[9] O. Zariski, *Studies in equisingularity I, II, III*, ibid. 87 (1965), 507–536 und 972–1006; 90 (1968), 961–1023.

[10] — *General theory of saturation and of saturated local rings I, II, III*, ibid. 93 (1971), 573–648 und 872–964; 97 (1975), 415–502.

FACHBEREICH MATHEMATIK
UNIVERSITÄT OSNABRÜCK
D 4500 OSNABRÜCK, BR DEUTSCHLAND

Received January 9, 1979 (1501)

STUDIA MATHEMATICA, T. LXXI. (1982)

Positive operatorwertige Maße und banachraumwertige stationäre Prozesse auf LCA-Gruppen

von

F. Schmidt (Dresden)

Abstract. It is well known that a stationary process admits a representation in moving averages iff his non-random spectral measure is absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure. In this paper we generalize this theorem to stationary processes having as set of parameters an arbitrary locally compact abelian T_0-group and as set of values an arbitrary complex Banach space (more exactly, we are concerned with stationary mappings of the group of parameters into the space of all bounded linear operators $\mathfrak{F} \to \mathfrak{H}$ where $\mathfrak{F}$ is a Banach space and $\mathfrak{H}$ is a Hilbert space). In the proof we make use of a decomposition theorem for the spectral density of the process which is also proved here and which was proved formerly for the group of the integers under a separability and a boundedness condition by Miamee and Salehi. Besides, two isomorphic theorems for the treated class of stationary processes are given.

0. Einleitung. Bekanntlich gestattet ein stationärer Prozeß auf der Gruppe $\boldsymbol{Z}$ der ganzen oder der Gruppe $\boldsymbol{R}$ der reellen Zahlen genau dann eine Darstellung durch gleitende Mittel, wenn sein nichtzufälliges Spektralmaß bezüglich des Lebesgueschen Maßes absolutstetig ist. Wie in [1] gezeigt wurde, bleibt diese Aussage für beliebige lokalkompakte abelsche T_0-Gruppen richtig, wenn man nur den Terminus „Lebesguesches Maß" durch „Haarsches Maß auf der Charaktergruppe" ersetzt. Sowohl für den Fall der Gruppe $\boldsymbol{Z}$ bzw. der Gruppe $\boldsymbol{R}$ als auch für den in [1] betrachteten allgemeineren Fall wird im Beweis dieses Kriteriums die (triviale) Tatsache benutzt, daß jede nichtnegative integrierbare Funktion als Betragsquadrat einer quadratisch integrierbaren Funktion darstellbar ist. Betrachtet man statt nichtnegativer Funktionen solche, deren Werte nichtnegative beschränkte lineare Operatoren in einem Hilbertraum sind, so folgt die Existenz einer entsprechenden Darstellung sofort aus der Existenz der Quadratwurzel für solche Operatoren. Wesentlich komplizierter liegen die Verhältnisse jedoch, wenn man Funktionen untersucht, deren Werte nichtnegative beschränkte lineare Operatoren von einem Banachraum in seinen dualen Raum sind. Dennoch kann man auch in diesem Fall mit Hilfe einer sogenannten „Quasi-Quadratwurzel" die gewünschte Darstellung erhalten (Miamee, Salehi [8], für einen einzelnen Operator — oder eine konstante operatorwertige Funktion — wurde die

Existenz einer „Quasi-Quadratwurzel" von Vakhania [16] und Chobanyan [2] bewiesen).

Beim Studium von stationären Prozessen mit Werten in einem Hilbert–bzw. einem Banachraum ([9] bzw. [3], [10], [18]) zeigt sich jedoch, daß die Spektraldichte eines solchen Prozesses (im Falle eines unendlich-dimensionalen Raumes) im allgemeinen nicht durch eine Funktion, deren Werte beschränkte lineare Operatoren sind, darstellbar zu sein braucht. In der vorliegenden Arbeit wird deshalb eine der Aufgabenstellung angepaßte Funktionenklasse – und zwar für den Fall einer beliebigen lokalkompakten abelschen T_0-Gruppe – untersucht (diese Klasse wurde für Prozesse auf der Gruppe $\boldsymbol{Z}$ in [5] und [13] eingeführt). Es wird bewiesen, daß jede Funktion aus dieser Klasse eine Darstellung der gewünschten Form zuläßt([1]), und daraus gefolgert, daß ein stationärer Prozeß mit Werten in einem Banachraum – bei beliebiger lokalkompakter abelscher T_0-Gruppe als Parametermenge – genau dann durch gleitende Mittel dargestellt werden kann, wenn sein nichtzufälliges Spektralmaß absolutstetig bezüglich des Haarschen Maßes auf der Charaktergruppe ist. Außerdem werden zwei Isomorphiesätze für stationäre Prozesse mit Werten in einem Banachraum bewiesen.

Zu den Bezeichnungen der Arbeit: Es seien $\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{R}$ bzw. $\boldsymbol{C}$ die Menge aller ganzen, aller reellen bzw. aller komplexen Zahlen, G eine lokalkompakte abelsche T_0-Gruppe und $M(G)$ bzw. $M^+(G)$ wie in [4] (19.12). Für $\mu \in M(G)$ schreiben wir $\mathfrak{M}(\mu)$ für die σ-Algebra aller $|\mu|$-meßbaren Teilmengen von G. Ferner sei I ein (beliebiges) nichtnegatives lineares Funktional auf dem Raum aller stetigen komplexwertigen Funktionen auf G mit *kompaktem Träger*, ι steht für das gemäß [4] §11 zugehörige nichtnegative Maß auf der σ-Algebra $\mathfrak{M}(\iota)$ aller ι-meßbaren Teilmengen von G.

Für zwei Banachräume $\mathfrak{F}, \mathfrak{F}'$ bezeichne $\mathrm{BL}(\mathfrak{F}, \mathfrak{F}')$ den Raum aller beschränkten linearen Operatoren von $\mathfrak{F}$ in $\mathfrak{F}'$, $\mathrm{BL}(\mathfrak{F}, \mathfrak{F}) =: \mathrm{BL}(\mathfrak{F})$.

Sofern nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird, bezeichnet Γ die Charaktergruppe von G, $\mathfrak{F}$ einen komplexen Banachraum und $\mathfrak{H}$ einen komplexen Hilbertraum.

In den Kapiteln 2 und 4 kann $\mathfrak{H}$ im Hinblick auf wahrscheinlichkeitstheoretische Anwendungen als Hilbertraum $\mathfrak{H}(\Omega) = L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \boldsymbol{P})$ aller (Äquivalenzklassen von) komplexwertigen Zufallsgrößen mit endlichem absolutem Moment zweiter Ordnung auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \boldsymbol{P})$ aufgefaßt werden.

Im Unterschied zu einigen anderen Autoren (z.B. [3], [5], [6], [16], [17], 4.3.6., [18] und [2]) definieren wir die linearen Operationen im dualen

(1) In [6] wird gezeigt, daß diese Darstellung nicht an die Gruppenstruktur gebunden ist, sondern allgemeiner im Falle eines beliebigen meßbaren Raumes für Funktionen aus der entsprechend definierten Klasse gewonnen werden kann.

Raum $\mathfrak{F}^*$ von $\mathfrak{F}$ gemäß

$$\langle f, \alpha_1 f_1^* + \alpha_2 f_2^* \rangle := \bar{\alpha}_1 \langle f, f_1^* \rangle + \bar{\alpha}_2 \langle f, f_2^* \rangle$$
$$(f \in \mathfrak{F}, f_i^* \in \mathfrak{F}^*,\ \alpha_i \in \boldsymbol{C}\ (i = 1, 2)).$$

Der zu $X \in \mathrm{BL}(\mathfrak{F}, \mathfrak{H})$ adjungierte Operator X^*, definiert durch $\langle f, X^* h \rangle := (Xf, h)_{\mathfrak{H}}$ $(f \in \mathfrak{F}, h \in \mathfrak{H})$, gehört dann zu $\mathrm{BL}(\mathfrak{H}, \mathfrak{F}^*)$.

1. Vorbereitende Betrachtungen.

1.1. Wir beginnen mit zwei leicht zu beweisenden Aussagen.

LEMMA 1.1. *Es seien $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}'$ zwei (reelle bzw. komplexe) Banachräume, $\mathfrak{F}_0$ eine in $\mathfrak{F}$ totale Teilmenge*([2]) *und T_0 eine Abbildung von $\mathfrak{F}_0$ in $\mathfrak{F}'$. Genau dann läßt sich T_0 zu einem Operator $T \in \mathrm{BL}(\mathfrak{F}, \mathfrak{F}')$ fortsetzen, wenn eine Konstante $C < \infty$ existiert, so daß für jede natürliche Zahl N und für beliebige $f_1, \ldots, f_N \in \mathfrak{F}_0$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \boldsymbol{R}$ bzw. $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \boldsymbol{C}$ die Beziehung*

$$\Big\| \sum_{k=1}^{N} \alpha_k T_0 f_k \Big\|_{\mathfrak{F}'} \leqslant C \Big\| \sum_{k=1}^{N} \alpha_k f_k \Big\|_{\mathfrak{F}}$$

besteht. Ist das der Fall, so gibt es nur eine Fortsetzung $T \in \mathrm{BL}(\mathfrak{F}, \mathfrak{F}')$ von T_0, und $\overline{T\mathfrak{F}}$ ist die abgeschlossene lineare Hülle von $T_0 \mathfrak{F}_0$.

FOLGERUNG 1.1. *Es seien $\mathfrak{H}, \mathfrak{H}'$ zwei (reelle oder komplexe) Hilberträume, $\mathfrak{H}_0$ eine in $\mathfrak{H}$ totale Teilmenge und V_0 eine isometrische Abbildung*([3]) *von $\mathfrak{H}_0$ in $\mathfrak{H}'$. Dann läßt sich V_0 in eindeutiger Weise zu einem isometrischen Operator $V \in \mathrm{BL}(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}')$ fortsetzen, und $\overline{V\mathfrak{H}}$ ist die abgeschlossene lineare Hülle von $V_0 \mathfrak{H}_0$.*

1.2. Es seien Γ eine beliebige Gruppe und $\mathfrak{H}$ ein beliebiger (reeller oder komplexer) Hilbertraum.

LEMMA 1.2 ([4], (21.14)). *Es sei $U(\cdot)$ eine unitäre Darstellung von Γ über $\mathfrak{H}$. Dann gibt es gewisse Elemente $h_\beta \in \mathfrak{H}$ $(\beta \in B$, B: Indexmenge$)$, so daß $\mathfrak{H} = \bigoplus_{\beta \in B} \mathfrak{H}(U, h_\beta)$ mit $\mathfrak{H}(U, h_\beta) := \bigvee_{\gamma \in \Gamma} \{U(\gamma) h_\beta\}$ $(\beta \in B)$ gilt.*

1.3. Es bezeichne $\mathfrak{P}^+(\Gamma)$ die Menge aller stetigen nichtnegativ definiten komplexwertigen Funktionen auf Γ und $\mathfrak{P}(\Gamma)$ die lineare Hülle von $\mathfrak{P}^+(\Gamma)$. Für $\mu \in M(G)$ definieren wir die Fourier–Stieltjes-Transformierte $\hat{\mu}$ gemäß([4])

$$\hat{\mu}(\gamma) := \int \overline{\gamma(x)}\, \mu(dx) \qquad (\gamma \in \Gamma) \tag{1.3}$$

(vgl. [4], (23.9)). Es gilt dann der

SATZ 1.3 ([4], (33.1) und (33.3)). *Durch $\mu \to \hat{\mu}$ ist eine eineindeutige Abbildung von $M^+(G)$ bzw. $M(G)$ auf $\mathfrak{P}^+(\Gamma)$ bzw. $\mathfrak{P}(\Gamma)$ gegeben.*

(2) d.h., $\mathfrak{F}$ ist die abgeschlossene lineare Hülle von $\mathfrak{F}_0$.
(3) d.h. $(V_0 h_1, V_0 h_2)_{\mathfrak{H}'} = (h_1, h_2)_{\mathfrak{H}}$ $(h_1, h_2 \in \mathfrak{H}_0)$.
(4) Hier und im folgenden steht $\int$ für $\int_G$.

Aus diesem Satz erhält man leicht das folgende

Lemma 1.3. *Sei* $\mu \in M^{+}(G)$. *Dann sind die Funktionen* $\overline{\gamma(\cdot)}$ $(\gamma \in \Gamma)$ *im Raum* $\mathfrak{L}_2(\mu) := \mathfrak{L}_2(G, \mu)$ *total.*

1.4. Mit Hilfe von Satz 1.3 beweist man die folgende Variante des Theorems von Stone:

Satz 1.4.1. *Es sei* $U(\cdot)$ *eine (stark) stetige unitäre Darstellung von* Γ *über* $\mathfrak{H}$. *Dann gibt es zu jedem Paar* $(h, h') \in \mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ *genau ein* $\mu_U[h, h'] \in M(G)$ *mit*

$$\big(U(\cdot)h, h'\big)_{\mathfrak{H}} = \hat{\mu}_U[h, h'] \qquad (h, h' \in \mathfrak{H}).$$

Überdies gilt $(\mu[h, h'] := \mu_U[h, h'](h, h' \in \mathfrak{H}))$

$$\begin{array}{lll} \text{(i)} & \mu[h, h] \in M^{+}(G) & \\ \text{(ii)} & \mu[h, h](G) = \|h\|^2_{\mathfrak{H}} & (h \in \mathfrak{H}), \end{array}$$

$$\text{(iii)} \quad \mu[a_1 h_1 + a_2 h_2, h'] = a_1 \mu[h_1, h'] + a_2 \mu[h_2, h'] \qquad (a_i \in C,\ h_i, h' \in \mathfrak{H}\ (i = 1, 2)),$$

$$\begin{array}{lll} \text{(iv)} & \mu[h, h'] = \overline{\mu[h', h]} & \\ \text{(v)} & |\mu[h, h'](D)|^2 \leqslant \mu[h, h](D)\,\mu[h', h'](D) & (h, h' \in \mathfrak{H}) \end{array}$$

$$(D \in \mathfrak{M}(\mu[h, h]) \cap \mathfrak{M}(\mu[h', h']) \ (\subseteq \mathfrak{M}(\mu[h, h']))).$$

Satz 1.4.2. *Es seien* $U(\cdot)$ *eine (stark) stetige unitäre Darstellung von* Γ *über* $\mathfrak{H}$, μ_U *wie in Satz 1.4.1 und*

$$\mathfrak{H}^{(1)}_{U,\iota} := \{h \in \mathfrak{H} |\ \mu_U[h, h] \text{ ist absolutstetig bezüglich } \iota\},$$

$$\mathfrak{H}^{(2)}_{U,\iota} := \{h \in \mathfrak{H} |\ \mu_U[h, h] \text{ ist singulär bezüglich } \iota\}.$$

Dann sind $\mathfrak{H}^{(1)} := \mathfrak{H}^{(1)}_{U,\iota}$ *und* $\mathfrak{H}^{(2)} := \mathfrak{H}^{(2)}_{U,\iota}$ *abgeschlossene lineare Teilräume von* $\mathfrak{H}$ *mit*

$$\text{(i)} \qquad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}^{(1)} \oplus \mathfrak{H}^{(2)}$$

und

$$\text{(ii)} \qquad U(\gamma)\mathfrak{H}^{(i)} = \mathfrak{H}^{(i)} \qquad (\gamma \in \Gamma,\ i = 1, 2).$$

Beweis. Daß $\mathfrak{H}^{(1)}$ und $\mathfrak{H}^{(2)}$ lineare Teilräume sind, ergibt sich aus der Beziehung

$$\mu[a_1 h_1 + a_2 h_2, a_1 h_1 + a_2 h_2] \leqslant 2(|a_1|^2 \mu[h_1, h_1] + |a_2|^2 \mu[h_2, h_2]) \qquad (a_i \in C,\ h_i \in \mathfrak{H}\ (i = 1, 2)),$$

die sich leicht aus Satz 1.4.1 (iii), (iv) und (v) herleiten läßt. Sei $(h_n) \subseteq \mathfrak{H}^{(1)}$, $h \in \mathfrak{H}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \|h_n - h\| = 0$ $(\|\cdot\| := \|\cdot\|_{\mathfrak{H}})$; ferner sei $F \subseteq G$ eine beliebige

kompakte Menge mit $\mathfrak{i}(F) = 0$. Auf Grund von $\mu[h_n, h_n](F) = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ und Satz 1.4.1 (i), (ii), (v) hat man

$$|\mu[h, h](F)| \leqslant |\mu[h - h_n, h](F)| + |\mu[h_n, h - h_n](F)| + |\mu[h_n, h_n](F)|$$
$$\leqslant (\|h\| + \|h_n\|)\,\|h - h_n\| \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

also $\mu[h, h](F) = 0$, d.h., $h \in \mathfrak{H}^{(1)}$. Folglich ist $\mathfrak{H}^{(1)}$ abgeschlossen. Aus $\mu[U(\gamma)h, U(\gamma)h'] = \mu[h, h']$ $(\gamma \in \Gamma,\ h, h' \in \mathfrak{H})$ folgt $U(\gamma)\mathfrak{H}^{(i)} \subseteq \mathfrak{H}^{(i)}$ $(\gamma \in \Gamma,\ i = 1, 2)$. Daraus ergibt sich leicht die Gültigkeit von (ii). Für $h \in \mathfrak{H}$ sei $\mu[h, h] = \mu_1[h] + \mu_2[h]$ die Zerlegung von $\mu[h, h]$ in den ι-absolutstetigen Anteil $\mu_1[h]$ und den ι-singulären Anteil $\mu_2[h]$ ([4], (14.22)). Auf Grund von Folgerung 1.1 läßt sich die durch $V_0\big(U(\gamma)h\big) := \overline{\gamma(\cdot)}$ $(\gamma \in \Gamma)$ definierte isometrische Abbildung V_0 von $\mathfrak{H}_0(U, h) := \{U(\gamma)h |\ \gamma \in \Gamma\}$ $(\subseteq \mathfrak{H})$ in $\mathfrak{L}_2(\mu[h, h])$ in eindeutiger Weise zu einem isometrischen Operator $V \in \mathrm{BL}\big(\mathfrak{H}(U, h), \mathfrak{L}_2(\mu[h, h])\big)$ $\big(\mathfrak{H}(U, h) := \bigvee_{\gamma\in\Gamma} \{U(\gamma)h\}$ $(\subseteq \mathfrak{H})\big)$ fortsetzen; dabei gilt $V\mathfrak{H}(U, h) = \mathfrak{L}_2(\mu[h, h])$ (vgl. Lemma 1.3) sowie $VU(\gamma) = \overline{\gamma(\cdot)}V$ $(\gamma \in \Gamma)$. Wegen $\mu_i[h] \ll \mu[h, h]$ $(i = 1, 2)$ gibt es Funktionen $\varphi_i \in \mathfrak{L}^{+}_1(\mu[h, h])$ mit

$$\mu_i[h](D) = \int_D \varphi_i(x)\,\mu[h, h](dx) \qquad (D \in \mathfrak{M}(\mu_i[h]),\ i = 1, 2).$$

Wir setzen $\psi_i = \sqrt{\varphi_i}$ und $h_i = V^{-1}\psi_i$ $(i = 1, 2)$. Dann gilt $((\cdot,\cdot) := (\cdot,\cdot)_{\mathfrak{H}})$

$$\begin{aligned} \int \overline{\gamma(x)}\,\mu[h_i, h_i](dx) &= \big(U(\gamma)h_i, h_i\big) = \big(U(\gamma)V^{-1}\psi_i, V^{-1}\psi_i\big) \\ &= \big(V^{-1}[\overline{\gamma(\cdot)}\psi_i], V^{-1}\psi_i\big) \\ &= \int \overline{\gamma(x)}\,|\psi_i(x)|^2 \mu[h, h](dx) \\ &= \int \overline{\gamma(x)}\varphi_i(x)\,\mu[h, h](dx) \\ &= \int \overline{\gamma(x)}\,\mu_i[h](dx) \qquad (\gamma \in \Gamma,\ i = 1, 2). \end{aligned}$$

Auf Grund der Eineindeutigkeitsaussage von Satz 1.3 folgt daraus $\mu[h_i, h_i] = \mu_i[h]$, also $h_i \in \mathfrak{H}^{(i)}$ $(i = 1, 2)$. Ist nun $h \in \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}^{(1)}$, so hat man nach (ii) $\mathfrak{H}(U, h) \subseteq \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}^{(1)}$; wegen $h_1 \in \mathfrak{H}^{(1)}$ und $h_1 \in \mathfrak{H}(U, h)$ gilt also in diesem Fall $h_1 = 0$, also $\mu_1[h] = \mu[h_1, h_1] = 0$. Für jedes $h \in \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}^{(1)}$ ist somit $\mu[h, h]$ $(= \mu_2[h])$ ι-singulär, d.h., es gilt $\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}^{(1)} \subseteq \mathfrak{H}^{(2)}$. Wegen $\mathfrak{H}^{(1)} \cap \mathfrak{H}^{(2)} = \{h \in \mathfrak{H} |\ \mu[h, h] = 0\} = \{0\}$ folgt daraus $\mathfrak{H}^{(2)} = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}^{(1)}$. Folglich ist $\mathfrak{H}^{(2)}$ ein abgeschlossener linearer Teilraum von $\mathfrak{H}$, und es gilt (i).

1.5. Mit $\mathfrak{p}(\mathfrak{F}, \iota)$ bezeichnen wir die Menge aller Abbildungen

$$w\colon \mathfrak{F} \times \mathfrak{F} \ni (f, f') \to w(\cdot, f, f') \in \mathfrak{L}_1(\iota)$$

mit den Eigenschaften

$$\text{(i)}\quad w(\cdot,f,f)\geqslant 0 \qquad\qquad (f\in\mathfrak{F}),$$
$$\text{(ii)}\quad \int w(x,f,f)\,\iota(dx)\leqslant C\|f\|_{\mathfrak{F}}^2<\infty$$

$$\text{(iii)}\quad w(\cdot,\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2,f')=\alpha_1 w(\cdot,f_1,f')+\alpha_2 w(\cdot,f_2,f') \qquad (\alpha_i\in C,f_i,f'\in\mathfrak{F}\ (i=1,2)),$$

$$\text{(iv)}\quad \overline{w(\cdot,f',f)}=w(\cdot,f,f') \qquad (f,f'\in\mathfrak{F}).$$

Aus (i), (iii) und (iv) schließt man leicht auf

$$\text{(v)}\quad |w(\cdot,f,f')|^2\leqslant w(\cdot,f,f)\,w(\cdot,f',f') \qquad (f,f'\in\mathfrak{F});$$

folglich erhält man aus (ii)

$$\text{(ii')}\quad \int |w(x,f,f')|\,\iota(dx)\leqslant C\|f\|_{\mathfrak{F}}\|f'\|_{\mathfrak{F}}<\infty \qquad (f,f'\in\mathfrak{F}).$$

Weiter bezeichnen wir mit $\mathfrak{P}(\mathfrak{F},\iota)$ die Menge aller bezüglich ι schwach summierbaren Funktionen auf G mit Werten in $\mathrm{BL}(\mathfrak{F},\mathfrak{F}^*)$ mit der Eigenschaft $\langle f,W(x)f\rangle\geqslant 0$ $(x\in G,\ f\in\mathfrak{F})$. Durch

$$\text{(1.5)}\quad w(\cdot,f,f'):=\langle f,W(\cdot)f'\rangle \qquad (f,f'\in\mathfrak{F})$$

wird jedem $W\in\mathfrak{P}(\mathfrak{F},\iota)$ ein $w\in\mathfrak{p}(\mathfrak{F},\iota)$ zugeordnet. Man kann jedoch leicht Beispiele von Abbildungen $w\in\mathfrak{p}(\mathfrak{F},\iota)$ konstruieren, die nicht in der Form (1.5) mit einem $W\in\mathfrak{P}(\mathfrak{F},\iota)$ darstellbar sind:

Beispiel 1. Sei ι als nichtatomisch vorausgesetzt, d.h., es existiere eine offene Menge $D\subseteq G$ mit $\iota(D)>0$, so daß die Einschränkung von ι auf D stetig ist ($\iota(\{x\})=0$ für jedes $x\in D$). Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\iota(D)<\infty$. Wir setzen $D_1:=D$, wählen eine Menge $D_2\subseteq D_1$ mit $\iota(D_2)=\iota(D)/2$ ([5]) und setzen $D_3:=D_1\setminus D_2$. Durch Anwendung dieser „Halbierungsmethode" auf D_2 bzw. D_3 erhält man Mengen D_4, D_5 bzw. D_6, D_7 usw. Allgemein gilt dann $\iota(D_j)=\iota(D)/2^{n-1}$ $(j=2^{n-1},\ldots,2^n-1;\ n=1,2,\ldots)$. Es sei nun $\mathfrak{F}$ ein (unendlichdimensionaler) separabler Hilbertraum und $\{e_1,e_2,\ldots\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem in $\mathfrak{F}$. Wir setzen

$$w_j(x):=\begin{cases}2^{n-1} & (x\in D_j)\\ 0 & (x\notin D_j)\end{cases} \qquad (j=2^{n-1},\ldots,2^n-1;\ n=1,2,\ldots)$$

und

$$w(\cdot,f,f'):=\sum_{j=1}^{\infty}\langle f,e_j\rangle\langle e_j,f'\rangle w_j(\cdot) \qquad (f,f'\in\mathfrak{F}).$$

([5]) Die Existenz einer solchen Menge D_2 ist durch [4], (11.44) gesichert.

Aus

$$\int |w(x,f,f')|\,\iota(dx)\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}|\langle f,e_j\rangle||\langle e_j,f'\rangle|\int w_j(x)\,\iota(dx) \leqslant\iota(D)\|f\|_{\mathfrak{F}}\|f'\|_{\mathfrak{F}} \qquad (f,f'\in\mathfrak{F})$$

folgt $w(\cdot,f,f')\in\mathfrak{L}_1(\iota)$ und das Bestehen von (ii). Da offensichtlich auch (i), (iii) und (iv) erfüllt sind, gilt $w\in\mathfrak{P}(\mathfrak{F},\iota)$. Für jedes $x\in D$ gibt es aber eine Folge (j_n) von natürlichen Zahlen mit $2^{n-1}\leqslant j_n\leqslant 2^n-1$ $(n=1,2,\ldots)$, so daß $x\in D_{j_n}$, also $w(x,e_{j_n},e_{j_n})=w_{j_n}(x)=2^{n-1}\to\infty$ $(n\to\infty)$ gilt trotz $\|e_{j_n}\|_{\mathfrak{F}}=1$ $(n=1,2,\ldots)$. Folglich ist $w(x,f,f')$ für kein $x\in D$ in der Form $\langle f,W(x)f'\rangle$ mit einem Operator $W(x)\in\mathrm{BL}(\mathfrak{F})$ darstellbar.

Beispiel 2. ([6]) Sei Γ eine unendliche diskrete Gruppe und λ das gemäß $\lambda(G)=1$ normierte Haarsche Maß auf G. Ferner sei $\mathfrak{F}$ ein Hilbertraum mit $\dim\mathfrak{F}=\operatorname{card}\Gamma$ und $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ ein vollständiges Orthonormalsystem in $\mathfrak{F}$. Wir setzen

$$w(\cdot,f,f'):=\sum_{\gamma'\in\Gamma}\sum_{\gamma''\in\Gamma}\langle f,e_{\gamma'}\rangle\langle e_{\gamma''},f'\rangle(\gamma''^{-1}\gamma')(\cdot) \qquad (f,f'\in\mathfrak{F}).$$

Aus

$$\int|w(x,f,f')|\,\lambda(dx)=\int\Big|\sum_{\gamma'\in\Gamma}\langle f,e_{\gamma'}\rangle\gamma'(x)\Big|\Big|\sum_{\gamma''\in\Gamma}\langle f',e_{\gamma''}\rangle\gamma''(x)\Big|\,\lambda(dx)$$
$$\leqslant\Big(\int\Big|\sum_{\gamma'\in\Gamma}\langle f,e_{\gamma'}\rangle\gamma'(x)\Big|^2\lambda(dx)\int\Big|\sum_{\gamma''\in\Gamma}\langle f',e_{\gamma''}\rangle\gamma''(x)\Big|^2\lambda(dx)\Big)^{1/2}$$
$$=\Big(\sum_{\gamma'\in\Gamma}|\langle f,e_{\gamma'}\rangle|^2\sum_{\gamma''\in\Gamma}|\langle f',e_{\gamma''}\rangle|^2\Big)^{1/2}=\|f\|_{\mathfrak{F}}\|f'\|_{\mathfrak{F}} \quad (f,f'\in\mathfrak{F})$$

folgt $w(\cdot,f,f')\in\mathfrak{L}_1(\lambda)$ $(f,f'\in\mathfrak{F})$ und das Bestehen von (ii). Da offensichtlich auch (i), (iii) und (iv) erfüllt sind, gilt $w\in\mathfrak{p}(\mathfrak{F},\iota)$. Sei nun x ein beliebiges Element aus G. Ferner sei (Γ_n) eine Folge von Teilmengen von Γ mit $\operatorname{card}\Gamma_n=n$. Für $f_n:=n^{-1/2}\sum_{\gamma\in\Gamma_n}\overline{\gamma(x)}e_\gamma$ $(n=1,2,\ldots)$ gilt dann $\|f_n\|_{\mathfrak{F}}=1$ und $w(x,f_n,f_n)=n$ $(n=1,2,\ldots)$. Folglich ist $w(x,f,f')$ für kein $x\in G$ in der Form $\langle f,W(x)f'\rangle$ mit einem Operator $W(x)\in\mathrm{BL}(\mathfrak{F})$ darstellbar.

1.6. Es sei $w\in\mathfrak{p}(\mathfrak{F},\iota)$ und es bezeichne $\mathfrak{T}(G,\mathfrak{F})$ die Menge aller *trigonometrischen Polynome* auf G mit Werten in $\mathfrak{F}$, d.h. die Menge aller Funktionen der Form $\sum_{j\in\mathscr{J}}\gamma_j(\cdot)f_j$ $(\gamma_j\in\Gamma,f_j\in\mathfrak{F}\ (j\in\mathscr{J}))$, $\mathscr{J}$: endliche Indexmenge). Für $w\in\mathfrak{p}(\mathfrak{F},\iota)$ definieren wir auf $\mathfrak{T}(G,\mathfrak{F})$ ein semidefinites Skalar-

([6]) Für den Fall $\Gamma=Z$ wurde dieses Beispiel in [9], Chapitre II, Remarque 7, S. 373f. angegeben.

produkt $(\cdot,\cdot)_{\mathfrak{H}(w)}$ gemäß

(1.6.1) $$(h,h')_{\mathfrak{H}(w)} := \int \tilde{w}(x,h,h')\,\iota(dx)$$

$$\Big(\tilde{w}(\cdot,h,h') := \sum_{j\in\mathscr{J}}\sum_{j'\in\mathscr{J}'}(\gamma_{j'}^{-1}\gamma_j)(\cdot)\,w(\cdot,f_j,f_{j'}),\ h(\cdot) = \sum_{j\in\mathscr{J}}\gamma_j(\cdot)f_j,$$
$$h'(\cdot) = \sum_{j'\in\mathscr{J}'}\gamma_{j'}(\cdot)f_{j'} \quad (\gamma_j,\gamma_{j'}\in\Gamma, f_j, f_{j'}\in\mathfrak{F}\,(j\in\mathscr{J}, j'\in\mathscr{J}'))\Big).$$

Durch Quotientenraumbildung und Vervollständigung erhält man einen Hilbertraum $\mathfrak{H}(w)$. $U(w,\cdot)$ bezeichne diejenige (stark) stetige unitäre Darstellung von Γ über $\mathfrak{H}(w)$, für die

(1.6.2) $$U(w,\gamma)\sum_{j\in\mathscr{J}}\gamma_j(\cdot)f_j = \sum_{j\in\mathscr{J}}(\gamma^{-1}\gamma_j)(\cdot)f_j \quad (\gamma,\gamma_j\in\Gamma, f_j\in\mathfrak{F}\,(j\in\mathscr{J}))$$

gilt (Folgerung 1.1.); $\mu_{U(w)}[h,h']$ ($h,h'\in\mathfrak{H}(w)$) seien die gemäß Satz 1.4.1 zu $U(w,\cdot)$ gehörigen Maße aus $M(G)$, so daß also die Beziehung

(1.6.3) $$\big(U(w,\gamma)h,h'\big)_{\mathfrak{H}(w)} = \int\overline{\gamma(x)}\,\mu_{U(w)}[h,h'](dx) \qquad \big(\gamma\in\Gamma,\ h,h'\in\mathfrak{H}(w)\big)$$

besteht. Für $h,h'\in\mathfrak{T}(G,\mathfrak{F})$ erhält man aus (1.6.1), (1.6.2) und (1.6.3)

(1.6.4) $$\int\overline{\gamma(x)}\,\mu_{U(w)}[h,h'](dx) = \int\overline{\gamma(x)}\,\tilde{w}(x,h,h')\,\iota(dx) \qquad (\gamma\in\Gamma).$$

Auf Grund der Eindeutigkeitsaussage von Satz 1.4.1 ist also $\mu_{U(w)}[h,h]$ für $h\in\mathfrak{T}(G,\mathfrak{F})$ absolutstetig bezüglich ι. Nach Satz 1.4.2 folgt daraus die ι-Absolutstetigkeit von $\mu_{U(w)}[h,h]$ für alle $h\in\mathfrak{H}(w)$ und damit die von $\mu_{U(w)}[h,h']$ für alle $h,h'\in\mathfrak{H}(w)$. Es existieren also Funktionen $\tilde{w}(\cdot,h,h')\in\mathfrak{L}_1(\iota)$ ($h,h'\in\mathfrak{H}(w)$), so daß die folgenden Beziehungen bestehen (vgl. [4], (14.19)):

(i) $$\mathfrak{M}(\mu_{U(w)}[h,h']) = \{D\subseteq G \mid D\cap E(h,h')\in\mathfrak{M}(\iota)\},$$

(ii) $$\mu_{U(w)}[h,h'](D) = \int_{D\cap E(h,h')}\tilde{w}(x,h,h')\,\iota(dx)$$

$$\big(D\in\mathfrak{M}(\mu_{U(w)}[h,h']) = \mathfrak{M}(|\mu_{U(w)}[h,h']|)\big),$$

(iii) $$|\mu_{U(w)}[h,h']|(D) = \int_{D\cap E(h,h')}|\tilde{w}(x,h,h')|\,\iota(dx)$$

dabei ist $E(h,h') = \{x\in G\mid \tilde{w}(x,h,h')\neq 0\}$; ferner gilt (1.6.4) für beliebige $h,h'\in\mathfrak{H}(w)$ ([4], (14.17))(7), man hat also

(1.6.5) $$\big(U(w,\gamma)h,h'\big)_{\mathfrak{H}(w)} = \int\overline{\gamma(x)}\,\tilde{w}(x,h,h')\,\iota(dx) \qquad \big(\gamma\in\Gamma,\ h,h'\in\mathfrak{H}(w)\big).$$

(7) Offensichtlich erhält man für $h,h'\in\mathfrak{T}(G,\mathfrak{F})$ gerade die oben eingeführten Funktionen $\tilde{w}(\cdot,h,h')$.

2. Banachraumwertige stationäre Prozesse auf einer Gruppe. 1. Isomorphiesatz.

2.1. Unter einem *stationären Prozeß* auf Γ mit Werten in $\mathfrak{F}$ verstehen wir eine Abbildung X von Γ in $\mathrm{BL}(\mathfrak{F},\mathfrak{H})$ mit der Eigenschaft $X(\gamma)^*X(\gamma') = X(\mathbf{1})^*X(\gamma^{-1}\gamma')$ ($\gamma,\gamma'\in\Gamma$). Mit $\mathfrak{S}(\Gamma,\mathfrak{F})$ bzw. $\mathfrak{S}_0(\Gamma,\mathfrak{F})$ bezeichnen wir die Menge aller stationären bzw. die aller (stark) stetigen stationären Prozesse auf Γ mit Werten in $\mathfrak{F}$. Für $X\in\mathfrak{S}(\Gamma,\mathfrak{F})$ sei $\mathfrak{H}(X) := \bigvee_{\gamma\in\Gamma}\big(X(\gamma)\mathfrak{F}\big)$, $U(X,\cdot)$ sei die durch X induzierte unitäre Darstellung von Γ über $\mathfrak{H}(X)$ (d.h. $X(\gamma) = U(X,\gamma)X(\mathbf{1})$ ($\gamma\in\Gamma$), s. [10], Satz 1.3.1). Der Prozeß $X\in\mathfrak{S}(\Gamma,\mathfrak{F})$ gehört genau dann zu $\mathfrak{S}_0(\Gamma,\mathfrak{F})$, wenn $U(X,\cdot)$ (stark) stetig ist (s. [10], Satz 1.5.1); ist das der Fall, so sei $\mu_{U(X)}[h,h']$ ($h,h'\in\mathfrak{H}(X)$) das gemäß Satz 1.4.1 zu $\big(U(X,\cdot)h,h'\big)_{\mathfrak{H}}$ gehörige Maß aus $M(G)$. Mit $\mu_X[f,f'] := \mu_{U(X)}[X(\mathbf{1})f, X(\mathbf{1})f']$ ($f,f'\in\mathfrak{F}$) hat man dann

(2.1) $$\big(X(\gamma)f, X(\gamma')f'\big)_{\mathfrak{H}} = \int(\gamma^{-1}\gamma')(x)\,\mu_X[f,f'](dx) \qquad (\gamma,\gamma'\in\Gamma, f,f'\in\mathfrak{F}).$$

2.2. Der Beweis des folgenden Satzes stützt sich auf das

LEMMA 2.2. *Es seien $X\in\mathfrak{S}(\Gamma,\mathfrak{F})$ und $\mathfrak{H}^{(1)}$ und $\mathfrak{H}^{(2)}$ zwei abgeschlossene lineare Teilräume von $\mathfrak{H}(X)$ mit*

(2.2.1) $$\mathfrak{H}(X) = \mathfrak{H}^{(1)}\oplus\mathfrak{H}^{(2)}$$

und

(2.2.2) $$U(X,\gamma)\mathfrak{H}^{(i)} = \mathfrak{H}^{(i)} \qquad (\gamma\in\Gamma,\ i=1,2).$$

Dann werden durch(8)

$$X_i(\gamma) := P_iX(\gamma) \qquad (\gamma\in\Gamma,\ i=1,2)$$

zwei Prozesse X_1 und X_2 aus $\mathfrak{S}(\Gamma,\mathfrak{F})$ mit den folgenden Eigenschaften definiert:

(i) $$X(\gamma) = X_1(\gamma)+X_2(\gamma) \qquad (\gamma\in\Gamma),$$

(ii) $$\mathfrak{H}(X_i) = \mathfrak{H}^{(i)} \qquad (i=1,2),$$

(iii) $$U(X_i,\gamma) = U(X,\gamma)|\mathfrak{H}^{(i)} \qquad (\gamma\in\Gamma,\ i=1,2).$$

Beweis. Das Bestehen von (i) ist offensichtlich. Auf Grund von (2.2.2) gilt $U(X,\gamma)P_i = P_iU(X,\gamma)$ ($\gamma\in\Gamma$, $i=1,2$), also

$$U(X,\gamma)X_i(\mathbf{1}) = U(X,\gamma)P_iX(\mathbf{1}) = P_iU(X,\gamma)X(\mathbf{1}) = P_iX(\gamma) = X_i(\gamma) \qquad (\gamma\in\Gamma,\ i=1,2).$$

(8) P_i: Operator der orthogonalen Projektion von $\mathfrak{H}(X)$ auf $\mathfrak{H}^{(i)}$ ($i=1,2$).

Folglich sind X_i $(i = 1, 2)$ Prozesse aus $\mathfrak{S}(\Gamma, \mathfrak{F})$, und es gilt

$$(2.2.3)\qquad U(X_i, \gamma) = U(X, \gamma)|\mathfrak{H}(X_i) \quad (\gamma \in \Gamma,\ i = 1, 2)$$

(s. [10], Satz 1.3.2). Aus

$$\mathfrak{H}(X_i) = \bigvee_{\gamma\in\Gamma} (X_i(\gamma)\mathfrak{F}) = \bigvee_{\gamma\in\Gamma} (P_i X(\gamma)\mathfrak{F}) = \overline{P_i \bigvee_{\gamma\in\Gamma} (X(\gamma)\mathfrak{F})} = \overline{P_i\mathfrak{H}(X)} = \mathfrak{H}^{(i)} \quad (i = 1, 2)$$

folgt die Richtigkeit von (ii). Aus (ii) und (2.2.3) erhält man schließlich (iii).

SATZ 2.2. *Jeder Prozeß $X \in \mathfrak{S}_0(\Gamma, \mathfrak{F})$ gestattet genau eine Zerlegung der Form*

$$(2.2.4)\qquad X(\gamma) = X_1(\gamma) + X_2(\gamma) \quad (\gamma \in \Gamma),$$

wobei X_i $(i = 1, 2)$ Prozesse aus $\mathfrak{S}_0(\Gamma, \mathfrak{F})$ mit folgenden Eigenschaften sind:

(i) $$\mathfrak{H}(X) = \mathfrak{H}(X_1) \oplus \mathfrak{H}(X_2)$$

(ii) *$\mu_{X_1}[f, f']$ bzw. $\mu_{X_2}[f, f']$ ist der ι-absolutstetige bzw. der ι-singuläre Anteil von $\mu_X[f, f']$ $(f, f' \in \mathfrak{F})$.*

Beweis. Sei

$$\mathfrak{H}^{(1)} := \{h \in \mathfrak{H}(X) \mid \mu_{U(X)}[h, h] \text{ ist absolutstetig bezüglich } \iota\},$$
$$\mathfrak{H}^{(2)} := \{h \in \mathfrak{H}(X) \mid \mu_{U(X)}[h, h] \text{ ist singulär bezüglich } \iota\}.$$

Auf Grund von Satz 1.4.2 sind $\mathfrak{H}^{(1)}$ und $\mathfrak{H}^{(2)}$ abgeschlossene lineare Teilräume von $\mathfrak{H}(X)$, welche den Voraussetzungen von Lemma 2.2 genügen. Definiert man nun die Prozesse $X_1, X_2 \in \mathfrak{S}(\Gamma, \mathfrak{F})$ wie in Lemma 2.2., so ist offensichtlich (2.2.4) und (i) erfüllt. Aus (iii) von Lemma 2.2 folgt $\mu_{U(X_i)}[h, h] = \mu_{U(X)}[h, h]$ $(h \in \mathfrak{H}^{(i)},\ i = 1, 2)$, also $\mu_{X_i}[f, f] = \mu_{U(X)}[P_i X(\mathbf{1})f, P_i X(\mathbf{1})f]$ $(f \in \mathfrak{F},\ i = 1, 2)$. Folglich ist $\mu_{X_i}[f, f]$ $(f \in \mathfrak{F})$ für $i = 1$ absolutstetig und für $i = 2$ singulär bezüglich ι. Daraus und aus (i) schließt man leicht auf die Richtigkeit von (ii).

Sei nun $X(\gamma) = X_1'(\gamma) + X_2'(\gamma)$ $(\gamma \in \Gamma)$ irgendeine Zerlegung von X mit den im Satz angegebenen Eigenschaften. Dann sind die Prozesse X_i' und X wegen (i) stationär verbunden $(i = 1, 2)$. Deshalb und wegen (i) gilt gemäß [15], Hilfssatz 1.1 $U(X_i', \gamma) = U(X, \gamma)|\mathfrak{H}(X_i')$ $(\gamma \in \Gamma,\ i = 1, 2)$, also $\mu_{U(X_i')}[h, h] = \mu_{U(X)}[h, h]$ $(h \in \mathfrak{H}(X_i'),\ i = 1, 2)$. Folglich ist $\mu_{X_i'}[f, f] = \mu_{U(X)}[X_i'(\mathbf{1})f, X_i'(\mathbf{1})f]$ $(f \in \mathfrak{F},\ i = 1, 2)$. Daraus und aus (ii) folgt $X_i'(\mathbf{1})\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}^{(i)}$, also $\mathfrak{H}(X_i') \subseteq \mathfrak{H}^{(i)}$ $(i = 1, 2)$. Somit erhält man $X_i'(\gamma) = P_i X_i'(\gamma) = P_i(X_1'(\gamma) + X_2'(\gamma)) = P_i X(\gamma) = X_i(\gamma)$ $(\gamma \in \Gamma,\ i = 1, 2)$. Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

2.3. Es sei X ein Prozeß aus $\mathfrak{S}_0(\Gamma, \mathfrak{F})$, für den $\mu_X[f, f']$ $(f, f' \in \mathfrak{F})$ ι-absolutstetig ist(9). Bezeichnet dann $w_X^{(\iota)}(\cdot, f, f')$ die Radon–Nikodym-Ableitung von $\mu_X[f, f']$ $(f, f' \in \mathfrak{F})$ bezüglich ι, so gehört $w_X^{(\iota)}$ offensichtlich zu $\mathrm{p}(\mathfrak{F}, \iota)$. Umgekehrt gibt es zu jedem $w \in \mathrm{p}(\mathfrak{F}, \iota)$ einen Prozeß $X \in \mathfrak{S}_0(\Gamma, \mathfrak{F})$, für den $\mu_X[f, f']$ $(f, f' \in \mathfrak{F})$ ι-absolutstetig ist und $w_X^{(\iota)} = w$ gilt, für den also die Beziehung

$$(2.3.1)\qquad (X(\gamma)f, X(\gamma')f')_{\mathfrak{H}} = \int (\gamma^{-1}\gamma')(x) w(x, f, f')\iota(dx) \quad (\gamma, \gamma' \in \Gamma,\ f, f' \in \mathfrak{F})$$

besteht. (Sei $\gamma \in \Gamma$. Durch

$$\mathfrak{F} \times \mathfrak{F} \ni (f, f') \to \int \gamma(x) w(x, f, f')\iota(dx)$$

wird offensichtlich ein beschränktes bilineares Funktional definiert. Folglich gibt es einen Operator $B(\gamma) \in \mathrm{BL}(\mathfrak{F}, \mathfrak{F}^*)$, so daß $\langle f, B(\gamma)f'\rangle = \int \gamma(x) w(x, f, f')\iota(dx)$ $(f, f' \in \mathfrak{F})$ gilt. Für jede natürliche Zahl N, für beliebige $\gamma_1, \ldots, \gamma_N \in \Gamma$ und beliebige $f_1, \ldots, f_N \in \mathfrak{F}$ hat man

$$(2.3.2)\qquad \sum_{i,j=1}^{N} \langle f_i, B(\gamma_i^{-1}\gamma_j)f_j\rangle = \int \sum_{i,j=1}^{N} (\gamma_i^{-1}\gamma_j)(x) w(x, f_i, f_j)\,\iota(dx).$$

Nun ist die Matrix $(w(x, f_i, f_j))_{i,j=1}^{N}$ für ι-fast alle x nichtnegativ definit. Außerdem ist die Matrix $((\gamma_i^{-1}\gamma_j)(x))_{i,j=1}^{N}$ für jedes x nichtnegativ definit. Somit erweist sich die Matrix $((\gamma_i^{-1}\gamma_j)(x) w(x, f_i, f_j))_{i,j=1}^{N}$ für ι-fast alle x als nichtnegativ definit (s.z.B. [4], Appendix D. 12). Daraus und aus (2.3.2) folgt (vgl. [14], Satz 2.1.2), daß durch $K(\gamma, \gamma') := B(\gamma^{-1}\gamma')$ $(\gamma, \gamma' \in \Gamma)$ eine nichtnegativ definite Funktion $K(\cdot, \cdot)$: $\Gamma \times \Gamma \to \mathrm{BL}(\mathfrak{F}, \mathfrak{F}^*)$ definiert wird. Anwendung von [14], Satz 2.2 (oder [10], Satz 1.2) liefert die Existenz eines Prozesses $X \in \mathfrak{S}(\Gamma, \mathfrak{F})$ mit $X(\gamma)^* X(\gamma') = B(\gamma^{-1}\gamma')$ $(\gamma, \gamma' \in \Gamma)$, also die Gültigkeit von (2.3.1)).

2.4. Es seien X und $w_X^{(\iota)}$ wie in 2.3 Gemäß 1.6 kann man zu $w_X^{(\iota)}$ einen Hilbertraum $\mathfrak{H}(w_X^{(\iota)})$ einführen. Auf Grund von Folgerung 1.1 läßt sich die durch

$$V_0(X, \iota)X(\gamma)f := \overline{\gamma(\cdot)}f \quad (\gamma \in \Gamma,\ f \in \mathfrak{F})$$

definierte isometrische Abbildung $V_0(X, \iota)$ von $\mathfrak{H}_0(X) := \{X(\gamma)f \mid \gamma \in \Gamma,\ f \in \mathfrak{F}\}$ in $\mathfrak{H}(w_X^{(\iota)})$ in eindeutiger Weise zu einem isometrischen Operator $V(X, \iota) \in \mathrm{BL}(\mathfrak{H}(X), \mathfrak{H}(w_X^{(\iota)}))$ fortsetzen; dabei gilt $V(X, \iota)\mathfrak{H}(X) = \mathfrak{H}(w_X^{(\iota)})$.

(9) Wie in [5], Remark 1 gezeigt wurde, kann man für jeden Prozeß X, für den $\overline{X(\mathbf{1})\mathfrak{F}}$ separabel ist, ein $\iota \in M^+(G)$ mit dieser Eigenschaft finden. (In [5] wird der Fall $\Gamma = \mathbf{Z}$ betrachtet, die durchgeführten Überlegungen lassen sich jedoch auch auf die hier vorliegende allgemeinere Parametermenge übertragen.)

Satz 2.4 (1. Isomorphiesatz). *Der Operator $V(X, \iota)$ vermittelt einen Isomorphismus zwischen den Räumen $\mathfrak{H}(X)$ und $\mathfrak{H}(w_X^{(\iota)})$. Dabei gilt*

$$V(X, \iota)\, U(X, \gamma) = U(w_X^{(\iota)}, \gamma)\, V(X, \iota) \qquad (\gamma \in \Gamma), \tag{2.4.1}$$

$$\mu_X[f, f'] = \mu_{U(w_X^{(\iota)})}[\mathbf{1}(\cdot) f, \mathbf{1}(\cdot) f'] \qquad (f, f' \in \mathfrak{F}). \tag{2.4.2}$$

Beweis. Die erste Aussage des Satzes ergibt sich unmittelbar aus der vorangehenden Überlegung. (2.4.1) bzw. (2.4.2) erhält man aus

$$\begin{aligned} V(X, \iota)\, U(X, \gamma) X(\gamma') f' &= V(X, \iota) X(\gamma\gamma') f' = \overline{(\gamma\gamma')(\cdot)} f' \\ &= U(w_X^{(\iota)}, \gamma)\big(\overline{\gamma'(\cdot)} f'\big) = U(w_X^{(\iota)}, \gamma)\, V(X, \iota) X(\gamma') f' \\ &\qquad\qquad (\gamma, \gamma' \in \Gamma,\ f' \in \mathfrak{F}) \end{aligned}$$

bzw. aus

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_X[f, f'](\gamma) &= \big(U(X, \gamma) X(\mathbf{1}) f, X(\mathbf{1}) f'\big)_{\mathfrak{H}(X)} \\ &= \big(U(w_X^{(\iota)}, \gamma) \mathbf{1}(\cdot) f, \mathbf{1}(\cdot) f'\big)_{\mathfrak{H}(w_X^{(\iota)})} \\ &= \hat{\mu}_{U(w_X^{(\iota)})}[\mathbf{1}(\cdot) f, \mathbf{1}(\cdot) f'](\gamma) \qquad (\gamma \in \Gamma,\ f, f' \in \mathfrak{F}) \end{aligned}$$

und der Eineindeutigkeitsaussage von Satz 1.3.

3. Ein Darstellungssatz für Abbildungen aus $\mathfrak{p}(\mathfrak{F}, \iota)$. 2. Isomorphiesatz.

3.1. Es sei nun $\mathfrak{K}$ ein (komplexer) Hilbertraum. Mit $\mathfrak{L}_2(\mathfrak{K}, G, \iota) =: \mathfrak{L}_2(\mathfrak{K}, \iota)$ bezeichnen wir den Hilbertraum (mit den üblichen linearen Operationen und dem üblichen Skalarprodukt) aller (stark) ι-meßbaren Funktionen $\boldsymbol{v}$: $G \to \mathfrak{K}$, für die $\|\boldsymbol{v}(\cdot)\|_{\mathfrak{K}}^2$ ι-integrierbar ist.

Für jeden Operator $A \in \mathrm{BL}\big(\mathfrak{F}, \mathfrak{L}_2(\mathfrak{K}, \iota)\big)$ gehört die durch

$$w(\cdot, f, f') := \big((Af)(\cdot), (Af')(\cdot)\big)_{\mathfrak{K}} \qquad (f, f' \in \mathfrak{F}) \tag{3.1}$$

definierte Abbildung w zu $\mathfrak{p}(\mathfrak{F}, \iota)$. Wir zeigen nun, daß *jedes* $w \in \mathfrak{p}(\mathfrak{F}, \iota)$ in dieser Weise darstellbar ist.

Satz 3.1. *Zu jedem $w \in \mathfrak{p}(\mathfrak{F}, \iota)$ gibt es einen (komplexen) Hilbertraum $\mathfrak{K}$ und einen Operator $A \in \mathrm{BL}\big(\mathfrak{F}, \mathfrak{L}_2(\mathfrak{K}, \iota)\big)$, so daß die Beziehung (3.1) besteht.*

Beweis. Es bezeichne $\mathfrak{H}(w)$ den in 1.6 eingeführten Hilbertraum. Nach Lemma 1.2 gibt es gewisse Elemente $h_\beta \in \mathfrak{H}(w)$ $(\beta \in B)$, so daß $\mathfrak{H}(w) = \bigoplus_{\beta \in B} \mathfrak{H}\big(U(w), h_\beta\big)$ mit $\mathfrak{H}\big(U(w), h_\beta\big) := \bigvee_{\gamma \in \Gamma} \{U(w, \gamma) h_\beta\}$ $(\beta \in B)$ gilt. Seien $a_\beta \in \mathfrak{L}_2(\iota)$ $(\beta \in B)$ mit $|a_\beta(\cdot)|^2 = \tilde{w}(\cdot, h_\beta, h_\beta)$ $(\beta \in B)$. Ferner sei $\mathfrak{K}$ ein (komplexer) Hilbertraum mit $\dim \mathfrak{K} = \operatorname{card} B$ und $(e_\beta)_{\beta \in B}$ ein vollständiges Orthonormalsystem in $\mathfrak{K}$. Auf Grund von Folgerung 1.1 läßt sich die durch

$$W_0\, U(w, \gamma) h_\beta := \overline{\gamma(\cdot)}\, a_\beta(\cdot) e_\beta \qquad (\gamma \in \Gamma,\ \beta \in B)$$

definierte isometrische Abbildung W_0 von $\mathfrak{H}_0(w) := \{U(w, \gamma) h_\beta \mid \gamma \in \Gamma, \beta \in B\}$ $(\subseteq \mathfrak{H}(w))$ in $\mathfrak{L}_2(\mathfrak{K}, \iota)$ in eindeutiger Weise zu einem isometrischen Operator $W \in \mathrm{BL}\big(\mathfrak{H}(w), \mathfrak{L}_2(\mathfrak{K}, \iota)\big)$ fortsetzen, dabei gilt $W U(w, \gamma) = \overline{\gamma(\cdot)} W$ $(\gamma \in \Gamma)$. Wir setzen $Af := W(\mathbf{1}(\cdot) f)$. Dann ist A ein Operator aus $\mathrm{BL}\big(\mathfrak{F}, \mathfrak{L}_2(\mathfrak{K}, \iota)\big)$ mit der Eigenschaft $\big((\cdot, \cdot) := (\cdot, \cdot)_{\mathfrak{L}_2(\mathfrak{K}, \iota)}\big)$

$$\begin{aligned} \int \overline{\gamma(x)}\, w(x, f, f')\, \iota(dx) &= \int \overline{\gamma(x)}\, \tilde{w}\big(x, \mathbf{1}(\cdot) f, \mathbf{1}(\cdot) f'\big)\, \iota(dx) \\ &= \big(U(w, \gamma)(\mathbf{1}(\cdot) f), \mathbf{1}(\cdot) f'\big)_{\mathfrak{H}(w)} \\ &= \big(W U(w, \gamma)(\mathbf{1}(\cdot) f), W(\mathbf{1}(\cdot) f')\big) \\ &= \big(\overline{\gamma(\cdot)} W(\mathbf{1}(\cdot) f), W(\mathbf{1}(\cdot) f')\big) = \big(\overline{\gamma(\cdot)} Af, Af'\big) \\ &= \int \overline{\gamma(x)}\, \big((Af)(x), (Af')(x)\big)_{\mathfrak{K}}\, \iota(dx) \\ &\qquad\qquad (\gamma \in \Gamma,\ f, f' \in \mathfrak{F}). \end{aligned}$$

Daraus folgt die Gültigkeit der Beziehung (3.1) auf Grund der Eineindeutigkeitsaussage von Satz 1.4.1.

3.2. Das folgende Ergebnis wurde für den Spezialfall $\Gamma = \mathbf{Z}$ und ι = Lebesgue-Maß auf $[-\pi, +\pi]$ in [8], Lemma 3.1 erhalten.

Folgerung 3.2. *Es sei $\mathfrak{F}$ separabel und $W \in \mathfrak{P}(\mathfrak{F}, \iota)$. Dann existieren ein (komplexer) Hilbertraum $\mathfrak{K}$ und eine (stark) ι-meßbare Funktion $Q(\cdot)$ auf G mit Werten in $\mathrm{BL}(\mathfrak{F}, \mathfrak{K})$, so daß $W(\cdot) = Q(\cdot)^* Q(\cdot)$ gilt.*

Beweis. Wendet man auf das durch $w(\cdot, f, f') := \langle f, W(\cdot) f' \rangle$ $(f, f' \in \mathfrak{F})$ definierte $w \in \mathfrak{p}(\mathfrak{F}, \iota)$ die Aussage des Satzes 3.1 an, so schließt man auf die Existenz eines (komplexen) Hilbertraumes $\mathfrak{K}$ und eines Operators $A \in \mathrm{BL}\big(\mathfrak{F}, \mathfrak{L}_2(\mathfrak{K}, \iota)\big)$, so daß $\langle f, W(\cdot) f' \rangle = \big((Af)(\cdot), (Af')(\cdot)\big)_{\mathfrak{K}}$ $(f, f' \in \mathfrak{F})$ gilt. Es sei nun $\mathfrak{F}_0 = \{f_j\}_{j=1}^M$ $(M \leqslant \infty)$ eine in $\mathfrak{F}$ totale Menge. Ferner sei

$$D_{jk} := \{x \in G \mid \langle f_j, W(x) f_k \rangle \neq \big((Af_j)(x), (Af_k)(x)\big)_{\mathfrak{K}}\} \qquad (j, k = 1, \ldots, M)^{(10)}.$$

Außerhalb der ι-Nullmenge $D := \bigcup_{j=1}^M \bigcup_{k=1}^M D_{jk}$ setzen wir $Q_0(x) f_j := (Af_j)(x)$ $(j = 1, \ldots, M)$. Für jede natürliche Zahl N $(\leqslant M)$ und für beliebige $a_1, \ldots, a_N \in \mathbf{C}$ gilt dann

$$\begin{aligned} \Big\| \sum_{k=1}^N a_k Q_0(x) f_k \Big\|_{\mathfrak{K}}^2 &= \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N a_j \bar{a}_k \big((Af_j)(x), (Af_k)(x)\big)_{\mathfrak{K}} = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N a_j \bar{a}_k \langle f_j, W(x) f_k \rangle \\ &= \Big\langle \sum_{j=1}^N a_j f_j, W(x) \Big(\sum_{k=1}^N a_k f_k\Big) \Big\rangle \leqslant \|W(x)\|_{\mathrm{BL}(\mathfrak{F}, \mathfrak{F}^*)} \Big\| \sum_{j=1}^N a_j f_j \Big\|_{\mathfrak{F}}^2. \end{aligned}$$

(10) Für Af_j wird hierbei ein fester Repräsentant aus der jeweiligen Äquivalenzklasse in $\mathfrak{L}_2(\mathfrak{K}, \iota)$ gewählt.

Gemäß Lemma 1.1 läßt sich $Q_0(x)$ in eindeutiger Weise zu einem Operator $Q(x)\in \mathrm{BL}(\mathfrak{F},\mathfrak{K})$ fortsetzen. Für $x\in D$ setzen wir $Q(x)=0$. Damit ist eine (stark) meßbare Funktion $Q(\cdot)$ auf G mit Werten in $\mathrm{BL}(\mathfrak{F},\mathfrak{K})$ definiert, die für $x\in G\setminus D$ und jedes Paar $\sum \alpha_j f_j$ und $\sum\beta_k f_k$ von endlichen Linearkombinationen der Vektoren f_j $(j=1,\dots,M)$ der Beziehung

$$\left\langle \sum \alpha_j f_j,\, Q(x)^*Q(x)\sum \beta_k f_k\right\rangle = \left\langle \sum \alpha_j f_j,\, W(x)\sum\beta_k f_k\right\rangle$$

genügt. Aus Stetigkeitsgründen folgt daraus $Q(x)^*Q(x)=W(x)$ $(x\in G\setminus D)$.

Bemerkung. Ein Lemma von Vakhanija und Chobanyan (s. [16], Lemma 2 und [2], Lemma S. 21f, vgl. auch [3], Lemma 2.4 und [17], Lemma in 4.3.2 (S. 135f)) besagt, daß jeder Operator $W\in\mathrm{BL}(\mathfrak{F},\mathfrak{F}^*)$ mit der Eigenschaft $\langle f, Wf\rangle\geqslant 0$ $(f\in\mathfrak{F})$ eine Darstellung in der Form $W=Q^*Q$ zuläßt, wobei Q ein Operator aus $\mathrm{BL}(\mathfrak{F},\mathfrak{K})$ ($\mathfrak{K}$: Hilbertraum) ist. Offensichtlich ist die Aussage dieses Lemmas als Spezialfall in unserem Satz 3.1 enthalten ($G=\{e\}$, $\iota(\{e\})=1$, $w(e,f,f'):=\langle f, Wf'\rangle$, $(f,f'\in\mathfrak{F})$, dann ist $w\in\mathfrak{p}(\mathfrak{F},\iota)$. Man setze $Qf:=(Af)(e)$ $(f\in\mathfrak{F})$ mit A aus Satz 3.1). Andererseits erhält man nach dem genannten Lemma für $W\in\mathfrak{P}(\mathfrak{F},\iota)$ für jedes $x\in G$ eine Darstellung der Form $W(x)=Q(x)^*Q(x)$ mit $Q(x)\in\mathrm{BL}(\mathfrak{F},\mathfrak{K}(x))$ ($\mathfrak{K}(x)$: Hilbertraum, i.a. abhängig von x). Die eben bewiesene Folgerung 3.2 zeigt, daß unter Voraussetzung der Separabilität von $\mathfrak{F}$ der Hilbertraum $\mathfrak{K}(x)$ unabhängig von x und $Q(\cdot)$ als (stark) ι-meßbare Funktion gewählt werden können.

3.3. Es seien X und $w_X^{(\iota)}$ wie in 2.3. Nach Satz 3.1 gibt es einen (komplexen) Hilbertraum $\mathfrak{K}$ und einen Operator $A\in\mathrm{BL}(\mathfrak{F},\mathfrak{L}_2(\mathfrak{K},\iota))$, so daß

$$w_X^{(\iota)}(\cdot,f,f')=\big((Af)(\cdot),(Af')(\cdot)\big)_{\mathfrak{K}}\qquad (f,f'\in\mathfrak{F})$$

gilt. Auf Grund von Folgerung 1.1 läßt sich die durch

$$V_0(X,A)X(\gamma)f:=\overline{\gamma(\cdot)}Af\qquad(\gamma\in\Gamma,\ f\in\mathfrak{F})$$

definierte isometrische Abbildung $V_0(X,A)$ von $\mathfrak{H}_0(X):=\{X(\gamma)f\mid \gamma\in\Gamma, f\in\mathfrak{F}\}$ in $\mathfrak{L}_2(\mathfrak{K},\iota)$ in eindeutiger Weise zu einem isometrischen Operator $V(X,A)\in\mathrm{BL}\big(\mathfrak{H}(X),\mathfrak{L}_2(\mathfrak{K},\iota)\big)$ fortsetzen. Es bezeichne $\mathfrak{H}(A)$ den Finalbereich $V(X,A)\mathfrak{H}(X)$ des Operators $V(X,A)$ (d.h., $\mathfrak{H}(A)$ ist die abgeschlossene lineare Hülle von $\{\overline{\gamma(\cdot)}Af\mid\gamma\in\Gamma,\ f\in\mathfrak{F}\}$ in $\mathfrak{L}_2(\mathfrak{K},\iota)$) und $U(\mathfrak{K},\iota,\gamma)$ den Operator der Multiplikation mit $\overline{\gamma(\cdot)}$ in $\mathfrak{L}_2(\mathfrak{K},\iota)$; $U(A,\gamma):=U(\mathfrak{K},\iota,\gamma)|\mathfrak{H}(A)$ $(\gamma\in\Gamma)$; $\mu_{U(A)}[h,h']$ $(h,h'\in\mathfrak{H}(A))$ seien die gemäß Satz 1.4.1 zu $U(A,\cdot)$ gehörigen Maße aus $M(G)$, so daß also die Beziehung

$$(U(A,\gamma)h,h')_{\mathfrak{H}(A)}=\int\overline{\gamma(x)}\,\mu_{U(A)}[h,h'](dx)\qquad(\gamma\in\Gamma,\ h,h'\in\mathfrak{H}(A))$$

besteht.

Satz 3.3 (2. Isomorphiesatz). *Der Operator $V(X,A)$ vermittelt einen Isomorphismus zwischen den Räumen $\mathfrak{H}(X)$ und $\mathfrak{H}(A)$. Dabei gilt*

$$V(X,A)U(X,\gamma)=U(A,\gamma)V(X,A)\qquad(\gamma\in\Gamma),\tag{3.3.1}$$

$$\mu_X[f,f']=\mu_{U(A)}[Af,Af']\qquad(f,f'\in\mathfrak{F}).\tag{3.3.2}$$

Beweis. Die erste Aussage des Satzes ergibt sich unmittelbar aus der vorangehenden Überlegung. (3.3.1) bzw. (3.3.2) erhält man aus

$$\begin{aligned}V(X,A)U(X,\gamma)X(\gamma')f' &= V(X,A)X(\gamma\gamma')f' = \overline{(\gamma\gamma')(\cdot)}Af'\\ &= U(A,\gamma)\big(\overline{\gamma'(\cdot)}Af'\big)\\ &= U(A,\gamma)V(X,A)X(\gamma')f'\qquad(\gamma,\gamma'\in\Gamma,\ f'\in\mathfrak{F})\end{aligned}$$

bzw. aus

$$\begin{aligned}\hat\mu_X[f,f'](\gamma) &= \big(U(X,\gamma)X(1)f,\,X(1)f'\big)_{\mathfrak{H}(X)}\\ &= \big(U(A,\gamma)Af,\,Af'\big)_{\mathfrak{H}(A)} = \hat\mu_{U(A)}[Af,Af'](\gamma)\\ &\qquad(\gamma\in\Gamma,\ f,f'\in\mathfrak{F})\end{aligned}$$

und der Eineindeutigkeitsaussage von Satz 1.3.

4. Darstellung von banachraumwertigen stationären Prozessen durch gleitende Mittel.

4.1. Es sei nun λ das Haarsche Maß auf G und $\varkappa$ das Haarsche Maß auf Γ (Normierung gemäß [4] § 31). Für $v\in\mathfrak{L}_2(\lambda)$ bezeichne $\hat v$ die $\mathfrak{L}_2$-Fouriertransformierte von v, also

$$\hat v(\gamma)=\int_G\overline{\gamma(x)}v(x)\gamma(dx)\qquad(\gamma\in\Gamma)$$

für $v\in\mathfrak{L}_2(\lambda)\cap\mathfrak{L}_1(\lambda)$ ([4], (23.9) und (31.16)). Entsprechend bezeichne $\check w$ für $w\in\mathfrak{L}_2(\varkappa)$ die inverse $\mathfrak{L}_2$-Fouriertransformierte von w, also

$$\check w(g)=\int_\Gamma\xi(g)w(\xi)\varkappa(d\xi)\qquad(g\in G)$$

für $w\in\mathfrak{L}_2(\varkappa)\cap\mathfrak{L}_1(\varkappa)$ ([4], (31.2) und (31.16)). Gemäß [4] (31.17) und (31.18) ist $v\to\hat v$ bzw. $w\to\check w$ eine isometrische Abbildung von $\mathfrak{L}_2(\lambda)$ auf $\mathfrak{L}_2(\varkappa)$ bzw. von $\mathfrak{L}_2(\varkappa)$ auf $\mathfrak{L}_2(\lambda)$; dabei gilt $(\hat v)\check{}=v$ $(v\in\mathfrak{L}_2(\lambda))$ und $(\check w)\hat{}=w$ $(w\in\mathfrak{L}_2(\varkappa))$. Da für einen (komplexen) Hilbertraum $\mathfrak{K}$ die Funktionen der Form $\boldsymbol{v}(\cdot)=v(\cdot)k$ $(v\in\mathfrak{L}_2(\lambda),\ k\in\mathfrak{K})$ bzw. $\boldsymbol{w}(\cdot)=w(\cdot)k$ $(w\in\mathfrak{L}_2(\varkappa),\ k\in\mathfrak{K})$ in $\mathfrak{L}_2(\mathfrak{K},\lambda)$ bzw. in $\mathfrak{L}_2(\mathfrak{K},\varkappa)$ total sind ([11]), lassen sich die $\mathfrak{L}_2$-Fouriertransformierte bzw. die inverse $\mathfrak{L}_2$-Fouriertransformierte in natürlicher Weise auf Funktionen aus $\mathfrak{L}_2(\mathfrak{K},\lambda)$ bzw. $\mathfrak{L}_2(\mathfrak{K},\varkappa)$ übertragen. Weiter setzen

---

([11]) Dies folgt beispielsweise aus [11], Hilfssatz 1.1.1.

wir für $A \in \mathrm{BL}(\mathfrak{F}, \mathfrak{L}_2(\mathfrak{K}, \lambda))$ bzw. $B \in \mathrm{BL}(\mathfrak{F}, \mathfrak{L}_2(\mathfrak{K}, \varkappa))$

$$\hat{Af} := (Af)^{\wedge} \text{ bzw. } \check{Bf} := (Bf)^{\vee} \quad (f \in \mathfrak{F}).$$

4.2. Es sei nun Y ein $\varkappa$-quasi-isometrisches Maß mit Werten in $\mathrm{BL}(\mathfrak{K}, \mathfrak{H})$ ([7], Definition 8.2)(¹²), d.h. eine Abbildung des δ-Rings $\mathscr{J}_\varkappa$ aller $\varkappa$-integrierbaren Teilmengen von Γ (d.h. aller $\varkappa$-meßbaren Teilmengen $\Delta \subseteq \Gamma$ mit $\varkappa(\Delta) < \infty$) in den Raum $\mathrm{BL}(\mathfrak{K}, \mathfrak{H})$ mit der Eigenschaft

$$\big(Y(\Delta)k, Y(\Delta')k'\big)_{\mathfrak{H}} = \varkappa(\Delta \cap \Delta')(k, k')_{\mathfrak{K}} \quad (\Delta, \Delta' \in \mathscr{J}_\varkappa, k, k' \in \mathfrak{K}).$$

Für ein solches Maß Y sei $\mathfrak{H}(Y) := \bigvee_{\Delta \in \mathscr{J}_\varkappa} \big(Y(\Delta)\mathfrak{K}\big)$.

Man kann dann ([7], Abschnitte 8 und 10) Integrale von Funktionen aus $\mathfrak{L}_2(\mathfrak{K}, \varkappa)$ bezüglich Y einführen, so daß $\boldsymbol{w} \to \int_\Gamma Y(d\xi)\boldsymbol{w}(\xi)$ eine isometrische Abbildung von $\mathfrak{L}_2(\mathfrak{K}, \varkappa)$ auf $\mathfrak{H}(Y)$ wird.

Für $B \in \mathrm{BL}(\mathfrak{F}, \mathfrak{L}_2(\mathfrak{K}, \varkappa))$ wird durch die *gleitenden Mittel*

$$X(\gamma)f := \int_\Gamma Y(d\xi)(Bf)(\xi^{-1}\gamma) \quad (\gamma \in \Gamma,\ f \in \mathfrak{F}) \tag{4.2}$$

ein Prozeß $X \in \mathfrak{S}_0(\Gamma, \mathfrak{F})$ definiert; dabei gilt $\mathfrak{H}(X) \subseteq \mathfrak{H}(Y)$ (s. [12], Satz 2.3.1 und Hilfssatz 2.3).

Wir beweisen nun den

Satz 4.2. *Der Prozeß $X \in \mathfrak{S}_0(\Gamma, \mathfrak{F})$ ist genau dann durch gleitende Mittel darstellbar, wenn $\mu_X[f, f']$ $(f, f' \in \mathfrak{F})$ λ-absolutstetig ist.*

Beweis. Aus der Darstellbarkeit des Prozesses X in Form gleitender Mittel folgt die λ-Absolutstetigkeit von $\mu_X[f, f']$ $(f, f' \in \mathfrak{F})$ (s. [12], Folgerung 2.3.1). Umgekehrt folgt aus der λ-Absolutstetigkeit von $\mu_X[f, f']$ $(f, f' \in \mathfrak{F})$ gemäß Satz 3.1 die Existenz eines Hilbertraumes $\mathfrak{K}$ und eines Operators $A \in \mathrm{BL}(\mathfrak{F}, \mathfrak{L}_2(\mathfrak{K}, \lambda))$, so daß die Radon–Nikodym-Ableitung $w_X^{(\lambda)}(\cdot, f, f')$ von $\mu_X[f, f']$ bezüglich λ in der Form

$$w_X^{(\lambda)}(\cdot, f, f') = \big((Af)(\cdot), (Af')(\cdot)\big)_{\mathfrak{K}} \quad (f, f' \in \mathfrak{F})$$

darstellbar ist. Man hat also

$$\big(X(\gamma)f, X(\gamma')f'\big)_{\mathfrak{K}} = \int (\gamma^{-1}\gamma')(x)\big((Af)(x), (Af')(x)\big)_{\mathfrak{K}}\lambda(dx)$$
$$(\gamma, \gamma' \in \Gamma,\ f, f' \in \mathfrak{F}).$$

(¹²) In [7] werden allgemeiner Maße mit Werten in $\mathrm{BL}(\mathfrak{K}, \mathfrak{H})$ mit der Eigenschaft $\big(Y(\Delta)k, Y(\Delta')k'\big)_{\mathfrak{H}} = \big(k, M(\Delta \cap \Delta')k'\big)_{\mathfrak{K}}$ $(\Delta, \Delta' \in \mathscr{J}_M, k, k' \in \mathfrak{K})$ betrachtet, wobei M ein nichtnegatives $\mathrm{BL}(\mathfrak{K})$-wertiges Maß auf einem δ-Ring $\mathscr{J}_M$ von Teilmengen einer Menge Ξ ist.

Gemäß [14], Abschnitt 2.5 existieren nun ein (komplexer) Hilbertraum $\mathfrak{H}'$ und ein $\varkappa$-quasi-isometrisches Maß Y' mit Werten in $\mathrm{BL}(\mathfrak{K}, \mathfrak{H}')$. Wir setzen $B = \hat{A}$ und definieren den Prozeß $X' \in \mathfrak{S}_0(\Gamma, \mathfrak{F})$ durch

$$X'(\gamma)f := \int_\Gamma Y'(d\xi)(Bf)(\xi^{-1}\gamma) \quad (\gamma \in \Gamma,\ f \in \mathfrak{F}).$$

Dann gilt $\big(X'(\gamma)f, X'(\gamma')f'\big)_{\mathfrak{H}'} = \big(X(\gamma)f, X(\gamma')f'\big)_{\mathfrak{H}}$ $(\gamma, \gamma' \in \Gamma,\ f, f' \in \mathfrak{F})$ (s. [12], Folgerung 2.3.1). Gemäß Folgerung 1.1 gibt es genau eine isometrische Abbildung V' von $\mathfrak{H}_{X'}$ auf $\mathfrak{H}_X$ mit $V'X'(\gamma) = X(\gamma)$ $(\gamma \in \Gamma)$. Es sei nun $\mathfrak{H}_0$ ein abgeschlossener linearer Teilraum von $\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_X$ mit $\dim \mathfrak{H}_0 = \dim(\mathfrak{H}_{Y'} \ominus \mathfrak{H}_{X'})$ (im Fall $\mathfrak{H}_{X'} = \mathfrak{H}_{Y'}$ also $\mathfrak{H}_0 = \{0\}$, im Fall $\dim(\mathfrak{H}_{Y'} \ominus \mathfrak{H}_{X'}) > \dim(\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_X)$ muß zuerst $\mathfrak{H}$ durch einen geeigneten Oberraum ersetzt werden(¹³)) und V'' eine isometrische Abbildung von $\mathfrak{H}_{Y'} \ominus \mathfrak{H}_{X'}$ auf $\mathfrak{H}_0$. Dann ist $V := V' \oplus V''$ eine isometrische Abbildung von $\mathfrak{H}_{Y'}$ auf $\mathfrak{H}_X \oplus \mathfrak{H}_0 \subseteq \mathfrak{H}$. Durch $Y(\Delta) := VY'(\Delta)$ $(\Delta \in \mathscr{J}_\varkappa)$ wird ein $\varkappa$-quasi-isometrisches Maß mit Werten in $\mathrm{BL}(\mathfrak{K}, \mathfrak{H})$ definiert. Offensichtlich gilt dann (4.2).

Literatur

[1] J. Blum, B. Eisenberg, *A note on random measures and moving averages on non-discrete groups*, Ann. Probability 1, 2 (1973), 336–337.

[2] S. A. Chobanyan, *On a class of covariance functions of Banach space-valued stationary stochastic processes*, Soobšč. Akad. Nauk Gruzin. SSR 55.1 (1969), 21–24 (russisch).

[3] S. A. Chobanyan, A. Weron, *Banach space valued stationary processes and their linear prediction*, Diss. Math. 125 (1975), 1–45.

[4] E. Hewitt, K. A. Ross, *Abstract harmonic analysis I/II*, Berlin–Göttingen–Heidelberg 1963/Berlin–Heidelberg–New York 1970.

[5] A. Makagon, *An isomorphic theorem for Banach space valued stationary stochastic sequences*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 26 (1978), 169–173.

[6] A. Makagon, F. Schmidt, *A decomposition theorem for densities of positive operator-valued measures*, ibid. 28 (1980), 41–43.

[7] P. Masani, *Quasi-isometric measures and their applications*, Bull. Amer. Math. Soc. 76, 3 (1970), 427–528.

[8] A. G. Miamee, H. Salehi, *Factorization of positive operator valued functions on a Banach space*, Indiana Math. J. 24, 2 (1974), 103–113.

[9] R. Payen, *Fonctions aléatoires du second ordre à valeurs dans un espace de Hilbert*, Ann. Inst. H. Poincaré 3, 4 (1967), 323–396.

[10] F. Schmidt, *Spektraldarstellung und Extrapolation einer Klasse von stationären stochastischen Prozessen*, Math. Nachr. 47 (1970), 101–119.

[11] — *Über die Darstellung einer Klasse von stationären stochastischen Prozessen durch gleitende Mittel*, ibid. 51 (1971), 279–310.

[12] — *Über die Darstellung einer Klasse von stationären stochastischen Prozessen mit Hilfe von verallgemeinerten zufälligen Maßen*, ibid. 56 (1973), 21–41.

(¹³) Wahrscheinlichkeitstheoretisch konstruierte „Erweiterung" von $\mathfrak{H}$: Falls $\mathfrak{H}_X \subseteq L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \boldsymbol{P})$ und $\mathfrak{H}_{Y'} \subseteq L^2(\Omega', \mathfrak{A}', \boldsymbol{P}')$, so genügt $\mathfrak{H} := L^2(\Omega \times \Omega', \mathfrak{A} \times \mathfrak{A}', \boldsymbol{P} \times \boldsymbol{P}')$ stets der Beziehung $\dim(\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_X) \geqslant \dim(\mathfrak{H}_{Y'} \ominus \mathfrak{H}_{X'})$ (s. [12], Beweis von Satz 2.3.2).

[13] — *Banach space-valued stationary processes with absolutely continuous spectral function*, in: *Probability theory on vector spaces*, Lecture Notes in Math. 656 (1978), 237–244.

[14] — *Nichtnegativ definite operatorwertige Funktionen*, in Vorbereitung.

[15] F. Schmidt, A. Weron, *Darstellung von stationären stochastischen Prozessen mit Werten in einem Banach-Raum durch einseitige gleitende Mittel*, Math. Nachr. 88 (1979), 41–57.

[16] N. N. Vakhanija, *On the covariance of random elements in linear spaces*, Soobšč. Akad. Nauk. Gruzin. SSR 53.1 (1969), 17–20 (russisch).

[17] — *Probability distributions in linear spaces*, Tbilisi 1971 (russisch).

[18] N. N. Vakhanija, S. A. Chobanyan, *Processes stationary in wide sense with values in a Banach space*, Soobšč. Akad. Nauk. Gruzin. SSR 57.3 (1970), 545–548 (russisch).

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
SEKTION MATHEMATIK
DDR-8027 DRESDEN

Received January 12, 1979 (1502)

STUDIA MATHEMATICA, T. LXXI. (1981)

On unconditional polynomial bases of the space L_p

by

Z. A. CHANTURIA (Tiflis)

Abstract. In all spaces $L_p(0,1)$ where $p \in (1,\infty)$ and for each $\varepsilon > 0$ we prove the existence of the ONS of algebraic polynomials $\{P_n\}$ which forms an unconditional basis in $L_p(0,1)$ and satisfies the condition

$$\deg P_n = \nu_n \leqslant n^{1+\varepsilon}$$

for $n > n_0(p,\varepsilon)$. An analogous theorem is valid for trigonometrical polynomials.

As is well known, J. Marcinkiewicz was the first to prove the existence of unconditional bases in all spaces $L_p(0,1) \equiv L_p$ for $p > 1$. Namely, he has proved that the Haar orthonormal system (ONS) is an unconditional base ([12], see also [14], pp. 397–423). In 1974 S. V. Bochkarev proved that the Franklin orthonormal system is also an unconditional basis in L_p for all $p > 1$ [1]. Z. Ciesielski [7] has introduced a new class of orthonormal systems, which contains the systems of both Haar and Franklin, and has proved [8] that these systems are unconditional bases in all L_p for $p > 1$ as well.

On the other hand, although the trigonometrical system is a basis in L_p for $p > 1$, $p \neq 2$ the basis is not unconditional. What is more, V. F. Gaposhkin [10] has shown that none of the uniformly bounded systems normed in L_p can be an unconditional basis in L_p, $p \neq 2$.

It should be noted that there is no unconditional basis in the spaces $C(0,1)$ and $L(0,1)$ at all. These results are due to S. Karlin [11] and A. Pełczyński [13], respectively.

Let us pose the following question. Does an orthonormal system of polynomials (algebraic or trigonometrical) which forms an unconditional basis in L_p exist for any $p > 1$, $p \neq 2$, and if it does, then what minimal growth of powers may that basis have?

In 1971, using the Haar system, we proved [2] that in every $L_p (p > 1)$ for each $\varepsilon > 0$ there exists an ONS of trigonometrical polynomials $\{T_n\}$ which forms an unconditional basis in L_p and for $n > n_0(p,\varepsilon)$

$$\deg T_n = \nu_n \leqslant \begin{cases} n^{p+\varepsilon} & \text{for} \quad p > 2, \\ n^{q+\varepsilon} & \text{for} \quad 1 < p < 2, \end{cases} \qquad 1/p + 1/q = 1.$$