STUDIA MATHEMATICA, T. LXXI. (1981)

Sur les équations du type: $\Psi(x, h) = 0$ (II)

par

T. LEŻAŃSKI (Lublin)

Résumé. Le présent travail est une continuation du travail [1] et contient quelques applications de la théorie, exposée dans celui-ci, aux équations différentielles ordinaires avec des conditions aux limites et aux équations partielles faiblement elliptiques.

Introduction. Dans le présent travail nous indiquons quelques applications des idées développées dans [1] à la solution généralisée des équations différentielles ordinaires et des équations partielles faiblement elliptiques.

Nous faisons usage des notions et des notations utilisées dans [1], telles que: H_1 espace de Hilbert avec le produit scalaire $(x, y)_1$ et une *forme de Dirichlet* $\Psi(x, h)$, définie pour $x, y \in H_1$, linéaire et bornée par rapport à h et remplissant localement la condition de Lipschitz par rapport au couple $\langle x, h\rangle \in H_1 \times H_1$. On suppose de plus que $\Psi(x, h)$ est positivement définie: la condition suivante (A):

(A) $$\Psi(x+h, h) - \Psi(x, h) \geqslant a\|h\|_1^2$$

doit être remplie, avec un $a > 0$, pour tout couple $\langle x, h\rangle \in H_1 \times H_1$.

Nous dirons que la fonctionnelle $\Psi(x, h)$ remplissant toutes les conditions énoncées ci-dessus est *comparable* au produit scalaire $(x, y)_1$.

Les propriétés: (A) et l'énoncée ci-dessus, assurent l'existence unique de la solution de l'équation (v. [1], 1.3, p. 157):

(B) $$\Psi(u, h) = 0 \quad \text{pour tout } h \in H_1.$$

Dans le cas où Ψ est une forme différentielle et où la fonction u, solution de (B), possède toutes les dérivées jusqu'à un degré suffisamment élevé, u satisfait à une équation différentielle

(C) $$U(u) = 0$$

et à certaines conditions aux limites. Réciproquement, une solution de (C) est toujours une solution de (B). C'est pourquoi nous appellerons parfois la solution u de (B) solution généralisé de (C).

1. Systèmes d'équations différentielles ordinaires non linéaires avec des conditions aux limites.

1.1. Notations, définitions et hypothèses. Désignons par $\boldsymbol{R}^m$ l'espace linéaire des suites de nombres réels $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$, où $\xi_i \in \boldsymbol{R}$. Pour $\boldsymbol{\xi}, \eta \in \boldsymbol{R}^m$ posons

$$\xi \cdot \eta = \sum_{i=1}^{m} \xi_i \eta_i, \qquad |\xi|^2 = \xi \cdot \xi.$$

Outre les vecteurs, notés $\xi, \eta, \zeta, \lambda$ (caractères italiques demi-gros), nous considérons aussi les matrices $a = [\alpha_{ik}]_{i,k=1,\ldots,m}$, $b = [\beta_{ik}]$, etc. Désignons par $\mathfrak{M}$ l'ensemble de toutes les matrices de degré m, où m est fixe, et admettons les notations suivantes:

1.1.1. DÉFINITION. Si $\xi, \eta \in \boldsymbol{R}^m$ et $a, b, c \in \mathfrak{M}$:

$$a\xi = \eta \overset{\mathrm{df}}{\Leftrightarrow} \eta_i = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{ik}\xi_k \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

$$ab = c = [\gamma_{ik}] \Leftrightarrow \gamma_{ik} = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}\beta_{jk},$$

$$b = a^* \Leftrightarrow \beta_{ik} = \alpha_{ki}, \qquad i, k = 1, \ldots, m.$$

1.1.2. DÉFINITION. La matrice a est dite *positive* (*non négative*) si $\xi \neq 0$ entraîne $a\xi \cdot \xi > 0$ $(\geqslant 0)$, et *symétrique* si $a^* = a$.

Citons sans démonstration le fait bien connu que voici:

1.1.3. THÉORÈME. *Pour toute matrice a symétrique non négative il existe exactement une matrice symétrique non négative b telle que:*

(i) $$bb = b^2 = a.$$

Nous la désignons par $\sqrt{a}$.

Pour la matrice a définissons ensuite deux normes: la norme "ordinaire" $\|a\|$ et la norme "absolue" $\|a\|_*$:

1.1.4. DÉFINITION: (i) $\|a\| = \{\sup|a\xi|: \xi \in \boldsymbol{R}$ et $|\xi| = 1\}$,

(ii) $\|a\|_* = \Big\{\sum_{i,k=1}^{m} \alpha_{ik}^2\Big\}^{1/2}$.

On a les relations bien connues:

1.1.5. (i) $\|ab\| \leqslant \|a\| \cdot \|b\|$,

(ii) $\|ab\|_* \leqslant \|a\|_* \cdot \|b\|_*$,

(iii) $\|a\| \leqslant \|a\|_*$,

(iv) $\|a\|_*^2 = \|a^*\|_*^2 = \mathrm{tr}(aa^*) = \mathrm{tr}(a^*a)$,

où $\mathrm{tr}(b) \overset{\mathrm{df}}{=} \sum_{i=1}^{m} \beta_{ii}$.

1.1.6. LEMME. *Si $a = a^*$, on a $\|a\|_* \leqslant \sqrt{m}\|a\|$.*

En effet, a est de la forme: $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i s_i$, où les s_i sont les projections. Il s'ensuit: $\|a\|^2 \geqslant \|a^2\| = \max \lambda_i^2 \geqslant \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^2 = \frac{1}{m}\mathrm{tr}(a^2) = \frac{1}{m}\mathrm{tr}(aa^*)$ $= \frac{1}{m}\|a\|_*^2$. ■

Considérons les fonctions de l'argument réel $t \in \langle 0, 1\rangle$ dont les valeurs sont les matrices:

1.1.7. $\langle 0, 1\rangle \ni t \mapsto a(t) \in \mathfrak{M}$,

que nous appellerons *fonctions-matrices*. Une fonction-matrice $a(t)$ sera dite *mesurable* si toutes ses coordonnées $\alpha_{ik}(t)$ le sont.

1.1.8. LEMME. *Soit $a(t)$ une fonction-matrice mesurable, symétrique et non négative pour tout $t \in \langle 0, 1\rangle$.*

Conclusion: la matrice $\sqrt{a(t)}$ est mesurable.

Démonstration. La fonction $\lambda(t) = 2\|a(t)\|_*$ étant mesurable, la fonction-matrice $b(t) = \frac{1}{\lambda(t)} a(t)$ l'est aussi. Comme, de plus $\|b(t)\|_* \leqslant 1/2$, d'après un théorème bien connu (v. [2], § 104, p. 261) il existe, pour tout t fixé de $\langle 0, 1\rangle$, une matrice $\sqrt{b(t)}$; cette dernière étant la limite d'une suite de polynômes en $b(t)$ selon la norme $\|\ \|$, donc aussi (v. (1.1.6)) selon $\|\ \|_*$, la fonction-matrice $b(t)$ est mesurable; il en résulte que: $\sqrt{a(t)} = \sqrt{\lambda(t)}\sqrt{b(t)}$ est aussi mesurable. ■

1.1.9. LEMME. *Si la fonction-matrice $a(t)$ est mesurable et si $(a(t))^{-1}$ existe pour presque tout $t \in \langle 0, 1\rangle$, la fonction-matrice $(a(t))^{-1}$ est aussi mesurable.*

La démonstration est évidente; il suffit de s'appuyer sur les formules de Cramer.

1.2. Certains espaces linéaires de fonctions-vecteurs. Nous allons considérer ici les suites de fonctions mesurables: $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_m(t))$, $t \in \langle 0, 1\rangle$, que nous appellerons *fonctions-vecteurs*.

1.2.1. DÉFINITION. La fonction-vecteurs. $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_m(t))$ sera appelée *intégrable* (resp. *absolument continue*) si chacune de ses coordonnées l'est. Nous écrirons:

(i) $$\frac{d}{dt}x(t) = \dot{x}(t) = \left(\frac{d}{dt}x_1(t), \ldots, \frac{d}{dt}x_m(t)\right)$$

(ii) $$\int_{t_0}^{t_1} x(t)\,dt = \Big(\int_{t_0}^{t_1} x_1(t)\,dt, \ldots, \int_{t_0}^{t_1} x_m(t)\,dt\Big).$$

Soit $p(t) = [p_{ik}(t)]_{i,k=1,\ldots,m}$ une fonction-matrice fixée dans toute la partie 1 de ce travail, et satisfaisant à l'hypothèse:

1.2.2. Hypothèse. (i) *$p_{ik}(t)$ est mesurable sur $\langle 0, 1\rangle$ pour $i, k = 1, \ldots, m$,* (ii) *pour presque tout $t \in \langle 0, 1\rangle$ fixé la matrice $[p_{ik}(t)]$ est symétrique et positive.*

L'hypothèse 1.2.2 assure l'existence de $[p(t)]^{-1}$:

1.2.3. Définition. $q(t) \overset{\mathrm{df}}{=} [p(t)]^{-1}$.

D'après 1.1.8 et 1.1.9 la fonction-matrice $q(t)$ est mesurable, presque partout symétrique et positive. Admettons l'hypothèse:

1.2.4. $$\int_0^1 |q_{ik}(t)|\,dt < +\infty \text{ pour } i, k = 1, \ldots, m.$$

Il en résulte l'existence de la matrice C:

1.2.5. Définition. $C \overset{\mathrm{df}}{=} \int_0^1 q(t)\,dt$, ou bien $C = [\gamma_{ik}]$, $\gamma_{ik} = \int_0^1 q_{ik}(t)\,dt$, $i, k = 1, \ldots, m$.

La matrice C est symétrique positive, $q(t)$ l'étant presque partout; il en résulte l'existence de C^{-1}.

1.2.6. Définition. $\lambda \overset{\mathrm{df}}{=} \int_0^1 \operatorname{tr} q(t)\,dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^m q_{ii}(t)\,dt$.

1.2.7. Lemme. *On a: $\lambda > 0$.*

En effet, la matrice $q(t)$ étant positive symétrique presque partout, on a: $\operatorname{tr} q(t) > 0$ presque partout, d'où l'assertion.

Définissons maintenant certains ensembles linéaires de fonctions-vecteurs:

1.2.8. Définition. Soit H (resp. Y) l'ensemble de toutes les fonctions-vecteurs $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_m(t))$, mesurables sur $\langle 0, 1\rangle$, telles que

$$\text{(i)} \int_0^1 |x_i(t)|^2\,dt < +\infty \quad \text{resp.} \quad \text{(ii)} \int_0^1 |x_i(t)|\,dt < +\infty$$

pour $i = 1, \ldots, m$.

1.2.9. Définition. Soit M l'ensemble de toutes les fonctions-vecteurs $x(t)$ ($t \in \langle 0, 1\rangle$) remplissant les conditions:

(i) $x(t)$ est absolument continue sur $\langle 0, 1\rangle$,

(ii) $p(t)\dot{x}(t)$ est absolument continue sur $\langle 0, 1\rangle$ (ou bien égale presque partout à une telle fonction),

(iii) la fonction: $\dfrac{d}{dt}\Big[p(t)\dfrac{d}{dt}x(t)\Big]$ appartient à H,

(iv) $x(0) = x(1) = 1$.

Il est évident que $M \subset H \subset Y$. Définissons encore dans H et M certains produits scalaires:

1.2.10. Définition.

(i) $$(x, y) = \int_0^1 x(t)\cdot y(t)\,dt = \int_0^1 x_i(t) y_i(t)\,dt, \quad \|x\|^2 = (x, x), \quad (x, y \in H);$$

(ii) $$(u, v)_1 = \int_0^1 p(t)\dot{u}(t)\cdot\dot{v}(t)\,dt = \int_0^1 \sum_{i,k=1}^m p_{ik}(t)\dot{u}_i(t)\dot{v}_k^*(t)\,dt,$$
$$\|u\|_1^2 = (u, u), \quad (u, v \in M).$$

L'intégrale (ii) existe, puisque $p(t)\dot{u}(t)$ est absolument continue, et $\dot{v}(t)$ est intégrable, comme dérivée de la fonction absolument continue $v(t)$ (v. 1.2.9 (i), (ii)).

1.2.11. Lemme. *Pour $u \in M$ on a:*

$$\sqrt{\lambda}\,\|u\|_1 \geqslant \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} |u(t)| \geqslant \|u\|.$$

Démonstration. Vu que $u(0) = 0$, on a

(a) $$\begin{aligned} |u(t)| &= |u(t) - u(0)| \leqslant \int_0^t |\dot{u}(s)|\,ds \leqslant \int_0^1 \big|\sqrt{q(s)}\cdot\sqrt{p(s)}\,\dot{u}(s)\,ds\big| \\ &\leqslant \int_0^1 \|\sqrt{q(s)}\|_*\cdot\big|\sqrt{p(s)}\,\dot{u}(s)\big|\,ds \\ &\leqslant \Big\{\int_0^1 \|\sqrt{q(s)}\|_*^2\,ds\Big\}^{1/2}\cdot\Big\{\int_0^1 \big|\sqrt{p(s)}\,\dot{u}(s)\big|^2\,ds\Big\}^{1/2} \\ &= \Big\{\int_0^1 \operatorname{tr} q(s)\,ds\Big\}^{1/2}\cdot\Big\{\int_0^1 p(s)\dot{u}(s)\cdot\dot{u}(s)\,ds\Big\}^{1/2} = \sqrt{\lambda}\,\|u\|_1. \end{aligned}$$

Nous avons utilisé le fait que $p(t)$ et $q(t)$ sont symétriques positives et la formule 1.1.5 (iii). Le premier membre de l'inégalité est ainsi démontré; nous avons, de plus:

$$\Big[\sup_{0\leqslant t\leqslant 1} |u(t)|^2\Big] = \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} |u(t)|^2 = \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} \sum_{i=1}^m |u_i(t)|^2 \geqslant \int_0^1 \sum_{i=1}^m |u_i(t)|^2\,dt = \|u\| . \blacksquare$$

Définissons maintenant sur M une opération linéaire.

1.2.12. DÉFINITION. $(Au)(t) \overset{\mathrm{df}}{=} -\dfrac{d}{dt}[p(t)\dot{u}(t)]$ $(u \in M)$.

La formule 1.2.12 a un sens, puisque $u(t)$ et $p(t)\dot{u}(t)$ sont absolument continues (v. 1.2.9 (i), (ii)).

1.2.13. LEMME. *L'opération A est symétrique et positivement définie sur M; plus exactement, on a:*

(i) $$(Au, v) = (u, v)_1 = (u, Av),$$

(ii) $$(Au, u) \geqslant \lambda\|u\|^2, \quad (u, v \in M).$$

Démonstration. (i):

$$(Au, v) = -\int_0^1 \frac{d}{dt} p(t)\dot{u}(t)\cdot v(t)\,dt$$
$$= \int_0^1 p(t)\dot{u}(t)\cdot\dot{v}(t)\,dt = (u, v)_1,$$

en vertu de 1.2.9 (iv); toutes les intégrales qui figurent plus haut ont un sens en vertu de 1.2.9 (i), (ii). Ainsi (i) est démontré; (ii) découle de (i) en vertu de 1.2.11. ■

Pour établir les autres propriétés de l'opération A introduisons une nouvelle opération linéaire sur l'espace Y. Soit $y \in Y$. La fonction-vecteur $y(t)$ et la fonction-matrice $q(t)$ étant intégrables (v. 1.2.8 et 1.2.4), les expressions suivantes ont un sens pour $y \in Y$:

1.2.14. DÉFINITION.

(i) $$\Phi(y) \overset{\mathrm{df}}{=} C^{-1}\int_0^1 q(s)\Big[\int_0^s y(\sigma)\,d\sigma\Big]ds,$$

(ii) $$(Gy)(t) = -\int_0^t q(s)\Big[\int_0^s y(\sigma)\,d\sigma - \Phi(y)\Big]\,ds$$

(C étant défini par 1.2.5).

On a: $\Phi(y) \in \boldsymbol{R}^m$ pour $y \in Y$.

1.2.15. LEMME. *Si $y, u, v \in Y$ et $x \overset{\mathrm{df}}{=} Gy$, on a:*

(i) *les fonctions: $x(t)$ et $p(t)\dot{x}(t)$ sont absolument continues,*

(ii) $\dfrac{d}{dt}[p(t)\dot{x}(t)] = -y(t)$,

(iii) $x(0) = x(1) = 0$,

(iv) $\int_0^1 (Gu)(t)\cdot v(t)\,dt = \int_0^1 \big(u(t)\cdot(Gu(t)\big)\,dt$.

Démonstration. La fonction $y(t)$ étant intégrable comme élément de Y(v. 1.2.4), les fonctions:

(a) $$z(t) \overset{\mathrm{df}}{=} \int_0^t y(s)\,ds,$$

(b) $$x(t) \overset{\mathrm{df}}{=} (Gy)(t) = -\int_0^t q(s)[z(s) - \Phi(y)]\,ds$$

sont absolument continues. Par conséquent $\dot{x}(t)$ existe et on a:

(c) $$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt}(Gy)(t) = -q(t)\Big[\int_0^t y(s)\,ds - \Phi(y)\Big],$$

(d) $$p(t)\cdot\dot{x}(t) = -z(t) + \Phi(y) = -\int_0^t y(s)\,ds + \Phi(y),$$

(e) $$\frac{d}{dt}[p(t)\dot{x}(t)] = -y(t)$$

et (ii) est ainsi démontré. Pour établir (iii) observons que l'égalité: $x(0) = 0$ découle de (b) et calculons $x(1)$. En vertu de (b) et de 1.2.14 (i) on a:

$$x(1) = -\int_0^1 q(t)[z(t) - \Phi(y)]\,dt$$
$$= -\int_0^1 q(t)z(t)\,dt + \int_0^1 q(t)\,dt\cdot C^{-1}\int_0^1 q(s)z(s)\,ds = 0$$

en tenant compte de la définition 1.2.5 de C. Pour démontrer (iv) posons, pour $v \in Y$:

(f) $$v_1(t) = \int_0^t v(s)\,ds - \Phi(v).$$

Alors v_1 est une fonction primitive absolument continue de v. On en tire, en tenant compte de (c), où l'on a remplacé y par u:

(g) $$\int_0^1 (Gu)(t)\cdot v(t)\,dt$$
$$= -\int_0^1 \frac{d}{dt}(Gu)(t)\cdot v_1(t)\,dt + (Gu)(t)\cdot v_1(t)\Big|_0^1$$
$$= \int_0^1 q(t)\Big[\int_0^t u(s)\,ds - \Phi(u)\Big]\cdot\Big[\int_0^t v(s)\,ds - \Phi(v)\Big]dt,$$

car $(Gu)(0) = (Gu)(1) = 0$ en vertu de (iii). En échangeant dans (g) les rôles de u et v on obtient (iv). ■

1.2.16. THÉORÈME. *Les opérations: A et G jouissent des propriétés suivantes:*

(i) $$(Gu, v) = (u, Gv) \quad (u, v \in H),$$

(ii) $$Gy = 0 \Rightarrow y = 0 \quad (y \in Y),$$

(iii) $$AGy = y \quad (y \in H),$$

(iv) $$GAx = x \quad (x \in M = D(A)),$$

(v) $$M = G(H) \text{ est dense dans } H,$$

(vi) $$A = G^{-1} \text{ est autoadjointe.}$$

DÉMONSTRATION. (i) découle de 1.2.15 (iv). Les propriétés (ii) et (iii) résultent immédiatement de 1.2.15 (ii), vu la définition 1.2.12 de l'opération A. Pour établir (iv) observons que pour $x \in M = D(A)$ on a: $A(GAx-x) = AGAx-Ax = 0$, en vertu de (iii), en y posant Ax pour y. Mais A est inversible comme positivement définie (v. 1.2.13 (ii)), d'où (iv). En vertu de 1.2.15 (i), (ii), (iii) on a: $Gy \in M$ si $y \in H$, conformément à la définition (1.2.9) de M. D'autre part, en vertu de (iv) tout élément $x \in M$ est de la forme GAx, où $Ax \in H$, donc $M = G(H)$ est dense dans H comme ensemble des valeurs de l'opération symétrique, inversible et partout définie G. En vertu de (iii) et (iv) on a: $A = G^{-1}$; donc A est autoadjointe puisqu'il en est de même de G. ∎

Conformément à la théorie de Friedrichs (v. [1], § 124, p. 327) il existe un espace H_1, le complément de M en norme $\| \ \|_1$, de sorte que l'on a:

1.2.17. $M \subset H_1 \subset H$, $\overline{M} = H_1$ (en norme $\| \ \|_1$).

1.2.18. LEMME. *Si $u \in H_1$, $u(t)$ est une fonction continue au sens de la norme $\| \ \|$; de plus, on a: $u(0) = u(1) = 0$.*

Démonstration. Soit $u \in H_1$; en vertu de la théorie de Friedrichs il existe une suite $u_1, u_2, \ldots$ d'éléments de M: $u_n \in M$, $n = 1, 2, \ldots$, telle que

(a) $$\|u_n - u\| \to 0,$$

(b) $$\|u_n - u_k\|_1 \to 0 \quad (n, k \to \infty)$$

d'où, et en vertu de l'inégalité 1.2.11:

(c) $u_n(t) - u_k(t) \to 0$ uniformément par rapport à $t \in \langle 0, 1\rangle$.

Mais, en vertu de la définition 1.2.9 de M, toutes les fonctions u_n sont continues et satisfont aux égalités: $u_n(0) = u_n(1) = 0$; il existe donc une fonction $v(t)$ qui est la limite uniforme de la suite u_n, continue et s'annulant aux points 0 et 1. Or, la convergence uniforme étant plus forte que la convergence suivant la norme $\| \ \|$, on a: $\|u_n - v\| \to 0$, d'où et de (a) on tire: $u = v$, ce qui achève la démonstration.

1.3. La fonctionnelle $\Psi(u, h)$ et l'équation non linéaire. Soient $\varphi_i(\xi_1, \ldots, \xi_m, t)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ des fonctions remplissant la condition de Lipschitz par rapport à toutes les variables: $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m \in \boldsymbol{R}$, $t \in \langle 0, 1\rangle$. Nous écrirons brièvement:

1.3.1. DÉFINITION. $\varphi(\xi, t) = \eta \overset{\text{df}}{\Leftrightarrow} \eta_i = \varphi_i(\xi_1, \ldots, \xi_m, t)$ $(i = 1, \ldots m)$. Admettons les hypothèses:

1.3.2. HYPOTHÈSES. *Il existe des nombres: $0 < \alpha \leqslant \mu$ tels que*

(i) $$|[\varphi(\xi = \eta, t) - \varphi(\xi, t)]\cdot \xi|^2 \leqslant \mu^2 [q(t)\eta\cdot\eta]\cdot[p(t)\zeta\cdot\zeta],$$

(ii) $$[\varphi(\xi+\eta; t) - \varphi(\xi, t)]\cdot\eta \geqslant aq(t)\eta\cdot\eta \quad \textit{pour} \quad \xi, \eta, \zeta \in \boldsymbol{R}^m,\ t \in \langle 0, 1\rangle.$$

Définissons la fonctionnelle $\Psi(u, h)$ pour $u, h \in M$. La fonction $p(t)\dot{u}(t)$ étant absolument continue et $\dot{h}(t)$ intégrable pour $u, h \in M$ (v. 1.2.9), l'expression suivante a bien un sens:

1.3.3. DÉFINITION.

$$\Psi(x, h) \overset{\text{df}}{=} \int_0^1 \varphi\big(p(t)\dot{x}(t), t\big)\dot{h}(t)\,dt + \int_0^1 a(t)h(t)\,dt,$$

où $a \in H$ est un élément fixé.

Établissons maintenant les propriétés de Ψ.

1.3.4. LEMME. (i) *Pour $u \in M$ fixé, la fonctionnelle $\Psi(u, h)$ est linéaire bornée par rapport à $h \in M$ au sens de la norme $\| \ \|_1$,*

(ii) $|\Psi(u+v, h) - \Psi(u, h)| \leqslant \mu\|v\|_1\cdot\|h\|_1$,

(iii) $\Psi(u+h, h) - \Psi(u, h) \geqslant \alpha\|h\|_1^2$.

Démonstration. La fonction $p(t)\dot{u}(t)$ étant absolument continue d'après 1.2.9, il en est de même de $\varphi\big(p(t)\dot{u}(t), t\big)$, puisque φ remplit la condition de Lipschitz. Posons, pour abréger, $z(t) = \varphi\big(p(t)\dot{u}(t), t\big)$; nous avons, pour $h \in M$

(a) $$\begin{aligned} |\Psi(u, h)| &= \Big|\int_0^1 z(t)\cdot\dot{h}(t)\,dt + (a, h)\Big| \\ &\leqslant \int_0^1 \big|\sqrt{q(t)}\cdot z(t)\cdot\sqrt{p(t)}\,\dot{h}(t)\big|\,dt + \|a\|\cdot\|h\| \\ &\leqslant \Big\{\int_0^1 \big|\sqrt{q(t)}\cdot z(t)\big|^2 dt\Big\}^{1/2}\cdot\Big\{\int_0^1 \big|\sqrt{p(t)}\,\dot{h}(t)\big|^2 dt\Big\}^{1/2} + \|a\|\cdot\|h\| \\ &\leqslant \sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|z(t)|\Big\{\int_0^1 \|q(t)\|_* dt\Big\}^{1/2}\cdot\Big\{\int_0^1 p(t)\dot{h}(t)\cdot\dot{h}(t)\,dt\Big\}^{1/2} + \|a\|\cdot\|h\| \\ &\leqslant \big[\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|z(t)|\cdot\sqrt{\lambda} + \|a\|\big]\|h\|_1, \quad \text{en vertu de 1.2.11.} \end{aligned}$$

Pour démontrer (ii) remplaçons dans l'hypothèse 1.3.2 (i) ξ, η, ζ respectivement par $p\dot{u}, p\dot{v}, \dot{h}$; nous obtenons (en omettant l'argument t):

$$|\Psi(u+v, h)-\Psi(u, h)| = \Big|\int_0^1 [\varphi(p\dot{u}+p\dot{v}, t)-\varphi(p\dot{u}, t)]\cdot\dot{h}\,dt\Big|$$
$$\leqslant \mu\int_0^1 [qp\dot{v}\cdot p\dot{v}]^{1/2}\cdot[p\dot{h}\cdot\dot{h}]^{1/2}\,dt$$
$$\leqslant \mu\Big\{\int_0^1 p\dot{v}\cdot\dot{v}\,dt\Big\}^{1/2}\cdot\Big\{\int_0^1 p\dot{h}\cdot\dot{h}\,dt\Big\}^{1/2}$$
$$= \mu\|v\|_1\cdot\|h\|_1.$$

La démonstration de (iii) est analogue: en posant dans (1.3.2) (ii) $p\dot{u}$ (resp. $p\dot{h}$) au lieu de ξ (resp. η) il vient:

$$\Psi(u+h, h)-\Psi(u, h) = \int_0^1 [\varphi(p\dot{u}+p\dot{h}, t)-\varphi(p\dot{u}, t)]\cdot\dot{h}\,dt$$
$$\geqslant a\int_0^1 qp\dot{h}\cdot p\dot{h}\,dt = a\int_0^1 p\dot{h}\cdot\dot{h}\,dt = a\|h\|_1^2. \blacksquare$$

La fonctionnelle $\Psi(u, h)$ satisfaisant à la condition de Lipschitz par rapport au couple $\langle u, h\rangle$ au sens de la norme $\| \ \|_1$ dans l'espace incomplet $M\times M$, elle peut être étendue sur tout l'espace $H_1\times H_1$ de sorte que les inégalités 1.3.4 resteront en vigueur. La fonctionnelle étendue sera désignée par le même symbole Ψ. En vertu de [1], p. 1–3 il existe un seul élément $u_0\in H_1$ tel que

1.3.5. $\Psi(u_0, h) = 0$ (pour tout $h\in H_1$).

Le théorème suivant établit une liaison entre l'équation 1.3.5 et une équation différentielle:

1.3.6. Théorème. *Si les fonctions: u_0 et $p\dot{u}_0$ sont absolument continues, on a:*

(i) $$-\frac{d}{dt}\varphi\Big(p(t)\frac{d}{dt}u_0(t), t\Big)+a(t) = 0$$

(les dérivées étant comprises au sens de Lebesgue).

Démonstration. Posons $y_0(t) = -\dfrac{d}{dt}\varphi(p(t)u_0(t), t)$; $p\dot{u}_0$ étant absolument continue et φ lipschitzienne, $\varphi(p\dot{u}_0, t)$ est aussi absolument continue, donc y_0 est intégrable, ce que nous notons: $y_0\in Y$ (v. déf. 1.2.8 de Y). On a alors, pour tout $h\in M$:

(a) $$\int_0^1 (y_0+a)\cdot h\,dt = \int_0^1\Big[-\frac{d}{dt}\varphi(pu_0, t)+a\Big]\cdot h\,dt$$
$$= \int_0^1 \varphi(p\dot{u}_0, t)\cdot\dot{h}\,dt+\int_0^1 a\cdot h\,dt-\varphi(p\dot{u}_0, t)\cdot h\Big|_0^1$$
$$= \Psi(u_0, h) = 0,$$

en vertu de 1.3.5 (pour $h\in M$ on a: $h(0) = h(1) = 0$).

Remplaçons dans (a) h par un élément de la forme Gz, où $z\in H$, ce qui est permis, car $Gz\in M$ pour $z\in H$ (v. 1.2.16 (v)). On obtient de (a) en vertu de 1.2.16:

(b) $$(G(y_0+a), z) = \int_0^1 (G(y_0+a)(t)\cdot z(t)\,dt$$
$$= \int_0^1 (y_0+a)(t)\cdot G(z)(t)\,dt$$
$$= 0 \quad (z\in M),$$

d'où $G(y_0+a) = 0$, M étant dense dans H, et enfin $y_0+a = 0$ en vertu de 1.2.16 (v). $\blacksquare$

1.4. Une généralisation du théorème 1.3.6. Soit B une opération linéaire bornée et non négative dans H, ce que nous noterons:

1.4.1. $\|Bu\|\leqslant\beta\|u\|$, $(Bu, u)\geqslant 0$ pour $u\in H$.

Nous allons présenter une méthode pour la solution généralisée de l'équation:

1.4.2. $$-\frac{d}{dt}\varphi\Big(p(t)\frac{d}{dt}u(t), t\Big)+(Bu)(t)+a(t) = 0.$$

Dans ce but définissons une nouvelle fonctionnelle Ψ_1, en posant

1.4.3. Définition: $\Psi_1(u, h) = \Psi(u, h)+(Bu, h)$, $(u, h\in M)$, où Ψ a été définie par 1.3.3. En vertu de 1.3.4, 1.4.1 et 1.2.11 les inégalités suivantes ont lieu:

1.4.4. (i) $$|\Psi_1(u+v, h)-\Psi_1(u, h)|$$
$$\leqslant\mu\|v\|_1\cdot\|h\|_1+\beta\|v\|\cdot\|h\|\leqslant(\mu+\beta\lambda)\|v\|_1\cdot\|h\|_1,$$

(ii) $$\Psi_1(u+h, h)-\Psi_1(u, h) = \Psi(u+h, h)-\Psi(u, h)\geqslant a\|h\|_1^2.$$

En vertu de [1], point 1.3, il existe un élément (et un seul) $u_1\in H_1$ tel que

1.4.5. $\Psi_1(u, h) = 0$ pour tout $h\in M_0$.

1.4.6. THÉORÈME. *Si les fonctions: $u_1(t)$ et $p(t)\dot{u}_1(t)$ sont absolument continues, on a:*

$$-\frac{d}{dt}\varphi\big(p(t)\dot{u}_1(t),t\big)+(Bu_1)(t)+a(t)=0, \quad t\in\langle 0,1\rangle.$$

La démonstration est analogue à celle du théorème 1.3.6. ■

En particulier, on voit facilement que l'opération B, définie par la formule

$$1.4.7.\quad (Bu)(t)=v(t)\overset{\mathrm{df}}{\Leftrightarrow} v_i(t)=\sum_{k=1}^{m} b_{ik}(t)u_k(t),\ i=1,2,\dots,m,$$

où $b_{ik}\in\mathscr{L}^2_{\langle 0,1\rangle}$ $(i,k=1,\dots,m)$ et la matrice $[b_{ik}(t)]$ est non négative pour $t\in\langle 0,1\rangle$, satisfait à 1.4.1.

2. Équations non linéaires faiblement elliptiques.

2.0. Introduction à la seconde partie. Nous indiquerons ci-après une application de la théorie de l'équation $\Psi(u,h)=0$ à la solution généralisée des équations différentielles faiblement elliptiques de la forme

$$2.0.1.\quad \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial}{\partial\xi_i}f_i\left(\frac{\partial u}{\partial\xi_1},\dots,\frac{\partial u}{\partial\xi_m},\xi\right)-a(\xi)=0.$$

Conformément à l'idée générale de [1], l'équation 2.0.1 se présentera comme une conséquence de l'équation

$$2.0.2.\quad \Psi(u,h)=0$$

pour tout h d'un certain espace H_1, avec une fonctionnelle Ψ convenablement choisie comme forme de Dirichlet:

$$2.0.3.\quad \Psi(u,h)=\int_\Omega\left[\sum_{i=1}^{m}f_i\left(\frac{\partial u}{\partial\xi_1},\dots,\frac{\partial u}{\partial\xi_m},\xi\right)\frac{\partial h}{\partial\xi_i}+a(\xi)\cdot h(\xi)\right]d\xi,$$

donc, au point de vue formel, la même que dans [1]; cependant les hypothèses faites ici sur les fonctions a_i sont essentiellement plus faibles que dans [1], ce que nous expliquerons ci-dessous.

Comme nous l'avons dit dans l'introduction générale, l'hypothèse la plus importante concernant Ψ est celle que $\Psi(u,h)$ est „comparable" à un certain produit scalaire $(u,h)_1$. Dans le cas d'une équation fortement elliptique (de degré 2) ce produit scalaire est le plus souvent défini (de même que dans [1]) par la formule:

$$2.0.4.\quad (u,v)_1=\int_\Omega \operatorname{grad}u(\xi)\cdot\operatorname{grad}v(\xi)\,d\xi.$$

Dans le présent travail nous admettons une autre formule:

$$2.0.5.\quad (u,v)_1=\int_\Omega\sum_{i,k=1}^{m}p_{ik}(\xi)\frac{\partial u}{\partial\xi_i}\frac{\partial v}{\partial\xi_i}\,d\xi,$$

où la matrice symétrique $[p_{ik}(\xi)]$ est, en particulier, positive pour tout $\xi\in\Omega$; mais il n'existe aucun nombre $\gamma>0$ tel que l'inégalité $\sum_{i,k=1}^{m}p_{ik}(\xi)t_it_k\geqslant\gamma\sum_{j=1}^{m}t_j^2$ ait lieu pour tout $\xi\in\Omega$ et toute suite $t_1,\dots,t_m$ de nombres réels. Il s'ensuit que la norme générée par le produit scalaire 2.0.5 est essentiellement plus faible que celle qui est générée par 2.0.4. À ce fait se rattache le problème assez important suivant: la solution généralisée de l'équation 2.0.1. n'est pas, en général, une fonction de classe C^2; c'est plutôt un élément d'un espace H_1 formé par le complément de l'ensemble M des fonctions admettant des dérivées jusqu'au degré 2. Le complément mentionné ci-dessus est compris au sens de la norme $\|\ \|_1$ générée par le produit scalaire $(\ ,\ )_1$, auquel la fonctionnelle $\Psi(u,h)$ était supposée comparable. Mais, d'autre part, pour que les éléments de l'espace H_1 soient des fonctions au sens propre, il faut admettre l'hypothèse suivante (fondamentale pour la théorie de Friedrichs):

$$2.0.6.\quad \|u\|_1^2\geqslant\gamma\int_\Omega|u(\xi)|^2d\xi \text{ avec un } \gamma>0, \text{ pour tout } u\in M.$$

Cette hypothèse est toujours satisfaite (si Ω est borné) pour la norme générée par 2.0.4, mais pas nécessairement pour celle qui est générée par 2.0.5; nous établirons dans ce qui suit des conditions suffisantes pour que cela ait bien lieu. À vrai dire nous obtenons des résultats un peu plus forts, notamment nous trouvons des conditions suffisantes pour que toute fonction $u\in C^1(\Omega)$ satisfasse aux inégalités:

$$2.0.7.\quad \text{(i)}\ \int_\Omega|u(\xi)|^2d\xi\leqslant\mu_1\int_{\Gamma_*}|u(\xi)|^2d\Gamma_*+\mu_2\int_\Omega p(\xi)\operatorname{grad}u(\xi)\cdot\operatorname{grad}u(\xi)\,d\xi$$

$$\text{(ii)}\ \int_{\Gamma_*}|u(\xi)|^2d\Gamma_*\leqslant\mu_3\int_\Omega|u(\xi)|^2d\xi+\mu_4\int_\Omega p(\xi)\operatorname{grad}u(\xi)\cdot\operatorname{grad}u(\xi)\,d\xi,$$

où $\Gamma_*\subset\Gamma=\partial\Omega$ et les nombres μ_i ne dépendent pas de u. Les inégalités 2.0.7 (i), (ii) constituent une certaine généralisation des inégalités connues de K. Friedrichs et de S. L. Sobolev. Une des conséquences de 2.0.7 est l'inégalité fondamentale 2.0.6, valable pour les fonctions $u\in C^1(\Omega)$ avec la condition aux limites: $u|\Gamma_*=0$. Elle nous permettra de résoudre les équations faiblement elliptiques non linéaires avec la condition $u|\Gamma_* = 0$ au lieu de $u|\Gamma = 0$, ce qui constitue une nouveauté par rapport aux autres travaux sur ce sujet.

Parmi les travaux qui traitent de l'application de l'analyse fonctionnelle aux équations faiblement elliptiques nous ne citons que ceux de S. Michlin [3] et de Višik [4]; les hypothèses admises par ces deux auteurs sont assez exigeantes par rapport à l'ensemble Ω: celui-ci doit avoir une forme spéciale, dite *forme étoilée*. Dans le présent travail nous demandons seulement que Ω soit borné et que son bord Γ satisfasse aux conditions de Lapunov.

2.1. Notations, définitions et hypothèses. Maintenons en vigueur toutes les notations de la première partie, telles que: $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{R}^m$, $\xi\cdot\eta$, $|\xi|$ etc., en particulier celles qui concernent les matrices.

Par $C^k(Z)$ nous entendons l'ensemble de toutes les fonctions définies sur $Z \subset \boldsymbol{R}^m$ admettant toutes leurs dérivées jusqu'à l'ordre k uniformément continues sur Z. Dans ce qui suit nous considérons les difféomorphismes de classe C^1; nous les appellerons *C^1-difféomorphismes*.

Soit Ω un sous-ensemble ouvert de $\boldsymbol{R}^m$, borné et simplement connexe, dont le bord $\Gamma = \partial\Omega$ remplit les conditions de Lapunov. À tout point $\xi \in \Omega$ faisons correspondre une matrice $p(\xi) = [p_{ik}(\xi)]$, $i, k = 1, \ldots, m$, réelle, symétrique et positive et notons:

2.1.1. Hypothèse. (i) $p_{ik}(\xi) = p_{ki}(\xi)$ $(i, k = 1, \ldots, m)$,

(ii) $$\sum_{i,k=1}^{m} p_{ik}(\xi)t_i t_k \geqslant \gamma(\xi)\sum_{j=1}^{m} t_j^2, \quad avec\ \gamma(\xi) > 0.$$

(Comme on l'a dit plus haut, il peut arriver que $\gamma(\xi_n) \to 0$ si $\xi_n \to \Gamma$.) On tire de 2.1.1 qu'il existe une matrice $q(\xi) = [q_{ik}(\xi)]$, l'inverse de $p(\xi)$, symétrique et positive:

2.1.2. $$q(\xi) = [p(\xi)]^{-1}, \quad [q(\xi)]^* = q(\xi), \quad q(\xi)\eta\cdot\eta \geqslant \mu(\xi)|\eta|^2$$
$$\text{si } \xi \in \Omega, \text{ avec un } \mu(\xi) > 0.$$

Remarquons qu'en vertu de la première partie l'hypothèse 2.1.1 peut être écrite brièvement:

$$p(\xi) = [p(\xi)]^*, \quad p(\xi)\eta\cdot\eta \geqslant \gamma(\xi)|\eta|^2, \quad (\eta \in \boldsymbol{R}^m).$$

Dans ce qui suit les matrices dépendant de l'argument $\xi \in \Omega$ seront appelées fonctions-matrices: $p(\xi)$ et $q(\xi)$ en sont des exemples.

Avant de formuler les autres hypothèses il nous faudra introduire quelques nouvelles notions.

Soient: L un hyperplan dans $\boldsymbol{R}^m$, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ le verseur orthogonal à L, $S \subset L$ la fermeture d'un domaine ouvert et borné de L dont le bord remplit les conditions de Lapunov (dans L).

2.1.3. Définition. Appelons *cylindre* tout sous-ensemble Q de $\boldsymbol{R}^m$ de la forme:

(i) $$Q = [\eta + s\lambda:\ \eta \in S,\ 0 \leqslant s \leqslant \tau], \quad \tau \in \boldsymbol{R}.$$

En d'autres termes, un cylindre est le produit orthogonal de S par le segment $\tau\lambda$, ce que nous notons:

2.1.4. $Q = S \oplus \tau\lambda$.

Il s'ensuit que l'application:

$$Q \ni \xi = \eta + s\lambda \mapsto \langle \eta, s\rangle \in S \times \langle 0, 1\rangle$$

est unitair; par conséquent on a, pour toute fonction $g(\xi)$ continue sur Q:

2.1.5. $$\int_Q g(\xi)\,d\xi = \int_S \int_0^\tau g(\eta + s\lambda)\,ds\,d\eta.$$

La définition suivante est fondamentale pour notre méthode:

2.1.6. Définition. Nous disons qu'un cylindre $Q = S \oplus \lambda\tau$ est *normal par rapport à l'ensemble Ω* (tout court: *normal*) s'il existe deux functions $\varphi(\eta)$, $\psi(\eta)$ définies pour $\eta \in S$ et de classe C^1 dans S, remplissant les conditions suivantes:

(i) $$0 \leqslant \varphi(\eta) \leqslant \psi(\eta) \leqslant \tau \quad (\eta \in S),$$
(ii) $$\psi(\eta) - \varphi(\eta) \geqslant \vartheta > 0 \quad (\eta \in S),$$
(iii) $$0 \leqslant s \leqslant \varphi(\eta) \Rightarrow \eta + s\lambda \notin \Omega,$$
(iv) $$\eta + \varphi(\eta)\lambda \in \Gamma = \partial\Omega,$$
(v) $$\varphi(\eta) \leqslant s \leqslant \psi(\eta) \Rightarrow \eta + s\lambda \in \overline{\Omega},$$
(vi) $$\psi(\eta) < s \leqslant \tau \Rightarrow \eta + s\lambda \notin \overline{\Omega}.$$

Soit $Q = S \oplus \tau\lambda$ un cylindre normal. L'application $S \ni \eta \mapsto \eta + \varphi(\eta)\lambda$ définit, en vertu de (iv), un sous-ensemble Γ' de Γ, ce que nous notons:

2.1.7. Définition. $\Gamma' = [\eta + \varphi(\eta)\lambda:\ \eta \in S]$.

Comme λ est orthogonal à S et φ, ψ sont de classe C^1, les mesures dS et $d\Gamma'$ (des éléments superficiels) satisfont aux inégalités $dS \leqslant d\Gamma' \leqslant c\cdot dS$ avec une constante $c > 0$. Il en résulte le lemme évident:

2.1.8. Lemme. *Il existe (pour un cylindre normal) un nombre $c > 0$ tel que pour toute fonction continue et non négative sur S on a*

(i) $$\int_S g(\eta + \varphi(\eta)\cdot\lambda)\,d\eta \leqslant \int_{\Gamma'} g(\xi)\,d\Gamma' \leqslant c\int_S g(\eta + \varphi(\eta)\lambda)\,d\eta.$$

Admettons l'hypothèse fondamentale:

2.1.9. HYPOTHÈSE. *Il existe une suite finie de cylindres normaux: $Q_i = S_i \oplus \tau_i \lambda_i$ $(i = 1, \ldots, N)$, ainsi qu'une suite de nombres positifs: $\beta_1, \ldots, \beta_N$, telles que*

$$\text{(i)} \qquad \bar{\Omega} \subset \bigcup_{i=1}^{N} Q_i,$$

$$\text{(ii)} \qquad \int_{\varphi_i(\eta)}^{\psi_i(\eta)} \|q(\eta+s\lambda_i)\|_* ds \leqslant \beta_i \quad (i = 1, \ldots, N)$$

(*pour* q *et* $\| \ \|_*$ v. 2.1.2 et 1.1.5). *Les notations: $S_i, \lambda_i, \varphi_i, \psi_i$ correspondent aux notations $S, \lambda, \varphi, \psi$ de la définition* 2.1.3.

Posons, de même que dans 2.1.7:

2.1.10. DÉFINITION. $\Gamma_i = [\eta+\varphi(\eta)\cdot\lambda_i\colon \eta \in S_i]$, $(i = 1, \ldots, N)$, $\Gamma_* = \bigcup_{i=1}^{N} \Gamma_i$.

Conformément à 2.1.8, il existe une suite de nombres: $c_1, \ldots, c_N$ telle que

2.1.11. LEMME. *Pour toute fonction continue non négative sur Γ les inégalités suivantes ont lieu:*

$$\text{(i)} \qquad \int_{S_i} g(\eta+\varphi_i(\eta)\lambda_i)\, d\eta \leqslant \int_{\Gamma_i} g(\xi)\, d\Gamma \leqslant C_i \int_{S_i} g(\eta+\varphi_i(\eta)\lambda_i)\, d\eta, \qquad i = 1, \ldots, N.$$

2.2. Inégalités fondamentales. Nous établirons dans cette section quelques inégalités intégro-différentielles, valables pour les fonctions de classe C^1 définies sur des cylindres, sur des ensembles difféomorphes avec un cylindre, enfin sur Ω.

2.2.1. LEMME. *Soit $Q = S \oplus \tau\lambda$ un cylindre normal, $v(\xi)$ une fonction de classe C^1 sur $Q \cap \Omega$. Admettons: Hypothèse:*

$$(1) \qquad \int_{\varphi(\eta)}^{\psi(\eta)} \|q(\eta+s\lambda)\|_* ds \leqslant \beta \quad \textit{avec un } \beta > 0.$$

Conclusion:

$$\left\{\int_{\varphi(\eta)}^{\psi(\eta)} \left|\frac{\partial}{\partial s} v(\eta+s\lambda)\right| ds\right\}^2 \leqslant \beta \int_{\varphi(\eta)}^{\psi(\eta)} p(\eta+s\lambda)\operatorname{grad} v(\eta+s\lambda)\cdot\operatorname{grad} v(\eta+s\lambda)\, ds.$$

Démonstration. Soit $\eta \in S$ fixé; alors on a:

$$\text{(a)} \qquad \int_{\varphi(\eta)}^{\psi(\eta)} \left|\frac{\partial}{\partial s} v(\eta+s\lambda)\right| ds = \int_{\varphi(\eta)}^{\psi(\eta)} |\operatorname{grad} v(\eta+s\lambda)\cdot\lambda|\, ds$$

$$= \int_{\varphi(\eta)}^{\psi(\eta)} \left|\sqrt{p(\eta+s\lambda)}\operatorname{grad} v(\eta+s\lambda)\cdot\sqrt{q(\eta+s\lambda)}\,\lambda\right| ds$$

$$\leqslant \int_{\varphi(\eta)}^{\psi(\eta)} \left|\sqrt{p(\eta+s\lambda)}\operatorname{grad} v(\eta+s\lambda)\right|\cdot\left|\sqrt{q(\eta+s\lambda)}\,\lambda\right| ds$$

$$\leqslant \left\{\int_{\varphi(\eta)}^{\psi(\eta)} \left|\sqrt{p(\eta+s\lambda)}\operatorname{grad} v(\eta+s\lambda)\right|^2 ds\right\}^{1/2}\cdot\left\{\int_{\varphi(\eta)}^{\psi(\eta)} \left|\sqrt{q(\eta+s\lambda)}\,\lambda\right|^2 ds\right\}^{1/2}$$

$$= \left\{\int_{\varphi(\eta)}^{\psi(\eta)} q(\eta+s\lambda)\lambda\cdot\lambda\, ds\right\}^{1/2}\cdot\left\{\int_{\varphi(\eta)}^{\psi(\eta)} p(\eta+s\lambda)\operatorname{grad} v(\eta+s\lambda)\cdot\operatorname{grad} v(\eta+s\lambda)\, ds\right\}^{1/2},$$

d'où l'assertion, vu que $\|q(\xi)\| \leqslant \|q(\xi)\|_*$ et $|\lambda| = 1$, de sorte que l'on a $\int_{\varphi(\eta)}^{\psi(\eta)} q(\eta+s\lambda)\lambda\cdot\lambda\, ds \leqslant \int_{\varphi(\eta)}^{\psi(\eta)} \|q(\eta+s\lambda)\|_* ds \leqslant \beta$. ∎

2.2.2. LEMME. *Soient $Q = S \oplus \tau\lambda$ un cylindre quelconque, $\bar{p}(\xi) = [\bar{p}_{ik}(\xi)]_{i,k=1,\ldots,m}$, $\xi \in Q$, une fonction-matrice définie sur Q, continue et symétrique sur S, positive pour $\xi \in \operatorname{int}(Q)$. (Admettons que $\bar{q}(\xi) \stackrel{\mathrm{df}}{=} [\bar{p}(\xi)]^{-1}$ satisfait à l'hypothèse:* (1) $\int_0^\tau \|\bar{q}(\eta+s\lambda)\|_* ds \leqslant \bar{\beta}$ $(\eta \in S)$.)

Conclusion: pour toute fonction $v \in C^1(Q)$ ont lieu les inégalités suivantes:

$$\text{(i)} \qquad \int_Q |v(\xi)|^2 d\xi \leqslant 2\tau \int_S |v(\eta)|^2 d\eta + 2\tau\bar{\beta} \int_Q \bar{p}(\xi)\operatorname{grad} v(\xi)\cdot\operatorname{grad} v(\xi)\, d\xi.$$

$$\text{(ii)} \qquad \int_S |v(\eta)|^2 d\eta \leqslant 2\tau^{-1} \int_Q |v(\xi)|^2 d\xi + 2\bar{\beta} \int_Q \bar{p}(\xi)\operatorname{grad} v(\xi)\cdot\operatorname{grad} v(\xi)\, d\xi.$$

Démonstration. Dans le lemme 2.2.1 remplaçons Ω, $p(\xi)$ et β respectivement par Q, $\bar{p}(\xi)$ et $\bar{\beta}$. Alors Q devient un cylindre normal par rapport à lui-même et le rôle des fonctions: $\varphi(\eta)$ et $\psi(\eta)$ est joué par les constantes 0 et τ. Soit $v \in C^1(Q)$; en vertu de 2.2.1 on a

$$\text{(a)} \qquad \left\{\int_0^\tau \left|\frac{\partial}{\partial s} v(\eta+s\lambda)\right| ds\right\}^2 \leqslant \bar{\beta} \int_0^\tau \bar{p}(\eta+s\lambda)\operatorname{grad} v(\eta+s\lambda)\cdot\operatorname{grad} v(\eta+s\lambda)\, ds.$$

D'autre part, un calcul élémentaire fournit:

$$\text{(b)} \qquad |v(\eta+t\lambda)|^2 \leqslant \{|v(\eta)| + |v(\eta+t\lambda)-v(\eta)|\}^2 \leqslant \left\{|v(\eta)| + \int_0^t \left|\frac{\partial}{\partial s} v(\eta+s\lambda)\right| ds\right\}^2$$

$$\leqslant 2|v(\eta)|^2 + 2\left\{\int_0^\tau \left|\frac{\partial}{\partial s} v(\eta+s\lambda)\right| ds\right\}^2,$$

d'où l'on obtient, en vertu de (a):

(c) $$|v(\eta+t\lambda)|^2 \leqslant 2|v(\eta)|^2+2\bar\beta\int_0^\tau \bar p(\eta+s\lambda)\operatorname{grad} v(\eta+s\lambda)\cdot\operatorname{grad} v(\eta+s\lambda)\,ds.$$

En intégrant les deux membres de (c) successivement par rapport à t sur $\langle 0,1\rangle$ et à η sur S, on obtient (i). Pour établir (ii) remarquons que l'on a évidemment:

(d) $$|v(\eta)| \leqslant |v(\eta+t\lambda)|+|v(\eta+t\lambda)-v(\eta)| \leqslant v(\eta+t\lambda)+\int_0^\tau\left|\frac{\partial}{\partial s}v(\eta+s\lambda)\right|ds,$$

d'où l'on tire, en vertu de (a):

(e) $$|v(\eta)|^2\leqslant 2|v(\eta+t\lambda)|^2+2\bar\beta\int_0^\tau \bar p(\eta+s\lambda)\operatorname{grad} v(\eta+s\lambda)\cdot\operatorname{grad} v(\eta+s\lambda)\,ds.$$

En intégrant (e) par rapport à t et η on obtient (ii). ■

Les inégalités (i) et (ii) du lemme 2.2.2 peuvent être généralisées en remplaçant le cylindre Q par un ensemble Z qui est l'image C^1-difféomorphe de Q.

Avant de formuler un lemme qui s'y rattache, faisons quelques remarques. Soient: Q un cylindre, Z un sous-ensemble de $\boldsymbol{R}^m$, f un C^1-difféomorphisme appliquant Q sur Z, $g \overset{\text{df}}{=} f^{-1}$. Pour tout $\xi\in Q$ (resp. $\zeta\in Z$) la dérivée $f'(\xi)$ (resp. $g'(\zeta)$) constitue alors une application linéaire de $\boldsymbol{R}^m$ sur lui-même, continue uniformément par rapport à ξ (resp. ζ); à tout point $\xi\in Q$ (resp. $\zeta\in Z$) on peut donc faire correspondre les quantités: $\operatorname{Det}[f'(\xi)]$, $\operatorname{Det}[g'(\zeta)]$, de même que les normes absolues: $\|f'(\xi)\|_*$ et $\|g'(\zeta)\|_*$. Soit $\Gamma_0 \overset{\text{df}}{=} f(S)$; l'élément superficiel $d\Gamma_0$ s'expriment par $f(\xi)$ et, réciproquement, dS par $g(\zeta)$, les inégalités: $d\Gamma_0\leqslant\gamma_1 dS$, $dS\leqslant\gamma_2 d\Gamma_0$ ont lieu avec certaines constantes γ_1,γ_2. Il en résulte le lemme évident:

2.2.3. Lemme. *Pour toute fonction $v(\xi)$ (resp. $u(\zeta)$) continue sur S (resp. sur Γ_0) on a*

(i) $$\int_{\Gamma_0}|u(\zeta)|^2 d\Gamma_0\leqslant\gamma_1\int_S|uf(\eta)|^2 d\eta,$$

(ii) $$\int_S|v(\eta)|^2 d\eta\leqslant\gamma_2\int_{\Gamma_0}|uf^{-1}(\zeta)|^2 d\Gamma_0.$$

La démonstration est évidente. Nous établirons maintenant le

2.2.4. Lemme. *Soient: $Q = S\oplus\tau\lambda$ un cylindre, $\tilde p(\xi) = [\tilde p_{ik}(\xi)]_{i,k=1,\dots,m}$, $\xi\in Q$, une fonction-matrice continue sur $\operatorname{int}(Q)$, symétrique et positive sur $\operatorname{int}(Q)$, et satisfaisant à l'inégalité*

(1) $$\int_0^\tau\|\tilde q(\eta+s\lambda)\|_* ds\leqslant\tilde\beta,\quad \text{où}\quad \tilde q(\xi) = [\tilde p(\xi)]^{-1}.$$

Soient, de plus: $Z\subset\boldsymbol{R}^m$ et $f\in Q\to Z$ un C^1-difféomorphisme appliquant Q sur Z et conservant l'orientation. Posons enfin $G_0\overset{\text{df}}{=}f(S)$.

Conclusion: Il existe des nombres positifs: $\mu_1,\dots,\mu_4$, tels que pour toute fonction $u\in C^1(Z)$ on ait:

(i) $$\int_Z|u(\zeta)|^2 d\zeta\leqslant\mu_1\int_{G_0}|\mu(\zeta)|^2 dG_0+\mu_2\int_Z\tilde p(f^{-1}(\zeta))\operatorname{grad} u(\zeta)\cdot\operatorname{grad} u(\zeta)\,d\zeta,$$

(ii) $$\int_{G_0}|u(\zeta)|^2 d\Gamma_0\leqslant\mu_3\int_Z|u(\zeta)|^2 d\zeta+\mu_4\int_Z\tilde p(f^{-1}(\zeta))\operatorname{grad} u(\zeta)\cdot\operatorname{grad} u(\zeta)\,d\zeta.$$

Démonstration. Attendu les remarques faites ci-dessus et vu que $f(\xi)$ conserve l'orientation, il existe des nombres positifs $\delta_1,\delta_2,\delta_3$ tels que l'on ait, en posant $g\overset{\text{df}}{=}f^{-1}$:

(a) $$\|f'(\xi)\|_*\leqslant\delta_1,$$

(b) $$0<\operatorname{Det}[g'(\zeta)]\leqslant\delta_2\qquad(\xi\in Q,\ \zeta\in Z),$$

(c) $$0<\operatorname{Det}[f'(\xi)]\leqslant\delta_3.$$

Posons, pour $\xi\in Q$

(d) $$\bar p(\xi)\overset{\text{df}}{=}\operatorname{Det}[f'(\xi)]\cdot[f'(\xi)]^{-1}\tilde p(\xi)\cdot\{[f'(\xi)]^*\}^{-1}.$$

La fonction-matrice $\bar p(\xi)$ ainsi définie satisfait à toutes les hypothèses du lemme 2.2.2. En effet, $\bar p(\xi)$ est continue, symétrique et positive sur $\operatorname{int}(Q)$, puisqu'il en est ainsi de $\tilde p(\xi)$. De plus, l'hypothèse (1) du N° 2.2.2 est satisfaite avec $\bar\beta = \delta_1^2\delta_2\tilde\beta$, car

(e) $$\bar q(\xi)\overset{\text{df}}{=}[\bar p(\xi)]^{-1} = \operatorname{Det}[g'(f(\xi))]\cdot[f'(\xi)]^*\cdot\tilde q(\xi)f'(\xi)\quad(\xi\in\operatorname{int}(Q)),$$

d'où l'on obtient, en tenant compte de (a) et (b):

(f) $$\|\bar q(\xi)\|_*\leqslant\sup_{\zeta\in Z}|\operatorname{Det}[g'(\zeta)]|\cdot\sup_{\xi\in Q}\|f'(\xi)\|_*^2\cdot\|\tilde q(\xi)\|_*\leqslant\delta_1^2\delta_2\|\tilde q(\xi)\|_*,$$

et par conséquent

(g) $$\int_0^\tau\|\bar q(\eta+s\lambda)\|_* ds\leqslant\delta_1^2\delta_2\int_0^\tau\|\tilde q(\eta+s\lambda)\|_* ds\leqslant\delta_1^2\delta_2\tilde\beta = \bar\beta.$$

Soit $u\in C^1(Z)$. En posant: $v(\xi)\overset{\text{df}}{=}u(f(\xi))$ $(\xi\in Q)$ on a:

(h) $$\operatorname{grad} v(\xi) = [f'(\xi)]^*\cdot\operatorname{grad} u(f'(\xi)) = [f'(\xi)]^*\cdot\operatorname{grad} v(\zeta)/\zeta = f(\xi),$$

comme on le calcule facilement suivant la règle de différentiation d'une fonction composée. Établissons ensuite l'identité:

(j) $$\int_Z\tilde p(f^{-1}(\zeta))\operatorname{grad} u(\zeta)\cdot\operatorname{grad} u(\zeta)\,d\zeta = \int_Q\bar p(\xi)\operatorname{grad} v(\xi)\cdot\operatorname{grad} v(\xi)\,d\xi.$$

Or, si dans le second membre de (j) on remplace $\overline{p}(\xi)$ et $\operatorname{grad} v(\xi)$ par leurs valeurs données par (d) et (h), celui-ci devient, en exécutant un calcul évident, égal à

$$\int_Q \operatorname{Det}[f'(\xi)]\tilde{p}(\xi)\operatorname{grad} u(f(\xi))\cdot\operatorname{grad} u(f(\xi))\,d\xi,$$

d'où l'on obtient le premier membre de (j) en substituant la variable: $\xi = g(\zeta) = f^{-1}(\zeta)$ et en tenant compte du fait que $\operatorname{Det}(D\xi/D\zeta) = \operatorname{Det}[g'(\zeta)] = \{\operatorname{Det}[f'(\xi)]\}^{-1}$. Or, le lemme 2.2.2 et les inégalités 2.2.3 donnent, pour $u \in C^1(Z)$ et $v(\xi) = u(f(\xi))$:

$$\begin{aligned}
&\int_Z |u(\zeta)|^2 d\zeta \\
&= \int_Q |u(f(\xi))|^2\cdot\operatorname{Det}[f'(\xi)]\,d\xi \\
&\leqslant \sup_{\xi\in Q}|\operatorname{Det}[f'(\xi)]|\cdot\int_Q |v(\xi)|^2 d\xi \\
&\leqslant \delta_3\Big\{2\tau\int_S |v(\eta)|^2 d\eta + 2\overline{\beta}\tau\int_Q \overline{p}(\xi)\operatorname{grad} v(\xi)\cdot\operatorname{grad} v(\xi)\,d\xi \\
&\leqslant 2\tau\delta_3\gamma_2\int_{\Gamma_0} |v(g(\zeta))|^2 d\Gamma_0 + 2\delta_3\overline{\beta}\tau\int_Z \tilde{p}(f^{-1}(\zeta))\operatorname{grad} u(\zeta)\operatorname{grad} u(\zeta)\,d\zeta,
\end{aligned}$$

ce qui prouve (i), avec $\mu_1 \overset{\mathrm{df}}{=} 2\tau\delta_3\gamma_2$, $\mu_2 \overset{\mathrm{df}}{=} 2\tau\delta_1^2\delta_3\overline{\beta}$. Pour démontrer (ii) faisons usage de 2.2.3 (i), 2.2.2 (ii) et (j); on obtient:

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_0} |u(\zeta)|^2 d\Gamma_0 &\leqslant \gamma_1\int_S |u(f(\eta))|^2 d\eta = \gamma_1\int_S |v(\eta)|^2 d\eta \\
&\leqslant \gamma_1\Big\{2\tau^{-1}\int_Q |v(\xi)|^2 d\xi + 2\overline{\beta}\int_Q \overline{p}(\xi)\operatorname{grad} v(\xi)\cdot\operatorname{grad} v(\xi)\,d\xi\Big\} \\
&= 2\tau^{-1}\gamma_1\int_Q |u(f(\xi))|^2 d\xi + 2\overline{\beta}\gamma_1\int_Z \tilde{p}(f^{-1}(\zeta))\operatorname{grad} u(\zeta)\cdot\operatorname{grad} u(\zeta)\,d\zeta,
\end{aligned}$$

d'où il vient (ii), avec les constantes: $\mu_3 = 2\tau^{-1}\gamma_1\delta_2$, $\mu_4 = 2\delta_1^2\delta_2\gamma_1$, en tenant compte du fait que

$$\begin{aligned}
\int_Q |u(f(\xi))|^2 d\xi &\leqslant \int_Z |u(\zeta)|^2\cdot\operatorname{Det}[g'(\zeta)]\,d\zeta \\
&\leqslant \sup_{\zeta\in Z}|\operatorname{Det}[g'(\zeta)]|\cdot\int_Z |u(\zeta)|^2 d\zeta \leqslant \delta_2|u(\zeta)|^2 dS
\end{aligned}$$

en vertu de (b). ∎

Montrons maintenant que si le cylindre Q est normal par rapport à Ω, le lemme 2.2.4 peut être appliqué à l'ensemble $Z \overset{\mathrm{df}}{=} Q\cap\Omega$.

2.2.5. Lemme. *Admettons que l'ensemble Ω et la fonction-matrice $p(\zeta)$ $(\zeta\in\Omega)$ vérifient toutes les hypothèses de la section* 2.1. *Soient: $Q = S\oplus\tau\lambda$ un cylindre normal par rapport à Ω* (v. 2.1.6), $\Gamma' \overset{\mathrm{df}}{=} [\eta+\varphi(\eta)\lambda$: $\eta\in S]$ (v. 2.1.7), $q(\xi) \overset{\mathrm{df}}{=} [p(\xi)]^{-1}$. (*Enfin admettons l'hypothèse*

$$\int_{\varphi(\eta)}^{\psi(\eta)} \|q(\eta+s\lambda)\|_* ds \leqslant \beta \quad (\eta\in S) \text{ avec un } \beta > 0.)$$

Conclusion: il existe quatre nombres positifs $\mu_1,\ldots,\mu_4$ tels que l'on ait, pour toute fonction $u\in C^1(\Omega)$:

$$\text{(i)}\quad \int_{Q\cap\Omega} |u(\zeta)|^2 d\zeta \leqslant \mu_1\int_{\Gamma'} |u(\zeta)|^2 d\Gamma' + \mu_2\int_{Q\cap\Omega} p(\zeta)\operatorname{grad} u(\zeta)\cdot\operatorname{grad} u(\zeta)\,d\zeta,$$

$$\text{(ii)}\quad \int_{\Gamma'} |u(\zeta)|^2 d\zeta \leqslant \mu_3\int_{Q\cap\Omega} |u(\zeta)|^2 d\Gamma' + \mu_4\int_{Q\cap\Omega} p(\zeta)\operatorname{grad} u(\zeta)\cdot\operatorname{grad} u(\zeta)\,d\zeta.$$

Démonstration. Tout point ξ de Q est de la forme (v. 2.1.3)

$$\text{(a)}\qquad \xi = \eta+s\lambda \quad (\eta\in S,\ s\in\langle 0,\tau\rangle).$$

Cette représentation est unique vu que $\eta\cdot\lambda = 0$ pour $\eta\in S$. Définissons maintenant l'application f en posant:

$$\text{(b)}\qquad f(\xi) = f(\eta+s\lambda) \overset{\mathrm{df}}{=} \eta+\tau^{-1}[s\psi(\eta)+(\tau-s)\varphi(\eta)]\lambda.$$

Or f applique Q sur $Q\cap\Omega$ tout entier, d'une façon biunivoque. En effet, la condition: $\xi \overset{\mathrm{df}}{=} \eta+s\lambda\in Q = S\oplus\tau\lambda$ (resp. $\zeta \overset{\mathrm{df}}{=} \eta+t\lambda\in Q\cap\Omega$) équivaut, d'après 2.1.3 (resp. 2.1.6) à la condition: $s\in\langle 0,\tau\rangle$ (resp. $t\in\langle\varphi(\eta),\psi(\eta)\rangle$). D'autre part, l'application:

$$\text{(c)}\qquad s\mapsto t \overset{\mathrm{df}}{=} \tau^{-1}[s\psi(\eta)+(\tau-s)\varphi(\eta)]$$

transforme l'intervalle $\langle 0,\tau\rangle$ en l'intervalle $\langle\varphi(\eta),\psi(\eta)\rangle$ tout entier d'une façon biunivoque, ce qui prouve notre assertion. De plus, on a pour $\eta\in S$: $f(\eta) = f(\eta+0\cdot\lambda) = \eta+\varphi(\eta)\lambda$, ce qui veut dire, en vertu de 2.1.7, que

$$\text{(d)}\qquad f(S) = \Gamma'.$$

Calculons $g \overset{\mathrm{df}}{=} f^{-1}$; la formule (b) définissant f équivaut à (e):

$$\text{(e)}\qquad \begin{aligned}\eta+t\lambda = f(\eta+s\lambda) &\Leftrightarrow t = \tau^{-1}[s\psi(\eta)+(\tau-s)\varphi(\eta)] \\ &\Leftrightarrow s = \tau[t-\varphi(\eta)]\cdot[\psi(\eta)-\varphi(\eta)]^{-1},\end{aligned}$$

d'où l'on obtient:

$$\text{(f)}\qquad g(\zeta) = f^{-1}(\zeta) = f^{-1}(\eta+t\lambda) = \eta+\tau[t-\varphi(\eta)][\psi(\eta)-\varphi(\eta)]^{-1} \quad \text{si}\quad \zeta = \eta+t\lambda\in Q\cap\Omega.$$

Les formules (b) et (f) définissant f et f^{-1} peuvent être exprimées par les variables ξ et ζ seules, sans l'aide de η ou s. En effet, Q étant un cylindre, on a $\eta\cdot\lambda = 0$ pour $\eta \in S$ (v. 2.1.3), d'où l'on tire, en tenant compte de (a):

$$\text{(g)} \qquad s = \xi\cdot\lambda, \qquad \eta = \xi - s\lambda = \xi - (\xi\cdot\lambda)\lambda.$$

Il suffit alors de remplacer dans (b) (resp. (f)) les quantités s et η par leurs valeurs donées par (g). Les fonctions φ et ψ étant de classe C^1 (v. 2.1.6), il en est de même des applications f et f^{-1}, puisque $\psi(\eta)-\varphi(\eta) \geqslant \vartheta > 0$ en vertu de 2.1.6 (ii).

Définissons maintenant une nouvelle fonction-matrice $\tilde{p}(\xi)$ sur Q, en posant

$$\text{(h)} \qquad \tilde{p}(\xi) \stackrel{\text{df}}{=} p\big(f(\xi)\big), \qquad \tilde{q}(\xi) \stackrel{\text{df}}{=} [\tilde{p}(\xi)]^{-1} = q\big(f(\xi)\big), \qquad (\xi \in Q).$$

$\tilde{p}(\xi)$ est évidemment symétrique, positive et continue sur $\operatorname{int}(Q)$, car $p(\xi)$ l'est. De plus, en vertu de l'hypothèse (1) on a

$$\text{(j)} \qquad \int_0^\tau \|\tilde{q}(\eta+s\lambda)\|_* ds = \int_0^\tau \big\|q\big(f(\eta+s\lambda)\big)\big\|_* ds$$

$$= \int_0^\tau \big\|q\big(\eta+\tau^{-1}[s\psi(\eta)+(\tau-s)\varphi(\eta)]\cdot\lambda\big)\big\|_* ds$$

$$= \int_{\varphi(\eta)}^{\psi(\eta)} \|q(\eta+t\lambda)\|_*\cdot\tau[\psi(\eta)-\varphi(\eta)]^{-1} dt \qquad \text{pour} \quad \eta \in S.$$

On déduit de (a)–(j) que toutes les hypothèses du lemme 2.2.4 resteront satisfaites si l'on y remplace Z, $\tilde{\beta}$, G_0 respectivement par $Q\cap\Omega$, $\beta\tau\vartheta^{-1}$ et Γ'. Il existe alors, conformément à la conclusion du lemme 2.2.4, des nombres $\mu_1, \ldots, \mu_4$ tels que pour toute fonction $u \in C^1(Q\cap\Omega)$ les inégalités suivantes ont lieu:

$$\text{(k)} \qquad \int_{Q\cap\Omega} |u(\zeta)|^2 d\zeta \leqslant \mu_1 \int_{\Gamma'} |u(\zeta)|^2 d\Gamma' + $$
$$+\mu_2 \int_{Q\cap\Omega} \tilde{p}\big(f^{-1}(\zeta)\big)\operatorname{grad} u(\zeta)\cdot\operatorname{grad} u(\zeta)\, d\zeta,$$

$$\text{(l)} \qquad \int_{\Gamma'} |u(\zeta)|^2 d\Gamma' \leqslant \mu_3 \int_{Q\cap\Omega} |u(\zeta)|^2 d\zeta + $$
$$+\mu_4 \int_{Q\cap\Omega} \tilde{p}\big(f^{-1}(\zeta)\big)\operatorname{grad} u(\zeta)\cdot\operatorname{grad} u(\zeta)\, d\zeta.$$

Or, la conclusion de notre lemme équivaut à (k) et (l), puisque

$$\tilde{p}\big(f^{-1}(\zeta)\big) = p\big(f\cdot f^{-1}(\zeta)\big) = p(\zeta). \blacksquare$$

Le lemme 2.2.5 peut être généralisé en remplaçant l'ensemble $Q\cap\Omega$ par un ensemble Z, difféomorphe avec $Q\cap\Omega$. Plus exactement, on a le lemme suivant:

2.2.6. LEMME. *Maintenons en vigueur toutes les notations et les hypothèses du lemme 2.2.5 et soit h un C^1-difféomorphisme appliquant l'ensemble $Q\cap\Omega$ sur un ensemble $Z \subset \mathbf{R}^m$, d'ailleurs arbitraire: $Z = h(Q\cap\Omega)$; soit encore $G' = h(\Gamma') \subset G \stackrel{\text{df}}{=} \partial Z$.*

Conclusion: Il existe des nombres $\mu_1, \ldots, \mu_4$ tels que pour toute fonction $u \in C^1(Z)$ les inégalités suivantes ont lieu:

$$\text{(i)} \qquad \int_Z |u(\zeta)|^2 d\zeta \leqslant \mu_1 \int_{G'} |u(\zeta)|^2 dG' + \mu_2 \int_Z p\big(h^{-1}(\zeta)\big)\operatorname{grad} u(\zeta)\cdot\operatorname{grad} u(\zeta)\, d\zeta,$$

$$\text{(ii)} \qquad \int_{G'} |u(\zeta)|^2 dG' \leqslant \mu_3 \int_Z |u(\zeta)|^2 d\zeta + \mu_4 \int_Z p\big(h^{-1}(\zeta)\big)\operatorname{grad} u(\zeta)\cdot\operatorname{grad} u(\zeta)\, d\zeta.$$

Démonstration. Nous nous en rapporterons à la démonstration du lemme 2.2.5. Soit f l'application qui y est définie par la formule (b). Or, les hypothèses du lemme 2.2.4 seront satisfaites si l'on y pose: $\tilde{p}(\xi) \stackrel{\text{df}}{=} p\big(f(\xi)\big)$ pour $\xi \in Q$ et si l'on y remplace f par $f_1 \stackrel{\text{df}}{=} h\circ f$. En effet, l'hypothèse (1) du lemme 2.2.4 équivaut à (j) de la démonstration de 2.2.5 (en vertu de (h)); de plus, f_1 est évidemment un C^1-difféomorphisme de Q sur Z; enfin on a $f_1(S) = h\big(f(S)\big) = h(\Gamma') = G'$ en vertu de (d) du No 2.2.5 et de la définition de G'. La conclusion de notre lemme découle immédiatement de 2.2.4 (i), (ii), vu que $\tilde{p}\big(f_1^{-1}(\zeta)\big) = p\big(f(h\circ f)^{-1}(\zeta)\big) = p\big(h^{-1}(\zeta)\big)$. $\blacksquare$

Nous établirons maintenant un théorème fondamental, qui nous servira à la construction de certains espaces de fonctions.

2.2.7. THÉORÈME. *Admettons que l'ensemble Ω et la fonction-matrice $p(\xi)$, définie sur Ω, satisfont à toutes les hypothèses du No 2.1, en particulier à 2.1.9. Soient, de plus: h le C^1-difféomorphisme appliquant Ω sur Z, $G = \partial Z$ et $G_* \stackrel{\text{df}}{=} h(\Gamma_*)$ (v.2.1.10).*

Conclusion: Il existe des nombres positifs $\mu_1, \ldots, \mu_4$ tels que pour toute fonction $u \in C^1(Z)$ on ait les inégalités suivantes:

$$\text{(i)} \qquad \int_Z |u(\zeta)|^2 d\zeta \leqslant \mu_1 \int_{G_*} |u(\zeta)|^2 dG_* + \mu_2 \int_Z p\big(h^{-1}(\zeta)\big)\operatorname{grad} u(\zeta)\cdot\operatorname{grad} u(\zeta)\, d\zeta,$$

$$\text{(ii)} \qquad \int_{G_*} |u(\zeta)|^2 dG_* \leqslant \mu_3 \int_Z |u(\zeta)|^2 d\zeta + \mu_4 \int_Z p\big(h^{-1}(\zeta)\big)\operatorname{grad} u(\zeta)\cdot\operatorname{grad} u(\zeta)\, d\zeta.$$

Démonstration. Considérons la suite finie de cylindres $Q_1, Q_2, \ldots \ldots, Q_N$ figurant dans l'énoncé de l'hypothèse 2.1.9 et posons: $Z_i \stackrel{\text{df}}{=} h(Q_i \cap \Omega)_{i=1,\ldots,N}$. Or, chacun des Q_i étant normal et Z_i étant une image C^1-difféomorphe de $Q_i\cap\Omega$, le lemme 2.2.6 reste vrai si l'on y remplace Q, Γ', Z, G' par Q_i, Γ_i, Z_i, $G_i \stackrel{\text{df}}{=} h(\Gamma_i)$ respectivement (cf. 2.1.9). Il vient donc, pour toute fonction $u \in G'(Z)$:

(a) $$\int_{Z_i} |u(\zeta)|^2 d\zeta \leqslant \mu_{i1} \int_{G_i} |u(\zeta)|^2 dG_i + \mu_{i2} \int_{Z_i} p\big(h^{-1}(\zeta)\big) \operatorname{grad} u(\zeta) \cdot \operatorname{grad} u(\zeta) d\zeta,$$

(b) $$\int_{G_i} |u(\zeta)|^2 dG_i \leqslant \mu_{i3} \int_{Z_i} |u(\zeta)|^2 d\zeta + \mu_{i4} \int_{Z_i} p\big(h^{-1}(\zeta)\big) \operatorname{grad} u(\zeta) \cdot \operatorname{grad} u(\zeta) d\zeta,$$

avec certaines constantes μ_{ij}, $i = 1, \ldots, N$, $j = 1, \ldots, 4$, indépendantes de u. Or, comme $Z = \bigcup_1^N Z_i$ (v. 2.1.9), on tire de (a):

(c) $$\begin{aligned} \int_Z |u(\zeta)|^2 d\zeta &\leqslant \sum_{i=1}^N \int_{Z_i} |u(\zeta)|^2 d\zeta \\ &\leqslant \sum_{i=1}^N \mu_{i1} \int_{G_i} |u(\zeta)|^2 dG_i + \sum_{i=1}^N \mu_{i2} \int_{Z_i} p\big(h^{-1}(\zeta)\big) \operatorname{grad} u(\zeta) \cdot \operatorname{grad} u(\zeta) d\zeta \\ &\leqslant \mu_1 \int_{G_*} |u(\zeta)|^2 dG_* + \mu_2 \int_Z p\big(h^{-1}(\zeta)\big) \operatorname{grad} u(\zeta) \cdot \operatorname{grad} u(\zeta) d\zeta, \end{aligned}$$

avec $\mu_k \overset{\text{df}}{=} \sum_{i=1}^N \mu_{ik}$, $k = 1, \ldots, 4$, vu que $G_* = \bigcup_1^N G_i = \bigcup_1^N h(\Gamma_i) = h\big(\bigcup_1^N \Gamma_i\big) = h(\Gamma_*)$. L'inégalité (i) est ainsi démontrée; la démonstration de (ii) est tout à fait pareille et s'appuie sur (b). ∎

Il est évident que dans 2.2.7 on peut remplacer Z et G_* par Ω et Γ_*; il suffit de poser $h =$ identité, de sorte que l'on obtient:

2.2.8. Théorème. *Si Ω et $p(\xi)$ $(\xi \in \Omega)$ satisfont aux hypothèses du No 2.1, on a, pour $u \in C^1(\Omega)$:*

(i) $$\int_\Omega |u(\xi)|^2 d\xi \leqslant \mu_1 \int_{\Gamma_*} |u(\xi)|^2 d\Gamma_* + \mu_2 \int_\Omega p(\xi) \operatorname{grad} u(\xi) \cdot \operatorname{grad} u(\xi) d\xi,$$

(ii) $$\int_{\Gamma_*} |u(\xi)|^2 d\Gamma_* \leqslant \mu_3 \int_\Omega |u(\xi)|^2 d\xi + \mu_4 \int_\Omega p(\xi) \operatorname{grad} u(\xi) \cdot \operatorname{grad} u(\xi) d\xi,$$

où $\mu_1, \ldots, \mu_4$ sont indépendantes de u.

2.3. Certains espaces de fonctions. Soient, comme auparavant, $\Omega \subset \boldsymbol{R}^m$ et $\Gamma = \partial\Omega$. Nous maintenons en vigueur toutes les notations et les hypothèses du No 2.1; on peut donc admettre, d'après le théorème 2.2.7, que les inégalités 2.0.7 ont lieu pour toute fonction $u \in C^1(\Omega)$, les nombres μ_i et le sous-ensemble Γ_* de $\partial\Omega$ ne dépendant pas de u. Pour $u, v \in \mathscr{L}^2(\Omega)$ posons, comme d'habitude:

2.3.1. Définition. $(u, v) = \int_\Omega u(\xi) v(\xi) d\xi$, $\|u\| = (u, u)^{1/2}$.

Si $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_m)$ est un système de fonctions $v_i \in \mathscr{L}^2(\Omega)$, on écrit: $\vec{v} \in \big(\mathscr{L}^2(\Omega)\big)^m$ et on pose:

2.3.2. $(\vec{u}, \vec{v}) \overset{\text{df}}{=} \sum_1^m (u_i, v_i) = \int_\Omega \sum_{i=1}^m u_i(\xi) v_i(\xi) d\xi$, $\|\vec{v}\| = (\vec{v}, \vec{v})^{1/2}$.

Remarquons que toute fonction $u \in \mathscr{L}^2(\Omega)$ admet toutes les dérivées partielles: $\dfrac{\partial u}{\partial \xi_i}$, $i = 1, \ldots, m$ au sens des distributions. En effet, pour toute fonction fondamentale $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ et tout sous-ensemble mesurable $\Omega' \subset \Omega$ l'intégrale

$$\int_{\Omega'} u(\xi) \frac{\partial \varphi(\xi)}{\partial \xi} d\xi$$

existe et constitue une fonctionnelle linéaire et continue par rapport à φ, au sens de la convergence admise dans l'espace des fonctions fondamentales. En général, la distribution $\dfrac{\partial u}{\partial \xi_i}$ n'est plus une fonction. Cela posé, définissons l'espace H_* comme il suit:

2.3.3. Définition. La fonction u appartient à H_* si et seulement si (i) $u \in \mathscr{L}^2(\Omega)$, (ii) les dérivées $\dfrac{\partial u}{\partial \xi_i}$ sont mesurables, (iii) l'intégrale: $\int_\Omega p(\xi) \operatorname{grad} u(\xi) \cdot \operatorname{grad} u(\xi) d\xi$ existe.

Les conditions (i), (ii) et (iii) sont équivalentes à

(iv) $\sqrt{p} \operatorname{grad} u \in \big(\mathscr{L}^2(\Omega)\big)^m$.

Pour $u, v \in H_*$ posons:

2.3.4. Définition. (i) $(u, v)_1 \overset{\text{df}}{=} \int_\Omega p(\xi) \operatorname{grad} u(\xi) \cdot \operatorname{grad} v(\xi) d\xi = (\sqrt{p} u, \sqrt{p} v)$ au sens de l'espace $\big(\mathscr{L}^2(\Omega)\big)^m$ (v. 2.3.2),

(ii) $\|u\|_1 = (u, u)_1^{1/2} = \|\sqrt{p} u\|$,

(iii) $(u, v)_* = (u, v) + (u, v)_1$, $\|u\|_*^2 = (u, u)_* = \|u\|^2 + \|u\|_1^2$.

Nous allons montrer que l'espace H_* avec la norme $\| \, \|_*$ est complet; la démonstration sera précédée d'un lemme.

2.3.5. Définition. $\Omega_\varepsilon \overset{\text{df}}{=} [\xi \in \Omega \colon \operatorname{dist}(\xi, \Gamma) \geqslant \varepsilon]$ $(\varepsilon > 0)$.

2.3.6. Lemme. *Il existe une fonction réelle positive $\varrho(\varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$ telle que*

(i) $$\sum_{i=1}^m \varrho_{ij}(\xi) t_i t_j \geqslant \varrho(\varepsilon) \sum_{k=1}^m t_k^2 \quad \textit{pour} \quad t_1, \ldots, t_m \in \boldsymbol{R}, \quad \xi \in \Omega_\varepsilon, \ \varepsilon > 0.$$

Démonstration. Pour $\varepsilon > 0$ définissons un sous-ensemble $Z_\varepsilon \subset \Omega \times \boldsymbol{R}^m$ et une fonction réelle $F(\xi, t)$ sur Z_ε:

(a) $$\langle \xi, t\rangle \in Z_\varepsilon \overset{\mathrm{df}}{\Leftrightarrow} \xi \in \Omega_\varepsilon \text{ et } |t|^2 = \sum_{i=1}^m t_i^2 = 1,$$

(b) $$F(\xi, t) \overset{\mathrm{df}}{=} \sum_{i,j=1}^m p_{ij}(\xi) t_i t_j = p(\xi) t\cdot t.$$

L'ensemble Z_ε étant fermé et borné, donc compact, dans $\boldsymbol{R}^m \times \boldsymbol{R}^m$ et la fonction continue F y étant positive, selon 2.1.1 (ii), il existe un nombre $\varrho(\varepsilon)$ tel que

(c) $$\sum_{i,j=1}^m p_{ij}(\xi) t_i t_j = F(\xi, t) \geqslant \varrho(\varepsilon) \quad \text{pour} \quad \xi \in \Omega_\varepsilon \text{ et } \sum_{i=1}^m t_i^2 = 1$$

et alors la conclusion (i) découle immédiatement de (c). ∎

2.3.7. Théorème. *L'espace H_* est complet au sens de la norme* $\|\ \|_*$.

Démonstration. Définissons pour $\varepsilon > 0$ certaines seminormes dans les espaces $\mathscr{L}^2(\Omega)$ resp. $(\mathscr{L}^2(\Omega))^m$:

(a) $$\|u\|_\varepsilon^2 \overset{\mathrm{df}}{=} \int_{\Omega_\varepsilon} |u(\xi)|^2 d\xi \quad \text{pour} \quad u \in \mathscr{L}^2(\Omega),$$

(b) $$\|\vec{v}\|_\varepsilon^2 \overset{\mathrm{df}}{=} \int_{\Omega_\varepsilon} \sum_{i=1}^m |v_i(\xi)|^2 d\xi = \sum_{i=1}^m \|v_i\|_\varepsilon^2$$
$$\text{pour} \quad \vec{v} = (v_1, \ldots, v_m) \in (\mathscr{L}^2(\Omega))^m.$$

Les seminormes: (a) resp. (b) sont en même temps normes dans les espaces $\mathscr{L}^2(\Omega_\varepsilon)$ resp. $(\mathscr{L}^2(\Omega_\varepsilon))^m$. Remarquons aussi que l'application: $\vec{v} \mapsto \sqrt{p}\vec{v}$ est un homéomorphisme de $(\mathscr{L}^2(\Omega_\varepsilon))^m$ en lui-même. En effet, pour $\vec{v} \in (\mathscr{L}^2(\Omega_\varepsilon))^m$ on a, en vertu de 2.3.6 (en y remplaçant t_i par v_i):

(c) $$\|\vec{v}\|_\varepsilon^2 = \int_{\Omega_\varepsilon} |\vec{v}(\xi)|^2 d\xi \leqslant \frac{1}{\varrho(\varepsilon)} \int_{\Omega_\varepsilon} p(\xi)\vec{v}(\xi)\cdot\vec{v}(\xi)\, d\xi$$
$$= \frac{1}{\varrho(\varepsilon)} \|\sqrt{p}\,\vec{v}\|_\varepsilon^2 \leqslant \sup_{\xi\in\Omega} \|p(\xi)\|_* \cdot [\varrho(\varepsilon)]^{-1} \int_{\Omega_\varepsilon} |\vec{v}(\xi)|^2 d\xi,$$

d'où (c). Soit: $u_n \in H_*$ et $\|u_n - u_k\|_* \to 0$ $(n, k \to \infty)$. D'après la définition 2.3.4 de $\|\ \|_*$ cela veut dire que

(d) $$\|u_n - u_k\| \to 0 \quad \text{dans} \quad \mathscr{L}^2(\Omega),$$

(e) $$\|\sqrt{p}\,\mathrm{grad}\, u_n - \sqrt{p}\,\mathrm{grad}\, u_k\| \to 0 \quad (n, k \to \infty).$$

La convergence (e) est entendue dans l'espace $(\mathscr{L}^2(\Omega))^m$ (v. 2.3.3 (iv)).

Les espaces $\mathscr{L}^2(\Omega)$ et $(\mathscr{L}^2(\Omega))^m$ étant complets, il existe une fonction $u \in \mathscr{L}^2(\Omega)$ et une fonction-vecteur $\vec{w} = (w_1, \ldots, w_m) \in (\mathscr{L}^2(\Omega))^m$ telles que

(f) $$\|u - u_n\| \to 0 \quad \text{dans} \quad \mathscr{L}^2(\Omega),$$

(g) $$\|\vec{w} - \sqrt{p}\,\mathrm{grad}\, u_n\| \to 0 \quad \text{dans} \quad (\mathscr{L}^2(\Omega))^m.$$

D'autre part, on tire de (e) et (c) pour $\varepsilon > 0$:

(h) $$\|\mathrm{grad}\, u_n - \mathrm{grad}\, u_k\|_\varepsilon \leqslant [\varrho(\varepsilon)]^{-1/2} \cdot \|\sqrt{p}\,\mathrm{grad}\, u_n - \sqrt{p}\,\mathrm{grad}\, u_k\|_\varepsilon$$
$$\leqslant [\varrho(\varepsilon)]^{-1/2} \|\sqrt{p}\,\mathrm{grad}\, u_n - \sqrt{p}\,\mathrm{grad}\, u_k\| \to 0.$$

L'espace $(\mathscr{L}^2(\Omega_\varepsilon))^m$ étant complet, il y existe une fonction-vecteur $\vec{v}_\varepsilon$ telle que:

(j) $$\|\vec{v}_\varepsilon - \mathrm{grad}\, u_n\|_\varepsilon \to 0,$$

donc, comme la convergence distributive est plus faible que celle suivant la norme $\|\ \|_\varepsilon$, aussi

(k) $$\mathrm{grad}\, u_n \to \vec{v}_\varepsilon \quad \text{au sens distributif sur } \Omega_\varepsilon.$$

Mais (f) entraîne que $\mathrm{grad}\, u_n \to \mathrm{grad}\, u$ au sens distributif sur Ω tout entier, en particulier sur Ω_ε; de là et de (k) on déduit que $\vec{v}_\varepsilon = \mathrm{grad}\, u|\Omega_\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, donc

(l) $$\vec{v}_\varepsilon = \mathrm{grad}\, u|\Omega_\varepsilon$$

d'où, en vertu de (j), il vient

(m) $$\|\mathrm{grad}\, u - \mathrm{grad}\, u_n\|_\varepsilon \to 0 \quad \text{dans} \quad (\mathscr{L}^2(\Omega))^m,$$

ce qui entraîne, avec (c),

(n) $$\|\sqrt{p}\,\mathrm{grad}\, u - \sqrt{p}\,\mathrm{grad}\, u_n\|_\varepsilon \to 0 \quad (n \to \infty).$$

D'autre part, (g) entraîne que $\|\vec{w} - \sqrt{p}\,\mathrm{grad}\, u_n\|_\varepsilon \to 0$ (vu que $\|\vec{w}\|_\varepsilon \leqslant \|\vec{w}\|$). On en tire, en tenant compte de (n) et de l'unicité de la limite dans $(\mathscr{L}^2(\Omega))^m$:

(o) $$\vec{w}(\xi) = \sqrt{p(\xi)}\cdot \mathrm{grad}\, u(\xi) \quad (\xi \in \Omega_\varepsilon),$$

donc aussi pour tout $\xi \in \Omega$, puisque $\Omega = \bigcup_{\varepsilon>0} \Omega_\varepsilon$. Il en découle que $\sqrt{p}\,\mathrm{grad}\, u$ est un élément de $(\mathscr{L}^2(\Omega))^m$, $\vec{w}$ l'étant. Cela veut dire, d'après la définition 2.3.3 (iv), que $u \in H_*$. Enfin, en vertu de (o) et (g) on a $\|\sqrt{p}\,\mathrm{grad}\, u - \sqrt{p}\,\mathrm{grad}\, u_n\| \to 0$ ou bien, en d'autres termes: $\|u - u_n\|_1 \to 0$ (cf. 2.3.4), ce qui entraîne, en vertu de 2.3.4 et (f): $\|u - u_n\|_* \to 0$. ∎

Définissons maintenant certains sous-ensembles linéaires:

2.3.8. Définition. $u \in M \overset{\mathrm{df}}{\Leftrightarrow} u \in C^1(\Omega)$ et $u(\xi) = 0$ pour $\xi \in \Gamma_*$.

De 2.2.8 (i) on tire

2.3.9. $\|u\|_1^2 \geqslant \lambda \|u\|^2$ pour $u \in M$, avec $\lambda \overset{\mathrm{df}}{=} \mu_2^{-1}$.

2.3.10. Lemme. *Pour $u \in M$ les normes: $\|u\|_1$ et $\|u\|_*$ sont équivalentes.*

La démonstration découle immédiatement de la définition 2.3.4 (iii) de $\|u\|_*$ et de 2.3.9.

2.3.11. Définition. $H_1 = \overline{M}$ est la fermeture de M dans H_* au sens de la norme $\| \ \|_*$.

Pour $u \in H_1$ définissons $\|u\|_1$ comme le prolongement continu de $\|u\|_1$ sur M, ce qu'on note:

2.3.12. $\|u\|_1 \overset{\mathrm{df}}{=} \lim_n \|u_n\|_1$ si $u_n \in M$ $(n = 1, 2, \ldots)$,

$\|u_n - u\|_* \to 0$ $(n \to \infty)$.

Le lemme suivant est évident.

2.3.13. Lemme. *Dans l'espace H_1 les normes: $\| \ \|_1$ et $\| \ \|_*$ sont équivalentes; H_1 est un espace complet au sens de la norme $\| \ \|_1$.*

2.3.14. Lemme. $H_1 \cap C^1(\Omega) = M$.

Démonstration. On a d'abord: $H_1 \cap C^1(\Omega) \supset M$, puisque $H_1 \supset M$ et $C^1(\Omega) \supset M$ en vertu de la définition 2.3.8 de M et la définition 2.3.11 de H_1. Nous allons montrer que $H_1 \cap C^1(\Omega) \subset M$. La fonctionelle quadratique

(a) $$g(u) \overset{\mathrm{df}}{=} \int_{\Gamma_*} |u(\xi)|^2 d\Gamma_*$$

est bien déterminée et positive sur $H_1 \cap C^1(\Omega)$ et, de plus, elle satisfait à l'inégalité

(b) $$g(u) \leqslant (\mu_2\mu_3 + \mu_4)\|u\|_1^2 \qquad (u \in C^1(\Omega))$$

en vertu de 2.2.8 (ii) et 2.3.9. On en tire que g est continue sur $H_1 \cap C^1(\Omega)$. Or, g étant identiquement nulle sur M, g s'annule aussi sur H_1, vu que M est dense dans H_1 au sens de la norme $\| \ \|_1$ (v. 2.3.8, 2.3.11). Il vient donc: $u(\xi) = 0$ pour $\xi \in \Gamma_*$. ■

2.4. Équations faiblement elliptiques non linéaires. Soient $f_i(t, \xi) = f_i(t_1, \ldots, t_m, \xi)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ des fonctions de classe C^1 par rapport aux variables $t = (t_1, \ldots, t_m) \in \mathbf{R}^m$, $\xi \in \Omega$. Posons:

2.4.1. Définitions.

(i) $$a_{ik}(t_1, \ldots, t_m, \xi) \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{\partial}{\partial t_k} f_i(t_1, \ldots, t_m, \xi),$$

(ii) $$a(t, \xi) \overset{\mathrm{df}}{=} [a_{ik}(t, \xi)]_{i,k=1,\ldots,m},$$

(iii) $$f(t, \xi) = (f_1(t, \xi), \ldots, f_m(t, \xi)) \quad \text{pour} \quad t = (t_1, \ldots, t_m) \in \mathbf{R}^m, \ \xi \in \Omega.$$

Alors $f(t, \xi) \in \mathbf{R}^m$ si $t \in \mathbf{R}^m$ et $\xi \in \Omega$.

2.4.2. Hypothèse. *Il existe deux nombres positifs α, μ tels que pour tout système: $t, s, r \in \mathbf{R}^m$ et $\xi \in \Omega$ les inégalités suivantes ont lieu:*

(i) $$|a(t, \xi)s \cdot r|^2 \leqslant \mu[p(\xi)s \cdot s][p(\xi)r \cdot r],$$

(ii) $$a(t, \xi)s \cdot s \geqslant \alpha p(\xi)s \cdot s.$$

Définissons la fonctionnelle $\Psi(u, h)$: soit $b \in \mathscr{L}^2(\Omega)$ un élément arbitraire fixé. Posons:

2.4.3. Définition.

$$\Psi(u, h) \overset{\mathrm{df}}{=} \int_\Omega f(\operatorname{grad} u(\xi), \xi)d\xi + (b, h)$$
$$= \int_\Omega \sum_{i=1}^m f_i(\operatorname{grad} u(\xi), \xi)\frac{\partial h}{\partial \xi_i} d\xi + \int_\Omega b(\xi)h(\xi)d\xi.$$

2.4.4. Lemme. *Pour $u, g, h \in M$ on a:*

(i) $$|\Psi'(u, g, h)| \leqslant \mu\|g\|_1 \cdot \|h\|_1,$$

(ii) $$\Psi'(u, h, h) \geqslant \alpha\|h\|_1^2.$$

Démonstration. Les fonctions u, g, h appartenant à $C^1(\Omega)$, la limite suivante existe:

(a) $$\Psi'(u, g, h) \overset{\mathrm{df}}{=} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}[\Psi(u + \varepsilon g, h) - \Psi(u, h)] < \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \Psi(u + \varepsilon g, h)\Big|_{\varepsilon=0}$$
$$= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \int_\Omega \sum_{i=1}^m f_i(\operatorname{grad} u(\xi) + \varepsilon \operatorname{grad} g(\xi), \xi) \cdot \frac{\partial h}{\partial \xi_i} d\xi\Big|_{\varepsilon=0}$$
$$= \int_\Omega \sum_{i,k=1}^m a_{ik}(\operatorname{grad} u(\xi), \xi)\frac{\partial h}{\partial \xi_i}\frac{\partial g}{\partial \xi_k} d\xi$$
$$= \int_\Omega a(\operatorname{grad} u(\xi), \xi)\operatorname{grad} g(\xi) \cdot \operatorname{grad} h(\xi)d\xi \qquad (\text{v. } 2.4.1).$$

En substituant dans 2.4.2 (i): $\operatorname{grad} u(\xi)$, $\operatorname{grad} g(\xi)$, $\operatorname{grad} h(\xi)$ au lieu de t, s, r resp., on obtient, en tenant compte de (a):

$$|\Psi'(u, g, h)| \leqslant \int_\Omega \mu|\sqrt{p(\xi)}\operatorname{grad} g(\xi)| \cdot |\sqrt{p(\xi)}\operatorname{grad} h(\xi)|d\xi$$
$$\leqslant \mu\Big\{\int_\Omega p(\xi)\operatorname{grad} g(\xi) \cdot \operatorname{grad} g(\xi)d\xi\Big\}^{1/2} \times$$
$$\times \Big\{\int_\Omega p(\xi)\operatorname{grad} h(\xi) \cdot \operatorname{grad} h(\xi)d\xi\Big\}^{1/2} = \mu\|g\|_1 \cdot \|h\|_1.$$

Tout pereillement, en remplaçant dans 2.4.2 (ii) t resp. s par $\operatorname{grad} u(\xi)$ resp. $\operatorname{grad} h(\xi)$, on obtient

$$\Psi'(u, h, h) = \int_{\Omega} a\big(\operatorname{grad} u(\xi), \xi\big) \operatorname{grad} h(\xi)\cdot\operatorname{grad} h(\xi)\, d\xi$$
$$\geqslant \int_{\Omega} a\cdot p(\xi) \operatorname{grad} h(\xi)\cdot\operatorname{grad} h(\xi)\, d\xi = a\|h\|_1^2 . \ \blacksquare$$

Au moyen d'une intégration évidente faite sur 2.4.4 (i) et (ii), on obtient facilement

2.4.5. (i) $|\Psi(u+f, h) - \Psi(u, h)| \leqslant \mu\|f\|_1\cdot\|h\|_1$,
(ii) $\Psi(u+h, h) - \Psi(u, h) \geqslant a\|h\|_1^2$ pour $u, f, h \in M$.

De plus, pour $u = 0$ la fonctionnelle $\Psi(0, h)$ est linéaire et bornée dans M par rapport à h, ce qu'on note:

2.4.6. $|\Psi(0, h)| \leqslant c_0\|h\|_1$ pour $h \in M$,

avec un c_0 indépendant de h. De là et de 2.4.5 on tire que $\Psi(u, h)$ remplit la condition de Lipschitz localement dans $M\times M$ par rapport au couple: u, h. Par conséquent $\Psi(u, h)$ peut être étendue „par continuité" et d'une façon unique à tout l'espace $H_1\times H_1$, de sorte que les inégalités 2.4.5 restent en vigueur. Cette fonctionnelle étendue sera désignée par le même signe Ψ. En vertu de [1] (No 1.3, p. 157) il existe un seul élément $u\in H_1$ tel que:

2.4.7. $\Psi(u, h) = 0$ pour tout $h \in M$.

Nous allons montrer que cet élément u est une solution généralisée de l'équation 2.0.1; plus exactement, nous établirons le

2.4.8. Théorème. *Si la fonction $u_0 \in H_1$ satisfait à 2.4.7 et si, de plus, $u \in C^2(\Omega)$, on a:*

(i) $$-\operatorname{div} f\big(\operatorname{grad} u_0(\xi), \xi\big) + b(\xi) = 0 \quad (\xi\in\Omega),$$
(ii) $$u_0(\xi) = 0 \quad (\xi \in \Gamma_*),$$
(iii) $$f\big(\operatorname{grad} u_0(\xi), \xi\big)\cdot\nu(\xi) = 0 \quad (\xi \in \Gamma\setminus\Gamma_*)$$

où $\nu(\xi)$ désigne le vecteur normal à Γ au point $\xi\in\Gamma$.

Démonstration. Posons, pour abréger:

(a) $$\vec{v}(\xi) = f\big(\operatorname{grad} u_0(\xi), \xi\big), \quad \text{ou bien} \quad \vec{v}(\xi) = \big(v_1(\xi), \ldots, v_m(\xi)\big),$$
$$\text{où} \quad v_i(\xi) \overset{\text{df}}{=} f_i\big(\operatorname{grad} u(\xi), \xi\big) \ (i = 1, \ldots, m).$$

Or, l'équation 2.4.7 peut être écrite:

(b) $$0 = \Psi(u_0, h) = \int_{\Omega} \vec{v}(\xi)\cdot\operatorname{grad} h(\xi)\, d\xi + \int_{\Omega} b(\xi) h(\xi)\, d\xi$$
$$= \int_{\Omega} [-\operatorname{div}\vec{v}(\xi) + b(\xi)] h(\xi)\, d\xi + \int_{\Gamma} \big(\vec{v}(\xi)\cdot\nu(\xi)\big) h(\xi)\, d\Gamma$$

pour tout $h\in M$. Posons, pour $\varepsilon > 0$:

(c) $$u\in M_\varepsilon \Leftrightarrow u\in C^1(\Omega) \text{ et } u(\xi) = 0 \quad \text{pour } \xi\notin\Omega_\varepsilon \quad (\text{v. } 2.3.5).$$

On a évidemment: $M_\varepsilon \subset M$ et $h(\xi) = 0$ si $h\in M_\varepsilon$ et $\xi\in\Gamma$. Alors (b) entraîne, pour $h\in M_\varepsilon$:

(d) $$\int_{\Omega_\varepsilon} [-\operatorname{div}\vec{v}(\xi) + b(\xi)] h(\xi)\, d\xi = 0 \quad (h\in M_\varepsilon).$$

On tire de là: $-\operatorname{div}\vec{v}(\xi) + b(\xi) = 0$ pour $\xi\in M_\varepsilon$, vu que M_ε est dense dans $\mathscr{L}^2(\Omega_\varepsilon)$. Par conséquent

(e) $$-\operatorname{div}\vec{v}(\xi) + b(\xi) = 0 \quad \text{pour} \quad \xi\in\Omega,$$

car $\Omega = \bigcup_{\varepsilon>0}\Omega_\varepsilon$. Ainsi (i) est démontré; (ii) découle de 2.3.14. Pour établir (iii) posons $\Gamma_0 \overset{\text{df}}{=} \Gamma\setminus\Gamma_*$; on tire de (b) et de (e):

(f) $$\int_{\Omega} [\vec{v}(\xi)\cdot\nu(\xi)] h(\xi)\, d\Gamma = 0 \quad (\text{pour } h\in M),$$

d'où en tenant compte du fait que $h(\xi) = 0$ pour $h\in M$ et $\xi\in\Gamma_*$ (v. 2.3.8)

(g) $$\int_{\Gamma_0} [\vec{v}(\xi)\cdot\nu(\xi)] h(\xi)\, d\Gamma_0 = 0 \quad (h\in M).$$

D'autre part, toute fonction définie et continue sur Γ et s'annulant sur Γ_* peut être étendue à une fonction $h(\xi)$ de classe $C^1(\Omega)$; cette fonction appartient donc à M (v. 2.3.8), de sorte que (g) entraîne:

(h) $$\int_{\Gamma_0} [\vec{v}(\xi)\cdot\nu(\xi)] g(\xi)\, d\Gamma = 0$$

pour toute fonction g continue sur Γ, d'où l'on tire: $\vec{v}(\xi)\cdot\nu(\xi) = 0$ pour $\xi\in\Gamma_0 = \Gamma\setminus\Gamma^*$. $\blacksquare$

2.4.9. Remarque. Le théorème 2.4.8 reste vrai si l'on ajoute au premier membre de l'équation 2.4.8 (i) le terme $(Bu)(\xi)$, où B désigne une opération linéaire bornée et non négative dans $H = \mathscr{L}^2(\Omega)$, ce qu'on note:

$$\|Bu\| \leqslant \beta\|u\|, \quad (Bu, u)\geqslant 0 \quad (u\in H).$$

Dans ce but il suffit de définir une nouvelle fonctionnelle: $\Psi_1(u, h) \overset{\text{df}}{=} \Psi(u, h) + (Bu, h)$ et de procéder ensuite en suivant l'ordre d'idées adopté dans la démonstration du théorème 2.4.8 (cf. aussi 1.4).

Travaux cités

[1] T. Leżański, *Sur les équations du type*: $\Psi(x, h) = 0$ (I) Studia Math. 59 (1976), 155–175.
[2] F. Riesz et B. Sz. Nagy *Leçons d'analyse fonctionnelle*, Budapest 1952.
[3] [M. M. Smirnov] М. М. Смирнов, *Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения*, Москва 1966.
[4] [M. I. Višik] М. И. Вишик, *Краевое загачи для эллиптических уравнений вырождающихся на границе области*, Mat. Sb. 35/77.3 (1954), 513–568.

Received January 22, 1979 (1510)

STUDIA MATHEMATICA, T. LXXI. (1981)

A generalization of the Shimogaki theorem

by

LECH MALIGRANDA (Poznań)

Abstract. There are given a necessary condition and a sufficient condition for a rearrangement invariant space on $(0, l)$, $0 < l \leqslant \infty$ to have an interpolation property for the class of Lipschitz operators which are of weak type (X, X) and type (L^∞, L^∞) where X is any fixed rearrangement invariant space on $(0, l)$ from the class $\mathscr{L}$.

§ 1. Introduction. An operator T that maps a quasi-Banach space X to a quasi-Banach space Y is called a *Lipschitz operator* if $T0 = 0$ and if $\|Tf - Tg\|_Y \leqslant K\|f-g\|_X$, $f, g \in X$ for some $K > 0$. The smallest K in this inequality is called the *bound of* T. By $\operatorname{Lip}(X, Y; K)$ we denote the class of all Lipschitz operators T from X to Y with the bound not exceeding K. If $X = Y$, we write briefly $\operatorname{Lip}(X; K)$.

Now, let X be a rearrangement invariant space, $\Lambda(X)$ and $M^*(X)$ rearrangement invariant Lorentz spaces (see § 2), and let $\omega\text{-}\operatorname{Lip}(X; K_X) = \operatorname{Lip}(\Lambda(X), M^*(X); K_X)$ be a class of Lipschitz operators of weak type (X, X) with bound not exceeding K_X. We say that a Banach space Y such that $Y \subset \Lambda(X) + L^\infty$ has the *interpolation property for the class* $\omega\text{-}\operatorname{Lip}(X; K_X) \cap \operatorname{Lip}(L^\infty; K_\infty)$ if, for each $T \in \omega\text{-}\operatorname{Lip}(X; K_X) \cap \operatorname{Lip}(L^\infty; K_\infty)$, T can be considered as a Lipschitz operator from Y into itself.

W. Orlicz [13] has proved that any Orlicz space L^Φ on $(0, l)$ has the interpolation property for the class $\operatorname{Lip}(L^1; K_1) \cap \operatorname{Lip}(L^\infty; K_\infty)$ in the case when $l < \infty$.

G. G. Lorentz and T. Shimogaki [8] have generalized this theorem to the case of any rearrangement invariant space on $(0, l)$. They have also obtained this theorem in the case when $l = \infty$, under an additional assumption of continuity of the norm. In [10] an analogous theorem was obtained for the class $\operatorname{Lip}(l^1; K_1) \cap \operatorname{Lip}(c_0; K_0)$ and for rearrangement invariant sequence spaces. Next, a sufficient condition was given in [11] for a Banach function space Y on $(0, l)$ to have the interpolation property for the class $\operatorname{Lip}(L^p; K_p) \cap \operatorname{Lip}(L^\infty; K_\infty)$ and similarly for a Banach sequence space and for the class $\operatorname{Lip}(l^p; K_p) \cap \operatorname{Lip}(c_0; K_0)$. All theorems mentioned above deal with Lipschitz operators of strong type. Interpolation of Lipschitz operators of weak type has been considered by T. Shimogaki [15] who has given the following