$$A_{\check{m}}(f_{-\gamma} \odot \omega) = f_{-\gamma}.$$

Les théorèmes 4 et 6 sont des conséquences de ce lemme. Le théorème 5 est une conséquence du théorème 4.

Démonstration du théorème 4. (Rappelons que lorsque Γ est séparable toute fonction ergodique de $L^\infty(\Gamma)$ est Γ'-ergodique pour un sous groupe dénombrable dense Γ'.) Comme on l'a déjà vu pour le lemme 6a, on peut supposer que Γ est métrisable. D'après le lemme 6(b), l existe ω, γ, m tels que

$$A_m(f_{-\gamma} \odot \omega) = f_{-\gamma}.$$

Pour démontrer le théorème, il suffit de voir que $f_{-\gamma}$ est Γ'-ergodique dans $L^\infty(\Gamma)$, ou encore que $f_{-\gamma} \odot \omega = f \odot \omega_{-\gamma}$ est ergodique dans $l^\infty(\Gamma')$. D'après le théorème 1, il suffit pour cela que $\langle f \odot \omega_{-\gamma}, \check{\nu}_k * \delta_{-\gamma_k}\rangle$ converge. Or cela résulte de l'hypothèse, puisque

$$\langle f \odot \omega_{-\gamma}, \check{\nu}_k * \delta_{-\gamma_k}\rangle = \langle f*\nu_k*\delta_{\gamma_k}, (\check{\omega}_\gamma)\rangle.$$

Démonstration du théorème 5. D'après le théorème 4, un élément f dans $L^\infty_K(\Gamma)$ est Γ-ergodique si et seulement si, pour tout h dans le spectre de $L^\infty(\Gamma)$, $f \odot h$ est ergodique dans $l^\infty(\Gamma)$. (On n'impose pas que la constante d'ergodicité soit la même.) D'après la propriété (e) des applications B_ω, $f \odot h$ a une transformée de Fourier orthogonale à $I(K)$, donc est ergodique dans $l^\infty(\Gamma)$ par hypothèse.

Démonstration du théorème 6. Toute $f \in L^\infty_K(\Gamma)$ est en réalité dans $L^\infty_{K\cap G}(\hat{G})$ où $\hat{G}$ est compact métrisable et contient Γ comme sous groupe dense. D'après le lemme 6 (b), il existe $\omega \in L^1(\hat{G})''$, $\gamma \in \hat{G}$, une moyenne m sur $l^\infty(\Gamma)$ tels que

$$A_m(f_{-\gamma} \odot \omega) = f_{-\gamma}.$$

$f_{-\gamma} \odot \omega$ est dans $\hat{I}(K)^\perp \subset l^\infty(\Gamma)$, donc est dans $\mathrm{WAP}(\Gamma)$. Son image par A_m a une orbite par Γ relativement compacte pour $\sigma(L^\infty(\hat{G}), L^1(\hat{G})'')$. Il en est de même pour son orbite par $\hat{G}$. D'après le théorème 2, elle est dans $C(\hat{G})$. Donc f est aussi dans $C(\hat{G}) \subset C(\Gamma)$.

4. Pour terminer l'étude de l'exemple 5 (paragraphe I.3), nous avons besoin du résultat suivant:

Proposition 6. *Soient Γ un groupe* l.c.a., *K un fermé de son dual, $\hat{\mathscr{I}}(K)$ un idéal de $L^1(\Gamma)$, de spectre K. Une condition nécessaire et suffisante pour que les éléments de $\hat{\mathscr{I}}(K)^\perp \subset L^\infty(\Gamma)$ soient dans $\mathrm{WAP}(\Gamma)$ est que la multiplication d'Arens, dans le bidual de $L^1(\Gamma)/\hat{\mathscr{I}}(K)$, qui prolonge la convolution, soit commutative.*

Démonstration. Rappelons ce qu'est la multiplication d'Arens [2] dans le bidual de $L^1(\Gamma)/\hat{\mathscr{I}}(K)$. Soient φ_1'', φ_2'' dans cet espace, f dans $\hat{\mathscr{I}}(K)^\perp$. On définit $f \hat{*} \varphi_1''$ dans $\hat{\mathscr{I}}(K)^\perp$ par

$$\forall \varphi \in L^1(\Gamma) \ \langle f \hat{*} \varphi_1'', \varphi\rangle = \langle f * \varphi, \varphi_1''\rangle.$$

La multiplication d'Arens est commutative si

$$\langle f \hat{*} \varphi_1'', \varphi_2''\rangle = \langle f \hat{*} \varphi_2'', \varphi_1''\rangle.$$

En d'autres termes, on associe à f un opérateur de $L^1(\Gamma)/\hat{\mathscr{I}}(K)^\perp$ dans $\hat{\mathscr{I}}(K)^\perp$ ou encore une forme bilinéaire sur $(L^1(\Gamma)/\hat{\mathscr{I}}(K)) \otimes (L^1(\Gamma)/\hat{\mathscr{I}}(K))$ et on désire qu'elle se prolonge de manière unique comme forme bilinéaire sur $[L^1(\Gamma)/\hat{\mathscr{I}}(K)]'' \otimes [L^1(\Gamma)/\hat{\mathscr{I}}(K)]$. D'après [6], il est équivalent de dire que f est un opérateur faiblement compact de $L^1(\Gamma)/\hat{\mathscr{I}}(K)^\perp$ dans $\hat{\mathscr{I}}(K)^\perp$. Il est encore équivalent de dire que l'orbite de f par Γ est relativement compacte pour $\sigma(L^\infty(\Gamma), L^1(\Gamma)'')$, ou encore, d'après le théorème 2, que f est dans $\mathrm{WAP}(\Gamma)$. En effet, pour toute $f \in L^\infty(\Gamma)$

$$(f_\gamma)_{\gamma\in\Gamma} \subset \overline{f * B_1(L^1(\Gamma))}, \quad \overline{f * B_1(l^1(\Gamma))} \supset f * B_1(L^1(\Gamma))$$

les adhérences étant considérées pour la topologie $\sigma(L^\infty(\Gamma), L^1(\Gamma))$.

Nous pouvons maintenant reprendre l'exemple 5 de la première partie, et vérifier que $\hat{I}(K_1+K_2)^\perp \subset l^\infty(\boldsymbol{Z})$ n'est pas dans $\mathrm{WAP}(\boldsymbol{Z})$. Il suffit de voir que la multiplication d'Arens n'est pas commutative dans le bidual de $l^1(\boldsymbol{Z})/\hat{I}(K_1+K_2)$ ou encore dans le bidual de $A(K_1+K_2)$. Cette propriété se conserve évidemment par isomorphisme d'algèbre. Or $A(K_1+K_2)$ est isomorphe à $C(K_1) \hat{\otimes} C(K_2)$, elle même isomorphe à $C(D^\infty) \hat{\otimes} C(D^\infty)$ (D^∞ est le groupe $(\boldsymbol{Z}/2)^\infty$). $C(D^\infty) \hat{\otimes} C(D^\infty)$ possède une sous algèbre fermée isomorphe à $A(D_\infty)$ [20]. La mutliplication d'Arens n'est pas commutative dans le bidual de $A(D^\infty)$ [2].

Remarquons que, pour cet exemple, la conclusion du théorème 6 est tout de même valable, c'est-à-dire $L^\infty_{K_1+K_2}(\bar{\boldsymbol{Z}}) = C_{K_1+K_2}(\bar{\boldsymbol{Z}})$. En effet, $C_{K_1+K_2}(\bar{\boldsymbol{Z}})$ est l'espace transformé de Fourier de $\overline{l^1(K_1+K_2)}$ (fermeture pour la norme de $\mathrm{PM}(\boldsymbol{T})$ des mesures discrètes sur K_1+K_2). Or $\overline{l^1(K_1+K_2)}$ est isomorphe à $l^1(K_1) \check{\otimes} l^1(K_2)$. Ses sous espaces séparables sont donc inclus dans des espaces isomorphes à des duals séparables. D'après [10], il en résulte que $C_{K_1+K_2}(\bar{\boldsymbol{Z}}) = L^\infty_{K_1+K_2}(\bar{\boldsymbol{Z}})$.

III. Eléments totalement ergodiques dans $L^\infty(\Gamma)$.

Definition 4 bis. Soient Γ un groupe l.c.a., Γ' un sous groupe dense, G un sous groupe dense de $\hat{\Gamma}$. On appelle $E_G^{\Gamma'}(\Gamma)$ *le sous espace de* $L^\infty(\Gamma)$ formé des éléments f tels que, pour tout $g \in G$, gf est Γ'-ergodique.

On note

$E_G^\Gamma(\Gamma) = E_G(\Gamma)$,

$E_{\hat{\Gamma}}^{\Gamma'}(\Gamma) = E^{\Gamma'}(\Gamma)$,

$E_{\hat{\Gamma}}^\Gamma(\Gamma) = E(\Gamma)$, c'est l'espace des éléments totalement ergodiques de $L^\infty(\Gamma)$, introduit dans la définition 4.

$N_G(\Gamma)$ est le sous espace de $E_G(\Gamma)$ formé des f tels que, pour tout $g \in G$, gf est ergodique avec constante 0.

Lorsque G est muni de la topologie discrète, les applications

$$A_m\colon L^\infty(\Gamma) \to L^\infty(\hat{G})$$

coïncident par définition sur $E_G(\Gamma)$. On les note alors A. L'application A envoie $E_G(\Gamma)$ dans $E^\Gamma(\hat{G})$ (propriétés (b) et (d) des applications A_m). Son noyau est $N_G(\Gamma)$.

Notons que si Γ est compact, si $\Gamma = \hat{G}$, A coïncide sur les éléments η_Γ-measurables de $E_{\hat{\Gamma}}(\Gamma_d) \subset l^\infty(\Gamma_d)$ avec l'application canonique

$$L^0(\Gamma) \to L^\infty(\Gamma)$$

faisant correspondre à une fonction η_Γ-mesurable définie sur Γ sa classe dans $L^\infty(\Gamma)$.

Nous allons démontrer le théorème 7 suivant, plus précis que celui qui a été énoncé dans l'introduction, et qui permet de faire une décomposition à la Eberlein pour $E_G(\Gamma)$:

THÉORÈME 7. *Soient Γ un groupe abélien discret, G un sous groupe dense de $\hat{\Gamma}$, muni de la topologie discrète.*

(a) *$E_G(\Gamma)/N_G(\Gamma)$ est isométriquement isomorphe à $E^\Gamma(\hat{G})$.*

(b) *Soit $\omega \in L^1(\hat{G})''$ un élément de norme 1 dont l'image canonique dans $M(\hat{G})$ est δ_0. Alors*

$$E_G(\Gamma) = B_\omega \circ A\big(E_G(\Gamma)\big) \oplus N_G(\Gamma),$$

A étant l'application définie ci-dessus.

La démonstration du théorème 7 nécessite le lemme suivant:

LEMME 7. *Soient Γ un groupe abélien discret, G un sous-groupe dense de $\hat{\Gamma}$, muni de la topologie discrète.*

(a) *Pour tout $\omega \in L^1(\hat{G})''$, B_ω envoie $E^\Gamma(\hat{G})$ dans $E_G(\Gamma)$.*

(b) *Pour tout $\omega \in L^1(\hat{G})''$ et toute $f \in E^\Gamma(\hat{G})$*

$$A \circ B_\omega(f) = f * \mu$$

où μ est l'image canonique de ω dans $M(\hat{G})$.

Démonstration. (a) résulte de la propriété (b) des applications B_ω et de l'identité

$$(1) \qquad \forall g \in G \ \forall f \in L^\infty(\hat{G}) \ \forall \omega \in L^1(\hat{G}) \ \ \bar{g}(f \odot \omega) = (\bar{g}f) \odot (\bar{g}\omega).$$

(b) Si $f \in L^\infty(\hat{G})$ est Γ-ergodique, si m est une moyenne sur $l^\infty(\Gamma)$

$$\begin{aligned}\langle f \odot \omega, m\rangle = \langle f \odot \omega^+, m\rangle - \langle f \odot \omega^-, m\rangle &= \|\omega^+\|\langle f, \eta_{\hat{G}}\rangle - \|\omega^-\|\langle f, \eta_{\hat{G}}\rangle \\ &= \langle \omega, 1\rangle \langle f, \eta_{\hat{G}}\rangle = \hat{\mu}(0)\hat{f}(0).\end{aligned}$$

Si f est dans $E^\Gamma(\hat{G})$, (1) et (2) entraînent

$$\langle \bar{g}(f \odot \omega), m\rangle = \langle \bar{g}f \odot \bar{g}\omega, m\rangle = \hat{\mu}(g)\hat{f}(g)$$

d'où, par définition, $A \circ B_\omega(f) = f * \mu$.

Démonstration du théorème 7. Notons π la surjection canonique de $E_G(\Gamma)$ sur $E_G(\Gamma)/N_G(\Gamma)$, et $\tilde{A}$ l'application injective rendant le diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd} E_G(\Gamma) \arrow[rr, "A"] \arrow[dr, "\pi"'] & & E^\Gamma(\hat{G}) \\ & \dfrac{E_G(\Gamma)}{N_G(\Gamma)} \arrow[ur, "\tilde{A}"'] & \end{tikzcd}$$

Nous allons montrer, si Γ est discret, que l'application $\tilde{A}$ est un isomorphisme.

(a) Soit $\omega \in L^1(\hat{G})''$, de norme 1, dont l'image canonique dans $M(\hat{G})$ est δ_0. D'après le lemme 7, $A \circ B_\omega = \tilde{A} \circ \pi \circ B_\omega$ coïncide avec l'identité de $E^\Gamma(\hat{G})$. Comme A, $\tilde{A}$, B_ω ont des normes $\leqslant 1$, on en déduit que B_ω et $\pi \circ B_\omega$ sont des isométries. Comme $\tilde{A}$ est injective sur $E_G(\Gamma)/N_G(\Gamma)$, l'isométrie $\pi \circ B_\omega$ ne dépend plus de ω. On la note B. Elle est nécessairement surjective, de $E^\Gamma(\hat{G})$ sur $E_G(\Gamma)/N_G(\Gamma)$. Du fait que $\tilde{A} \circ B = \mathrm{Id}\, E^\Gamma(\hat{G})$ et que $\tilde{A}$ est injective, on déduit immédiatement que $B \circ \tilde{A} = \mathrm{Id}\big(E_G(\Gamma)/ /N_G(\Gamma)\big)$.

(b) Soit f dans l'intersection de $N_G(\Gamma)$ et de $B_\omega \circ A\big(E^\Gamma(\hat{G})\big)$. Alors

$$0 = \pi(f) = \pi \circ B_\omega \circ A(f') = B \circ A(f')$$

d'où $A(f') = 0$, et $f = B_\omega \circ A(f') = 0$.

D'autre part, pour toute $f \in E_G(\Gamma)$,

$$\pi\big(f - B_\omega \circ A(f)\big) = \pi(f) - B \circ \tilde{A} \circ \pi(f) = 0$$

c'est-à-dire $f - B_\omega \circ A(f)$ est dans $N_G(\Gamma)$.

Le théorème 7 généralise la décomposition d'Eberlein pour $\mathrm{WAP}(\Gamma)$ [4] lorsque Γ est l.c.a. En effet, $\mathrm{WAP}(\Gamma)$ est un sous espace fermé de $\mathrm{WAP}(\Gamma_d)$. Appliquons le théorème 7 à $\mathrm{WAP}(\Gamma_d)$, avec $G = \hat{\Gamma}$: l'application A envoie $\mathrm{WAP}(\Gamma_d)$ dans $C(\bar{\Gamma})$ comme on l'a vu à l'occasion de la démonstration du théorème 6. L'application B_ω est l'identité sur $C(\bar{\Gamma})$. Nous obtenons

$$\mathrm{WAP}(\Gamma) = C(\bar{\Gamma}) \oplus \big(N(\Gamma_d) \cap \mathrm{WAP}(\Gamma)\big).$$

IV. La quatrième partie s'organise comme suit, les résultats étant concentrés au paragraphe 2:

1. Enoncés de problèmes concernant les fonctions totalement ergodiques et les fonctions Riemann-intégrables; démonstration de la proposition 7.
2. Définition et propriétés des convolutions dans $L^\infty(\Gamma)$ (théorème 8). Application à l'étude des multiplicateurs de $E(\Gamma)$ (corollaire 5, propositions 8 et 9).
3. Convolutions dans $l^\infty(\Gamma)$ si Γ est discret (proposition 10).

1. Dans [15] Rubel et Shields vérifient que les fonctions Riemann intégrables de $L^\infty(\boldsymbol{T})$ (notées $\mathrm{RI}(\boldsymbol{T})$) sont totalement ergodiques et posent le

PROBLÈME 2. Existe-t-il des fonctions totalement ergodiques dans $L^\infty(\boldsymbol{T})$ qui ne sont pas Riemann-intégrables?

Toute la quatrième partie est une tentative pour aborder ce problème.

Lorsque Γ' parcourt l'ensemble des sous-groupes dénombrables denses de T, on a

$$E(T) = \bigcup_{\Gamma''} E^{\Gamma''}(T).$$

Il est facile de vérifier que $\mathrm{RI}(T)$ est dans $\bigcap_{\Gamma'} E^{\Gamma'}(T)$. D'où le

Problème 3. Est-ce que $E(T) = \bigcap_{\Gamma'} E^{\Gamma'}(T)$?

Nous pensons que la réponse est négative, ce qui entraînerait une réponse négative au problème 2.

Appelons fonctions Riemann-intégrables dans $l^\infty(T_d)$ et notons $\mathrm{RI}(T_d)$ les fonctions de $l^\infty(T_d)$ dont les parties réelles et imaginaires vérifient

$$\limsup f - \liminf f = 0 \quad \eta_T\text{-presque partout.}$$

Ces fonctions sont η_T-measurables, et il est bien connu que leurs classes d'équivalence dans $L^\infty(T)$ constituent exactement $\mathrm{RI}(T)$. Vérifions que $\mathrm{RI}(T_d)$ *est dans* $E_Z(T_d)$: il suffit de voir que les éléments réels de $\mathrm{RI}(T_d)$ sont ergodiques. Si φ est réelle et s.c.i. dans $l^\infty(T_d)$, pour toute moyenne m sur $l^\infty(T_d)$,

$$\langle\varphi, \eta_T\rangle \leqslant \langle\varphi, m\rangle$$

on en déduit, pour toute f réelle dans $l^\infty(T_d)$,

$$\langle\liminf f, \eta\rangle \leqslant \langle\liminf f, m\rangle \leqslant \langle f, m\rangle \leqslant \langle\limsup f, m\rangle \leqslant \langle\limsup f, \eta\rangle.$$

Dans ce cas, l'analogue du problème 2 a une réponse négative:

Proposition 7. (a) *Soit Γ un groupe abélien compact. Il existe des éléments dans $E(\Gamma_d)$ qui ne sont pas η_Γ-mesurables.*

(b) $\mathrm{RI}(T_d)$ *est un sous espace strict de* $E(T_d)$.

Démonstration. (b) se déduit immédiatement de la partie (a), qui est d'ailleurs intéressante en elle-même. D'après [8] tout groupe abélien infini Γ admet un sous groupe H, tel que Γ/H est dénombrable. Si Γ est compact, un tel groupe H ne peut être un ensemble η_Γ-mesurable. Cependant sa fonction caractéristique est dans $N(\Gamma_d)$: en effet, pour toute moyenne m sur $l^\infty(\Gamma_d)$, on a, en posant

$$\Gamma = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\gamma_n + H),$$

$$1 = \langle 1, m\rangle \geqslant \langle 1_{\left(\bigcup_1^N \gamma_n + H\right)}, m\rangle = N\langle 1_H, m\rangle.$$

Donc $\langle 1_H, m\rangle = 0$. De plus, si f est dans $l^\infty(\Gamma_d)$ avec $\|f\|_\infty \leqslant 1$, et si f est réelle

$$0 = -\langle 1_H, m\rangle \leqslant \langle 1_H f, m\rangle \leqslant \langle 1_H, m\rangle = 0.$$

Remarque 2. En contraste avec la partie (b) de cette proposition, *pour toute $f \in E(\Gamma_d)$, il existe $f_1 \in E(\Gamma_d)$, qui est η_Γ-mesurable et telle que* $f - f_1 \in N(\Gamma_d)$. En effet, on pose $f_1 = A(f) \odot \omega$ en choisissant ω relativement à $A(f)$ comme dans le lemme 2. Alors $f_1 = A(f)$, η_Γ-presque partout.

Pour la multiplication ponctuelle de $L^\infty(T)$, $\mathrm{RI}(T)$ est une algèbre. Le problème 2 amène le

Problème 4. Soit Γ un groupe l.c.a. Est-ce que $E(\Gamma)$ est une algèbre pour la multiplication ponctuelle?

D'après [15], les éléments de $\mathrm{RI}(T)$ sont des multiplicateurs de $E(T)$. De même, *les éléments de* $\mathrm{RI}(T_d)$ *sont des multiplicateurs de* $E_Z(T_d)$ mais la démonstration est un peu plus délicate: comme dans [15], on peut supposer que $h \in \mathrm{RI}(T_d)$ est réelle, que $f \in E_Z(T_d)$ est réelle et même positive. Il s'agit de montrer que hf est ergodique.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $h' \in C(T)$ telle que

$$h - h' \geqslant 0 \quad \eta_T\text{-presque partout},$$

$$0 \leqslant \langle h - h', \eta_T\rangle \leqslant \varepsilon.$$

Soient m, m' deux moyennes sur $l^\infty(T_d)$. Alors

$$\begin{aligned}\langle m - m', hf\rangle &= \langle m - m', (h-h')f\rangle + \langle m - m', h'f\rangle \\ &= \langle m - m', (h-h')f\rangle, \\ |\langle m, (h-h')f\rangle| &\leqslant \|f\|_\infty \langle m, |h-h'|\rangle.\end{aligned}$$

Il n'est pas évident, a priori, que $\langle m, |h-h'|\rangle = \langle m, h-h'\rangle$. Cependant, $\mathrm{RI}(T_d)$ est stable par passage au module, en particulier $|h-h'|$ est ergodique et η-mesurable. Alors

$$\langle m, |h-h'|\rangle = \langle\eta, |h-h'|\rangle = \langle\eta, h-h'\rangle = \langle m, h-h'\rangle \leqslant \varepsilon.$$

Un raisonnement du même genre sera utilisé pour caractériser les multiplicateurs $E'(\Gamma)$ de $E(\Gamma)$ lorsque Γ est compact (proposition 8).

2. Dans [3], Eberlein vérifie directement que $\mathrm{WAP}(\Gamma)$ est une algèbre et en déduit les propriétés de la convolution dans cet espace. Ici au contraire nous allons définir des convolutions dans $L^\infty(\Gamma)$ et nous en déduirons des propriétés des mutliplicateurs $E'(\Gamma)$ de $E(\Gamma)$.

Convolutions dans $L^\infty(\Gamma)$.

Définition 5. Soit Γ un groupe l.c.a. A toute moyenne m sur $L^\infty(\Gamma)$ on associe une „convolution" dans $L^\infty(\Gamma)$, c'est-à-dire une application bilinéaire continue

$$L^\infty(\Gamma) \times L^\infty(\Gamma) \to l^\infty(\Gamma_d),$$

$$(r, f) \rightsquigarrow r \underset{m}{*} f$$

avec

$$r \underset{m}{*} f(\gamma) = \langle(\check{r})_\gamma, f\check{m}\rangle = \langle r(\gamma - y), f(y)\, m(y)\rangle.$$

Propriétés des convolutions dans $L^\infty(\Gamma)$.

(a) Pour tout $\gamma \in \Gamma$
$$(r \underset{m}{*} f)_\gamma = r_\gamma \underset{m}{*} f$$
(cette relation n'utilise pas le fait que m est invariante par translation, et est encore vraie si on remplace m par un élément φ'' quelconque dans $L^\infty(\Gamma)')$.

(b) Si m est symétrique, c'est-à-dire si $m = \check{m}$, alors l'application bilinéaire associée est symétrique:
$$r \underset{m}{*} f = f \underset{m}{*} r.$$

(c) Soit $L^1(m)$ la fermeture pour la norme de $L^\infty(\Gamma)'$ de l'espace engendré par (rm) où r parcourt $L^\infty(\Gamma)$. Alors
$$\|rm\|_{L^1(m)} = \sup_{\|f\|_{L^\infty(\Gamma)} \leqslant 1} |\langle rf, m\rangle| = \langle |r|, m\rangle.$$
La convolution associée à m se prolonge en application bilinéaire continue
$$L^\infty(\Gamma) \times L^1(m) \to l^\infty(\Gamma_d).$$
Le rasionnement est le même que celui utilisé dans II-2 pour la construction des applications A_m. On avait alors considéré m comme forme bilinéaire continue sur $L^\infty(\Gamma) \times C(\bar{\Gamma})$ et montré qu'elle se prolonge comme forme bilinéaire continue sur $L^\infty(\Gamma) \times L^1(\bar{\Gamma})$.

Soit $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille dans $L^1(\Gamma)$, telle que

(i) $\forall \alpha \in A \;\; \|\varphi_\alpha\| = 1 = \langle \varphi_\alpha, 1\rangle$;

(ii) $\varphi_\alpha \to m \;\; \sigma(L^\infty(\Gamma)', L^\infty(\Gamma))$.

Soient f, r dans $L^\infty(\Gamma)$. Alors
$$|r \underset{m}{*} f(\gamma)| = \lim_\alpha |\langle (\check{r})_\gamma, f\varphi_\alpha\rangle| \leqslant \|f\|_\infty \lim_\alpha \langle |(\check{r})_\gamma|, \varphi_\alpha\rangle = \|f\|_\infty \|(\check{r})_\gamma\|_{L^1(m)}$$
$$= \|f\|_\infty \|\check{r}\|_{L^1(m)}.$$
C'est ici essentiellement qu'on utilise l'invariance par translation de m. Dans la suite, $C_u(\Gamma)$ est l'espace des fonctions uniformément continues bornées sur Γ.

Théorème 8. *Soient Γ un groupe* l.c.a., *m une moyenne sur $L^\infty(\Gamma)$.*

(a) *Si r, f sont dans $L^\infty(\Gamma)$, $r \underset{m}{*} f$ est dans* $\mathrm{Wap}(\Gamma_d)$.

(b) *Si f est dans $L^\infty(\Gamma)$, si r est dans $E(\Gamma)$, si A' est l'application canonique de $E_{\hat{r}}(\Gamma_d)$ dans $L^\infty(\bar{\Gamma})$, A l'application canonique de $E(\Gamma)$ dans $L^\infty(\bar{\Gamma})$,*
$$A'(r \underset{m}{*} f) = A(r) * A_m(f),$$
la convolution étant la convolution ordinaire dans $L^\infty(\bar{\Gamma})$.

(c) *Si r, f sont dans $L^\infty(\Gamma)$, si r est dans $C_u(\Gamma)$ et a une orbite par Γ relativement compacte pour la norme de $L^1(m)$, $r \underset{m}{*} f$ est dans $C(\bar{\Gamma})$.*

(d) *Si f est dans $L^\infty(\Gamma)$, si r est dans $E(\Gamma)$, et vérifie les conditions de c, alors*
$$A_m(\check{r}f) = A(\check{r})A_m(f).$$

Démonstration. (a) En utilisant la propriété (c) de la convolution associée à m, on peut considérer $f \in L^\infty(\Gamma)$ comme un opérateur continu de $L^1(m)$ dans $l^\infty(\Gamma_d)$. D'après la propriété (a) de la convolution, cet opérateur conserve les orbites par Γ. Il suffit donc de montrer que l'orbite d'un élément $r \in L^\infty(\Gamma)$ est relativement compacte pour $\sigma(L^1(m), L^1(m)')$. Or l'application canonique
$$L^\infty(\Gamma) \to L^1(m),$$
$$r \rightsquigarrow rm$$
se factorise par l'espace $L^2(m)$, fermeture de $L^\infty(\Gamma)$ pour la norme
$$\|r\|_{L^2(m)} = \langle |r|^2, m\rangle.$$
Cette application canonique est donc faiblement compacte.

(b) Soit m' une moyenne sur $l^\infty(\Gamma_d)$, adhérente à une famille moyennante (ν_α) dans $l^1(\Gamma_d)$. Pour tout g dans le dual G de Γ,
$$A'\widehat{(r \underset{m}{*} f)}(g) = \langle r \underset{m}{*} f, \bar{g}m'\rangle = \lim_\alpha \langle r \underset{m}{*} f, \bar{g}\nu_\alpha\rangle = \lim_\alpha \langle \check{r} * \bar{g}\nu_\alpha, fm\rangle$$
on vérifie que
$$\check{r} * \bar{g}\nu_\alpha = \bar{g}(g\check{r} * \nu_\alpha).$$
Par hypothèse, r et $\check{r}$ sont dans $E(\Gamma)$. D'après le théorème ergodique d'Eberlein, $(g\check{r} * \nu_\alpha)$ converge uniformément vers $\langle g\check{r}, m\rangle = \widehat{A(\check{r})}(-g)$ $= \widehat{A(r)}(g)$. Donc
$$A'\widehat{(r \underset{m}{*} f)}(g) = \widehat{A(r)}(g)\widehat{A_m(f)}(g).$$

(c) Si r a une orbite par Γ relativement compacte dans $L^1(m)$, $r \underset{m}{*} f$ a une orbite par Γ relativement compacte dans $l^\infty(\Gamma_d)$. Si de plus r est dans $C_u(\Gamma)$, $r \underset{m}{*} f$ est aussi dans $C_u(\Gamma)$, donc finalement dans $C(\bar{\Gamma})$.

(d) On peut appliquer les résultats de (b) et (c).

Pusique $r \underset{m}{*} f$ est dans $C(\bar{\Gamma})$, et d'après (b),
$$r \underset{m}{*} f = A'(r \underset{m}{*} f) = A(r) * A_m(f).$$

De même, pour tout $g \in G$

$$(gr) \underset{m}{*} f = A'(gr \underset{m}{*} f) = A(gr)*A_m(f).$$

Au point $\gamma = 0$, ces égalités donnent

$$\langle \bar{g}\check{r}, fm\rangle = \langle \widecheck{A(gr)}A_m(f), \eta\rangle = \langle A(\check{r})A_m(f), \bar{g}\eta\rangle$$

ou encore

$$\widehat{A_m(\check{r}f)}(g) = A\widehat{(\check{r})A_m}(f)(g).$$

Il en résulte que

$$A_m(\check{r}f) = A(\check{r})A_m(f).$$

Soit Γ un groupe l.c.a. Notons $E'(\Gamma)$ l'ensemble des multiplicateurs de $E(\Gamma)$; $E''(\Gamma)$ l'ensemble des éléments f de $L^\infty(\Gamma)$ limites d'une suite (f_n) dans $C(\bar{\Gamma})$, pour toutes les normes $L^1(m)$, lorsque m parcourt l'ensemble des moyennes sur $L^\infty(\Gamma)$; nous verrons que $E''(\Gamma)$ s'identifie à $E'''(\Gamma)$ l'ensemble des éléments f de $E(\Gamma)$ dont l'orbite par Γ est relativement compacte dans tous les $L^1(m)$, et qui sont limites d'une suite (f_n) dans $C_u(\Gamma)$, pour toutes les normes $L^1(m)$.

$E''(\Gamma)$ est inclus dans $E(\Gamma)$ et donc dans $E'''(\Gamma)$: car pour tout g dans le dual de Γ et toute moyenne m sur $L^\infty(\Gamma)$

$$|\langle \bar{g}f, m\rangle - \langle \bar{g}f_n, m\rangle| \leqslant \|f-f_n\|_{L^1(m)}.$$

De même, si f est dans $L^\infty(\Gamma)$, si r est dans $E'''(\Gamma)$,

$$\|r \underset{m}{*} f - r_n \underset{m}{*} f\|_{l^\infty(\Gamma_d)} \leqslant \|f\|_{L^\infty(\Gamma)}\|r-r_n\|_{L^1(m)}.$$

D'après le théorème 8(c) $r \underset{m}{*} f$ est dans $C(\bar{\Gamma})$. La conclusion du théorème 8(d) est alors valable. D'où le

Corollaire 5. *Soit Γ un groupe* l.c.a. *Alors $E'''(\Gamma)$ est inclus dans $E'(\Gamma)$. De plus, si f est dans $E(\Gamma)$, si A est l'application canonique de $E(\Gamma)$ dans $E(\bar{\Gamma})$, si r est dans $E'''(\Gamma)$*

$$A(rf) = A(r)A(f).$$

Proposition 8. *Soit Γ un groupe abélien compact. Alors l'ensemble $E'(\Gamma)$ des multiplicateurs de $E(\Gamma)$ est exactement l'ensemble $E''(\Gamma)$.*

Démonstration. Nous montrons que $E'(\Gamma)$ est inclus dans $E''(\Gamma)$. Comme $E'(\Gamma)$ est une algèbre autoadjointe, elle est isomorphe comme algèbre, d'après le théorème de Stone–Weierstrass, à un $C(\Omega)$. Il en résulte que si f est dans $E'(\Gamma)$, $|f|$ aussi.

Soit f dans $E'(\Gamma)$, et soit (f_n) dans $C(\Gamma)$, convergeant vers f pour la norme $L^1(\Gamma)$. Alors $f_n - f$ est dans $E'(\Gamma)$, $|f_n - f|$ aussi. En particulier, pour toute moyenne m sur $L^\infty(\Gamma)$,

$$\langle |f_n - f|, m\rangle = \langle |f_n - f|, \eta\rangle \to 0.$$

Si Γ est compact, il est évident que $E''(\Gamma)$ est égal à $E'''(\Gamma)$. En fait, il en est toujours ainsi:

Proposition 9. *Soit Γ un groupe* l.c.a. *Alors l'ensemble $E''(\Gamma)$ est égal à l'ensemble $E'''(\Gamma)$.*

Démonstration. On a déjà vu que $E''(\Gamma)$ est inclus dans $E'''(\Gamma)$. Il reste à voir que $E'''(\Gamma)$ est inclus dans $E''(\Gamma)$. Si f est dans $E'''(\Gamma)$, alors $A(f)$ est dans $L^\infty(\bar{\Gamma})$, donc il existe (f_n) dans $C(\bar{\Gamma})$ telle que

$$\langle |A(f) - f_n|^2, \eta\rangle \to 0.$$

Pour toute moyenne m sur $L^\infty(\Gamma)$,

$$\begin{aligned}\langle |f-f_n|^2, m\rangle &= \langle (f-f_n)\overline{(f-f_n)}, m\rangle = \langle A_m[(f-f_n)\overline{(f-f_n)}], \eta\rangle\\ &= \langle A(f-f_n)\overline{A(f-f_n)}, \eta\rangle \quad \text{d'après le corollaire 5}\\ &= \langle |A(f-f_n)|^2, \eta\rangle = \langle |A(f)-f_n|^2, \eta\rangle.\end{aligned}$$

Donc $\langle |f-f_n|^2, m\rangle \to 0$, et a fortiori $\langle |f-f_n|, m\rangle \to 0$.

Exemple. Soit Γ un groupe l.c.a. Alors WAP(Γ) est dans $E'''(\Gamma)$. En effet, l'orbite par Γ d'un élément de WAP(Γ) est relativement compacte pour $\sigma(L^\infty(\Gamma), L^\infty(\Gamma)')$. Son image canonique dans $L^1(m)$ est compacte, d'après [7], car $L^\infty(\Gamma)$ a la propriété de Dunford–Pettis, et l'application canonique $L^\infty(\Gamma) \to L^1(m)$ est faiblement compacte. Enfin WAP(Γ) est dans $C_u(\Gamma)$, d'après [3].

3. Rappelons que si Γ est un groupe l.c.a., $B(\Gamma)$ est l'espace transformé de Fourier de $M(\hat{\Gamma})$.

En adoptant un autre point de vue, on peut améliorer le théorème 8 (a), mais ce point de vue nous semble moins riche de conséquences.

Proposition 10. *Soient Γ un groupe abélien discret, m une moyenne sur $l^\infty(\Gamma)$. Si r, f sont dans $l^\infty(\Gamma)$, $r \underset{m}{*} f$ est dans $B(\Gamma)$. De plus*

$$\|r \underset{m}{*} f\|_{B(\Gamma)} \leqslant \|r\|_\infty \|f\|_\infty.$$

Démonstration. Cette proposition est essentiellement une conséquence d'un résultat de Varopoulos [21]. On pose

$$\varphi(\gamma) = r \underset{m}{*} f(\gamma).$$

On va montrer que $\varphi(\gamma+\gamma')$, considérée comme fonction sur $\Gamma \times \Gamma$, est dans le dual de $l^1(\Gamma) \hat{\otimes} l^1(\Gamma)$. D'après [21], ce dual est exactement l'algèbre des multiplicateurs de $c_0(\Gamma)\hat{\otimes} c_0(\Gamma)$. La sous-algèbre des fonctions constantes sur les fibres $(\gamma-\gamma'', \gamma'+\gamma'')_{\gamma''\in\Gamma}$ est isométriquement isomorphe à $B(\Gamma)$. Il en résultera que φ est dans $B(\Gamma)$. Pour $(\gamma, \gamma')\in\Gamma\times\Gamma$

$$\varphi(\gamma+\gamma') = \langle(\check{r})_\gamma f_{\gamma'}, m\rangle.$$

Soit $(\nu_a)_{a\in A}$ une famille dans $l^1(\Gamma)$ telle que

(i) $\forall a\in A\ \ \|\nu_a\| = 1 = \langle\nu_a, 1\rangle$,

(ii) $\nu_a\to m$ pour $\sigma(l^1(\Gamma)'', l^\infty(\Gamma))$.

Alors

$$\varphi(\gamma+\gamma') = \lim_a\langle(\check{r})_\gamma f_{\gamma'}, \nu_a\rangle.$$

Comme fonction de γ et γ', l'élément $\langle(\check{r})_\gamma f_{\gamma'}, \nu_a\rangle$ est dans l'enveloppe convexe de l'orbite par $\Gamma\times\Gamma$ de $\check{r}\otimes f$, considéré comme élément de $l^\infty(\Gamma)\hat{\otimes} l^\infty(\Gamma)$. La fonction $\varphi(\gamma+\gamma')$ est limite ponctuelle sur $\Gamma\times\Gamma$ d'une famille bornée d'éléments de $l^\infty\hat{\otimes} l^\infty$. Elle est donc dans le dual de $l^1(\Gamma)\hat{\hat{\otimes}} l^1(\Gamma)$. On en déduit $\|\varphi\|_{B(\Gamma)} = \|\varphi(\gamma+\gamma')\|_{[l^1\hat{\hat{\otimes}} l^1]'}\leqslant\|\check{r}\otimes f\|_{l^\infty\hat{\otimes} l^\infty} = \|\check{r}\|_\infty\|f\|_\infty$.

Remarque. Ce résultat est-il encore vrai lorsque Γ est l.c.a. non discret?

En reprenant les notations de la remarque 1, soit $M = h\odot m$ une moyenne sur $L^\infty(\Gamma)$. Alors si $r, f\in L^\infty(\Gamma)$,

$$r\underset{M}{*}f(\gamma) = \langle(\check{r})_\gamma f, h\odot m\rangle = \langle(r\check{\odot}\check{h})_\gamma(f\odot\check{h}), m\rangle = (r\odot h)\underset{m}{*}(f\odot\check{h})(\gamma)$$

donc $r\underset{M}{*}f$ est dans $B(\Gamma_d)$, avec une norme majorée par $\|r\|_\infty\|f\|_\infty$.

Si M est une moyenne quelconque sur $L^\infty(\Gamma)$, la remarque 1 entraîne que $r\underset{M}{*}f$ est une limite ponctuelle de fonctions dans $B(\Gamma_d)$. Pour pouvoir conclure que $r\underset{M}{*}f$ est encore dans $B(\Gamma_d)$ il faudrait montrer que M est adhérente pour $\sigma(L^\infty(\Gamma)', L^\infty(\Gamma))$ à l'enveloppe convexe des moyennes de la forme $h\odot m$.

Addendum I. Après avoir reçu communication de ce travail, S. Hartman et P. Głowacki nous ont signalé les articles suivants, bien antérieurs, qui résolvent le problème 4 dans certains cas:

[a] J. P. Kahane, *Sur les fonctions presque périodiques généralisées dont le spectre est vide*, Studia Math. 21 (1962), 231–236.

[b] G. S. Woodward, *Sur une classe d'ensembles épars*, CRASC Paris vol. 274 (1972), 221–223.

[c] — *Invariant means and ergodic sets*, Pacific J. Math. 51.2 (1974), 281–299.

[d] — *The generalized almost periodic part of an ergodic function*, Studia Math. 50 (1974), 103–116.

De [a] (théorèmes 2 et 3) et [d], il résulte que $E(\boldsymbol{R})\cap C_u(\boldsymbol{R})$ et $E(\boldsymbol{Z})$ ne sont pas des algèbres pour la multiplication ponctuelle. D'après [d] (théorème 6), il en est de même pour l'image par A de $E(\boldsymbol{Z})$ dans $L^\infty(\bar{\boldsymbol{Z}})$. Or cet espace est exactement $E^{\boldsymbol{Z}}(\bar{\boldsymbol{Z}})$, d'après notre théorème 7.

Les travaux de G. S. Woodward recoupent partiellement les nôtres. Les notions de fonctions ergodiques et totalement ergodiques y sont définies, mais seulement pour des éléments dans $C_u(\Gamma)$, Γ étant un groupe l.c.a. L'application canonique A de $E(\Gamma)\cap C_u(\Gamma)$ dans $L^\infty(\bar{\Gamma})$ y est également utilisée. Les éléments de $E''(\Gamma)\cap C_u(\Gamma)$ y sont appelés fonctions presque périodiques au sens de Weyl.

Woodward utilise constamment la remarque suivante ([c]): Si f est dans $C_u(\Gamma)$, si φ est dans $L^1(\Gamma)$, avec $\|\varphi\|_{L^1(\Gamma)} = 1 = \hat{\varphi}(0)$, alors $f*\varphi$ est dans la fermeture, pour la norme de $L^\infty(\Gamma)$, de l'enveloppe convexe de l'orbite de f par Γ. Il en résulte alors ([c], corollaire 3) que si $(\varphi_a)_{a\in A}$ est une famille moyennante dans $L^1(\Gamma)$, si $(f*\varphi_a)_{a\in A}$ converge uniformément, alors f est ergodique. Il est intéressant de comparer ce résultat à nos propositions 3 et 4, puis la définition 5 et le lemme 6 de [c] à notre corollaire 1. Notre lemme 1 est contenu dans [c] (p. 285), notre proposition 2 dans [d] (p. 105). Enfin l'exemple 1 de notre première partie est contenu dans [b].

Addendum II. Le problème de Rubel et Shields a été résolu par la négative dans: M. Talegrand, *Some functions with a unique invariant mean*, Proc. Amer. Math. Soc., à paraître.

Notations. Tous les groupes considérés sont localement compact abéliens (l.c.a.).

Soit Γ un tel groupe.

$\hat{\Gamma}$ ou G est le groupe dual de Γ.

Γ_d est le groupe Γ muni de la topologie discrète.

$\bar{\Gamma}$ est le compactifié de Bohr de Γ, c'est-à-dire le dual de $(\hat{\Gamma}_d)$.

$C(\Gamma)$ est l'espace des fonctions continues bornées sur Γ.

$Cu(\Gamma)$ est l'espace des fonctions uniformément continues bornées sur Γ.

$L^1(\Gamma)$ est l'espace des fonctions intégrables pour la mesure de Haar η_Γ de Γ si Γ n'est pas discret; si Γ est discret cette notation désigne $l^1(\Gamma)$.

$L^\infty(\Gamma)$ est le dual de $L^1(\Gamma)$; si Γ est discret on utilise aussi la notation $l^\infty(\Gamma)$.

$M(\Gamma)$ est l'espace des mesures bornées sur Γ.

L'espace transformé de Fourier de $L^1(\Gamma)$ est $A(\hat{\Gamma})$.

L'espace transformé de Fourier de $L^\infty(\Gamma)$ est $PM(\hat{\Gamma})$.

Si K est un fermé de $\hat{\Gamma}$, $I(K)$ est l'espace des fonctions de $A(\hat{\Gamma})$ nulles sur K. L'espace transformé de Fourier de $I(K)$ est $\hat{I}(K)$, dans $L^1(\Gamma)$.

L'espace quotient $A(\hat{\Gamma})/I(K)$ est noté $A(K)$. Si Γ est compact l'espace $(\hat{I}(K))^{\perp}$ est noté $L_K^{\infty}(\Gamma)$.

Si K est un fermé de $\hat{\Gamma}$, $J(K)$ est la fermeture, pour la norme de $A(\hat{\Gamma})$, des fonctions de $A(\hat{\Gamma})$ nulles dans un voisinage de K.

Pour tout $f \in L^{\infty}(\Gamma)$, tout $\gamma_0 \in \Gamma$, on pose

$$f_{\gamma_0}(\gamma) = f(\gamma - \gamma_0) = f * \delta_{\gamma_0}.$$

Pour tout $f \in L^{\infty}(\Gamma)$, on pose

$$\check{f}(\gamma) = f(-\gamma).$$

Pour toute forme linéaire continue l sur $L^{\infty}(\Gamma)$, on définit $\check{l}$ par

$$\forall f \in L^{\infty}(\Gamma)\ \langle \check{l}, f\rangle = \langle l, \check{f}\rangle.$$

Le dual d'un espace de Banach B est noté B'.

On dit qu'un Banach B contient le Banach B_1 si B_1 est isomorphe à un sous espace fermé de B.

Une suite (b_n) dans un Banach B est dite équivalente à la base canonique de l^1 (ou c_0) si l'application

$$\begin{cases} l^1 \\ c_0 \end{cases} \to B,$$

$$(a_n)_{n=1}^{n=\infty} \rightsquigarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

est un isomorphisme sur son image.

Travaux cités

[1] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, 1932 [cf. *Oeuvres*, vol. II, 1978].

[2] P. Civin and B. Yood, *The second conjugate space of a Banach algebra as an algebra*, Pacific J. Math. 11 (1961), 820–847.

[3] W. F. Eberlein, *Abstract ergodic theorems and weak almost periodic functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 67 (1949), 217–239.

[4] — *The point spectrum of weakly almost periodic functions*, Mich. Math. J. 3 (1955), 137–139.

[5] F. P. Greenleaf, *Invariant means on topological groups*, Van Nostrand, 1969.

[6] A. Grothendieck, *Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques* (Introduction), Bol. Soc. Matem. Sao Paulo 8 (1956).

[7] — *Applications linéaires faiblement compactes sur les espaces du type $C(K)$*, Canadian J. Math. 5 (1953).

[8] E. Hewitt and K. Ross, *Abstract harmonic analysis*, Springer Verlag, 1933.

[9] Y. Katznelson and O. McGehee, *Measures and pseudomeasures on compact subsets of the line*, Math. Scand. 23 (1968), 57–68.

[10] F. Lust, *Ensembles de Rosenthal et ensembles de Riesz*, C. R. Acad. Sci Paris 282 (1976), 833–835.

[11] Y. Meyer, *Recent advances in spectral synthesis*, Conf. on Harmonic Analysis, Maryland 1972, Lecture Notes in Math. 266.

[12] — *Spectres des mesures et mesures absolument continues*, Studia Math. 30 (1968), 87–99.

[13] E. Odell and H. P. Rosenthal, *A double dual characterization of separable Banach spaces containing l^1*, Israel. J. Math. 20 (1975), 378.

[14] F. Parreau et B. Host, *Sur les mesures dont la transformée de Fourier ne tend pas vers 0 à l'infini*, A paraitre dans Colloquium Math. 1978.

[15] L. A. Rubel and A. L. Shields, *Invariant hyperplanes in $L^{\infty}(T)$ and $H^{\infty}(T)$*, J. Reine Angew. Math. 272 (1965), 32–44.

[16] W. Rudin, *Invariant means on L^{∞}*, Studia Math. 44 (1972), 219–227.

[17] — *Homomorphisms and translations in $L^{\infty}(G)$*, Advances in Math. 15 (1975), 72–90.

[18] — *Fourier analysis on groups*, Chap. 2, § 6, Interscience.

[19] I. Singer, *Bases in Banach spaces*, Chap. II–15, p. 446.

[20] N. Th. Varopoulos, *Tensor algebras and harmonic analysis*, Chap. 4–Chap. 8, Acta Math. 119 (1967).

[21] — *Tensor algebras over discrete spaces*, J. Funct. Anal. 3 (1969).

UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE

Received November 11, 1977 (1379)
Revised version October 4, 1978