Remark. $L^1([0,1])$ does not have an unconditional basis, so, even though it is of cotype 2 ([10], Lemma 1.1), we cannot deduce Theorem 6 from this proposition. We doubt that the proposition remains true without the hypothesis that E has an unconditional basis, but we do not have a counter-example.

10. Concluding remarks. We should like to thank the referee for several suggestions concerning the proofs in this paper. L. Dor and H.P. Rosenthal have given a sharper version of Proposition 5 with a different proof based on martingale inequalities.

References

[1] K. L. Chung, *A course in probability theory*, Academic Press, 1974.
[2] D. Dacunha-Castelle, *Indiscernability and exchangeability in L^p spaces*, Proc. Seminar on Random Series, Convex Sets and Geometry of Banach Spaces, Aarhus 1974.
[3] M. M. Day, *Normed linear spaces*, Springer-Verlag, 1962.
[4] P. Dodds, *Indices for Banach lattices*, Proc. Netherlands Acad. Sci. (A) 80 (1977), 73–86.
[5] D. H. Fremlin, *Topological Riesz spaces and measure theory*, Cambridge U.P., 1974.
[6] V. F. Gaposhkin, *Convergence and limit theorems for sequences of random variables*, Theor. Probability Appl. 17 (1972), 379–399.
[7] M. I. Kadec & A. Pełczyński, *Bases, lacunary sequences and complemented subspaces in the spaces L_p*, Studia Math. 21 (1962), 161–176.
[8] H. E. Lacey, *The isometric theory of classical Banach spaces*, Springer-Verlag, 1974.
[9] J. Lindenstrauss & L. Tzafriri, *Classical Banach spaces I*, Springer-Verlag, 1977.
[10] B. Maurey & G. Pisier, *Séries de variables aléatoires vectorielles indépendantes et propriétés géometriques des espaces de Banach*, Studia Math. 58 (1976), 45–90.
[11] P. A. Meyer, *Probability and potentials*, Blaisdell, 1966.
[12] J. Neveu, *Discrete-parameter martingales*, North-Holland, 1975.
[13] H. P. Rosenthal, *On quasi-complemented subspaces of Banach spaces with an appendix on compactness of operators from $L^p(\mu)$ to $L^r(\nu)$*, J. Functional Anal. 4 (1969), 176–214.
[14] — *On subspaces of L^p*, Ann. Math. 102 (1973), 344–373.
[15] — *A characterization of Banach spaces containing l^1*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 71 (1974), 2411–2413.

STATISTICAL LABORATORY
UNIVERSITY OF CAMBRIDGE
CAMBRIDGE

MATHEMATICS DEPARTMENT
UNIVERSITY OF ESSEX
COLCHESTER

Received July 17, 1979
Revised version October 17, 1979 (1446)

STUDIA MATHEMATICA, T. LXXI. (1982)

Inégalités à poids pour le projecteur de Bergman dans la boule unité de C^n

par

DAVID BÉKOLLÉ (Orléans)

Resumé. Dans la boule unité de C^n munie de la mesure $d\mu_a(\zeta) = (1-|\zeta|^2)^{a-1}d\mu(\zeta)$, où $a>0$ et μ est la mesure de Lebesgue, nous caractérisons les mesures boréliennes positives Ω pour lesquelles le projecteur de Bergman

1° s'étend en un opérateur continu de $L^p(d\Omega)$ dans lui-même, si $1<p<\infty$;

2° s'étend en un opérateur faiblement continu sur $L^1(d\Omega)$.

§ I. Introduction. $\boldsymbol{D} = \{z \in C^n: |z|<1\}$ est la boule unité de C^n; $d\mu_a(\zeta) = (1-|\zeta|^2)^{a-1}d\mu(\zeta)$, où $a>0$ et μ est la mesure de Lebesgue sur $C^n = \boldsymbol{R}^{2n}$. Nous désignons par $L^p(d\mu_a)$ les espaces de Lebesgue relatifs à μ_a, $1\leqslant p\leqslant\infty$.

La projection de Bergman $T_a f$ d'une fonction $f\in L^2(d\mu_a)$ sur le sous-espace de $L^2(d\mu_a)$ formé par les fonctions holomorphes est donnée, à une constante ne dépendant que de a et n près par

$$T_a f(z) = \int_D \frac{f(\zeta)}{(1-z\cdot\bar\zeta)^{n+a}}\, d\mu(\zeta),$$

où $z\cdot\bar\zeta = z_1\cdot\bar\zeta_1+\ldots+z_n\cdot\bar\zeta_n$, quand $z=\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ et $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$.

Il est bien connu que l'opérateur T_a s'étend en un opérateur continu de $L^p(d\mu_a)$ dans lui-même si $1<p<\infty$, et est faiblement continu sur $L^1(d\mu_a)$ (E.M. Stein [13], F. Forelli et W. Rudin [8]). Ceci se démontre de la façon suivante. Selon la théorie des intégrales singulières sur les espaces homogènes développée par R.R. Coifman et G. Weiss [5], si $\boldsymbol{D}$ est munie d'une pseudo-distance d pour lequelle le triplet $(\boldsymbol{D}, d, \mu_a)$ constitue un espace homogène et qu'on note $K_a(z,\zeta) = 1/(1-z\cdot\bar\zeta)^{n+a}$ le noyau du projecteur T_a, il suffit de démontrer que K_a vérifie

S1: il existe trois constantes β, C_1, C_2 telles que

$$|K_a(z,\zeta)-K_a(z,\zeta^0)| \leqslant C_1[d(\zeta,\zeta^0)]^\beta/[d(z,\zeta^0)]^{n+a+\beta},$$

quels que soient z, ζ, ζ^0, vérifiant $d(z,\zeta^0) > C_2 d(\zeta,\zeta^0)$.

C'est le cas quand sur $\boldsymbol{D}$ on prend la pseudo-distance d définie par

$$d(z,\zeta) = \big||z|-|\zeta|\big| + \big|1-z\bar\zeta/|z|\,|\zeta|\big|,$$

pseudo-distance qui au bord de $\boldsymbol{D}$ devient la distance de Koranyi (voir R.R. Coifman et G. Weiss [6]). On dit alors que T_a est une *intégrale singulière* sur l'espace homogène (X, d, μ_a).

Pour cette pseudo-distance d, K_a vérifie également

S2: il existe une constante C_3 telle que quels que soient z, ζ dans $\boldsymbol{D}$,

$$|K_a(z, \zeta)| \leqslant C_3 1/d(z, \zeta)^{n+a}.$$

Le but de cet article est de caractériser:

1° pour chaque p fixé, $1 < p < \infty$, toutes les mesures boréliennes positives sur $\boldsymbol{D}$ pour lesquelles T_a envoie continûment $L^p(d\Omega)$ dans lui-même;

2° toutes les mesures boréliennes positives pour lesquelles T_a est faiblement continu sur $L^1(d\Omega)$.

On connaît déjà une classe de mesures absolument continues $\omega d\mu_a$ pour lesquelles l'intégrale singulière T_a envoie continûment $L^p(\omega d\mu_a)$ dans lui-même, $1 < p < \infty$: c'est la classe (A_p) de Muckenhoupt ([11] et [10]) définie de la manière suivante:

DEFINITION 1. Une mesure $\omega d\mu_a$ est dans la classe (A_p) s'il existe une constante $C_p(\omega)$ telle que quelle que soit la pseudo-boule $B(\zeta, R) = \{z \in \boldsymbol{D}: d(z, \zeta) < R\}$, on a:

$$\left(\frac{1}{\mu_a(B(\zeta, R))} \int_{B(\zeta,R)} \omega\, d\mu_a\right)\left(\frac{1}{\mu_a(B(\zeta, R))} \int_{B(\zeta,R)} \omega^{-1/(p-1)}\, d\mu_a\right)^{p-1} \leqslant C_p(\omega).$$

De même, on connaît une classe de mesures absolument continues $\omega d\mu_a$ pour lesquelles T_a est faiblement continu sur $L^1(\omega d\mu_a)$. Pour l'introduire, nous utilisons la définition suivante:

DÉFINITION 2. Soit sur $\boldsymbol{D}$ une fonction f localement sommable par rapport à μ_a. La fonction maximale de Hardy—Littlewood de f relative à la pseudo-distance d et à μ_a, que l'on note $M_a f$ est définie par:

$$M_a f(z) = \sup_B \frac{1}{\mu_a(B)} \int_B |f(\zeta)|\, d\mu_a(\zeta),$$

où le sup porte sur toutes les pseudo-boules B contenant z.

La classe annoncée est la classe (A_1) de Muckenhoupt définie comme suit:

DÉFINITION 3. Une mesure $\omega d\mu_a$ est dans (A_1) s'il existe une constante $C_1(\omega)$ telle que quel que soit $z \in \boldsymbol{D}$, on a:

$$M_a \omega(z) \leqslant C_1(\omega) \cdot \omega(z),$$

où $M_a\omega$ désigne la fonction maximale de Hardy–Littlewood de ω relative à la pseudo-distance d et à la mesure μ_a.

La démonstration des résultats analogues pour la transformation de Hilbert sur l'espace homogène $(\boldsymbol{R}, \varrho, dx)$ où ϱ est la distance euclidienne, telle qu'elle a été faite par R.R. Coifman et C. Fefferman [4], s'étend sur les espaces homogènes aux intégrales singulières qui vérifient la condition S2. Cette généralisation s'obtient en utilisant les inégalités à poids pour la fonction maximale de Hardy–Littlewood démontrées dans $\boldsymbol{R}$ par B. Muckenhoupt [11] et étendues à tout espace homogène par A.P. Calderón [3].

Mais l'appartenance de Ω à (A_p) est une condition suffisante qui est loin d'être nécessaire dans le cas de T_a: c'est le but de cet article de donner des conditions nécessaires et suffisantes sur Ω.

En vue d'énoncer nos résultats, nous introduisons les définitions suivantes:

DÉFINITION 1. Nous désignerons par $m_a f$ la fonction maximale de la fonction f donnée par

$$m_a f(z) = \sup_{\substack{\zeta\in \boldsymbol{D}, R>1-|\zeta| \\ \text{tels que } z\in B(\zeta,R)}} \frac{1}{\mu_a(B(\zeta, R))} \int_{B(\zeta,R)} |f|\, d\mu_a.$$

De même, si Ω est une mesure borélienne positive,

$$m_a \Omega(z) = \sup_{\substack{\zeta\in D, R>1-|\zeta| \\ \text{tels que } z\in B(\zeta,R)}} \frac{1}{\mu_a(B(\zeta, R))} \int_{B(\zeta,R)} d\Omega.$$

DÉFINITION 2. Soit Ω une mesure borélienne positive sur $\boldsymbol{D}$; on désigne par ω sa dérivée de Radon–Nikodým par rapport à μ_a. Nous disons que Ω appartient à la classe (B_p), $1 < p < \infty$, s'il existe une constante $C_p(\Omega)$ telle que quelle que soit la pseudo-boule B de $\boldsymbol{D}$ qui touche le bord de $\boldsymbol{D}$, on a:

$$\frac{\Omega(B)}{\mu_a(B)}\left(\frac{1}{\mu_a(B)} \int_B \omega^{-1/(p-1)}\, d\mu_a\right)^{p-1} \leqslant C_p(\Omega).$$

Nous disons que Ω appartient à la classe (B_1) s'il existe une constante $C(\Omega)$ telle que quel que soit $z \in \boldsymbol{D}$, on a:

$$m_a \Omega(z) \leqslant C\,\omega(z).$$

Nos deux résultats sont les suivants:

THÉORÈME 1. *Soit Ω une mesure borélienne positive sur $\boldsymbol{D}$. L'opérateur T_a s'étend en un opérateur continu de $L^p(d\Omega)$, $1 < p < \infty$, dans lui-même si et seulement si Ω est dans (B_p).*

THÉORÈME 2. *Soit Ω une mesure borélienne positive sur $\boldsymbol{D}$: T_a s'étend en un opérateur faiblement continu sur $L^1(d\Omega)$ si et seulement si Ω est dans la classe (B_1).*

L'examen de l'énoncé de ces résultats suscite deux remarques:

1° La classe (B_p) est beaucoup plus grande que (A_p), $1 \leqslant p < \infty$: contrairement aux conditions d'appartenance aux classes (A_p) de Muckenhoupt, les conditions d'appartenance à (B_p), $1 \leqslant p < \infty$, ne sont presque que des conditions à la frontière de $\boldsymbol{D}$. D'autre part, Muckenhoupt [11] démontre que si $\omega \in (A_p)$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\omega \in (A_{p-\varepsilon})$. Ainsi, en vue de démontrer que si $\omega \in (A_p)$, la fonction maximale M_a de Hardy–Littlewood est bornée sur $L^p(\omega d\mu_a)$, il suffit, et cela est facile, de démontrer qu'elle est bornée sur $L^q(\omega d\mu_a)$ quel que soit $q > p$. Ici, par contre, l'appartenance de Ω à (B_p) n'entraine pas l'appartenance à $(B_{p-\varepsilon})$ quel que soit $\varepsilon > 0$, en raison de la possibilité d'un mauvais comportement de la dérivée de Radon–Nikodym de Ω loin du bord de $\boldsymbol{D}$. L'argument de Muckenhoupt n'est donc pas transposable ici.

2° Pour que T_a envoie continûment $L^p(d\Omega)$ dans lui-même, $1 < p < \infty$ ou pour que T_a soit faiblement continu sur $L^1(d\Omega)$, il n'est pas nécessaire que Ω soit absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\boldsymbol{D}$, contrairement au cas classique de la transformée de Hilbert.

Esquissons la démonstration des théorèmes 1 et 2. Il suffit à peu de choses près de ne considérer que des mesures Ω absolument continues. La nécessité de l'appartenance de $\omega d\mu_a$ à (B_p), $1 \leqslant p < \infty$, se démontre comme l'ont fait Coifman et Fefferman [4] pour le résultat analogue pour la transformée de Hilbert. Pour la réciproque, comme ces auteurs, nous introduisons un opérateur maximal T_a^* par

$$T_a^* f(z) = \int_{\boldsymbol{D}} \frac{|f(\zeta)|}{|1 - z\cdot\bar{\zeta}|^{n+a}}\, d\mu_a(\zeta)$$

que nous comparons à $m_a f$. Nous montrons que, si $\omega d\mu_a \in (B_p)$, quel que soit $f \in L^p(\omega d\mu_a)$:

1° $\|T_a^* f\|_{L^p(\omega d\mu_a)} \leqslant C \|m_a f\|_{L^p(\omega d\mu_a)}$;

2° $\|m_a f\|_{L^p(\omega d\mu_a)} \leqslant C \|f\|_{L^p(\omega d\mu_a)}$.

Pour démontrer la deuxième inégalité, nous régularisons les fonctions et le poids de manière à nous ramener à un problème à poids sur la fonction maximale de Hardy–Littlewood M_a qui majore m_a.

Pour démontrer la première inégalité, il suffit à la manière de R. Coifman et C. Fefferman dans leur même article [4] de démontrer une inégalité de distributions entre $T_a^* f$ et $m_a f$. Mais R. Coifman nous a fait remarquer que si $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$, $\zeta^0 = (1, 0, \ldots, 0)$ et $z^0 = (r_0, 0, \ldots, 0)$, $0 < r_0 < 1$, on a:

$$T_a^* f(z^0) \leqslant C_{n,a}\Big\{\frac{1}{(1-r_0)^{n+a}} \int_{d(\zeta^0,\zeta)<2(1-r_0)} f(\zeta)\, d\mu_a(\zeta) + \int_{d(\zeta^0,\zeta)>2(1-r_0)} \frac{f(\zeta)}{d(\zeta^0, \zeta)^{n+a}}\, d\mu_a(\zeta)\Big\},$$

où le premier terme du second membre est $\leqslant C'_{n,a} m_a f(z^0)$ et le second terme est

$$\leqslant C''_{n,a} \int_{d(z^0,\zeta)>1-r_0} \frac{f(\zeta)}{[d(z^0, \zeta)]^{n+a}}\, d\mu_a(\zeta) \leqslant C''_{n,a} m_a^* f(z^0).$$

m_a^* désignant l'adjoint de m_a. L'inégalité $\|T_a^* f\|_{L^p(\omega d\mu_a)} \leqslant C \|m_a f\|_{L^p(\omega d\mu_a)}$ découle immédiatement de cette remarque.

Pour démontrer le théorème 2, nous montrons d'abord en utilisant un lemme de type Vitali, que si $\omega d\mu_a \in (B_1)$, alors m_a est faiblement continu sur $L^1(\omega d\mu_a)$. Ensuite nous concluons de la même manière que pour le théorème 1 en démontrant une inégalité entre $T_a^* f$ et $m_a f$: pour cela, nous faisons un découpage de type Calderón–Zygmund de $f \in L^1$ en bonne et en mauvaise fonction.

Une partie des présents résultats a fait l'objet de [1]. Il est possible de les étendre aux domaines strictement pseudo-convexes puisque sur de tels domaines, le noyau de Bergman est connu (C. Fefferman [7], Phong et E. Stein [12]).

L'auteur tient à remercier Aline Bonami qui lui a proposé ce sujet et avec qui il a eu des conversations très utiles pour réaliser cet article.

Dans la suite, nous utiliserons les inégalités suivantes, de démonstration immédiate:

LEMME 1. *Quels que soient z dans $\boldsymbol{D}$ et r_0, $0 < r_0 < 1$, si nous notons $z^0 = (r_0, 0, \ldots, 0)$, nous avons:*

1° $|1 - z_1 r_0| \geqslant \frac{1}{4} d(z, z^0)$;

2° $|z_1 - r_0| \leqslant d(z, z_0)$;

3° $\sum_{k=2}^{n} |z_k|^2 \leqslant 2\, d(z, z_0)$;

4° $|1 - z\cdot z^0| \leqslant 2\big(1 - r_0^2 + 1 - |z|^2 + d(z, z^0)\big)$.

Dans la suite, si a et b sont deux quantités réelles positives, nous écrirons que $a \simeq b$ s'il existe deux constantes positives C_1 et C_2 telles que $C_1\, a \leqslant b \leqslant C_2\, a$.

LEMME 2. *Quels que soient ζ dans $\boldsymbol{D}$, $0 < |\zeta| = r < 1$ et $0 < R < 2$:*

$$\mu_a\big(B(\zeta, R)\big) \simeq R^{n+1}\{\max(R, 1-r)\}^{a-1}.$$

De ce fait, le triplet $(\boldsymbol{D}, d, \mu_a)$ est un espace homogène.

§ 2. Le projecteur de Bergman est une intégrale singulière. Nous allons même démontrer que si l'on définit l'opérateur maximal T_a^* par

$$T_a^* f(z) = \int |1 - z\cdot\bar{\zeta}|^{-(n+a)} |f(\zeta)|\, d\mu_a(\zeta),$$

alors:

PROPOSITION 1. *Il existe des constantes C_p, pour $1 \leqslant p < \infty$, telles que, quelle que soit la fonction f intégrable sur $\boldsymbol{D}$:*

1° *si* $p > 1$,

$$\int [T_a^* f(z)]^p \, d\mu_a(z) \leqslant C_p \int |f|^p \, d\mu_a(z);$$

2° *quel que soit* $\lambda > 0$,

$$\mu_a(\{T_a^* f > \lambda\}) \leqslant \frac{C_1}{\lambda} \int |f| \, d\mu_a.$$

Démonstration. La première partie de la proposition est démontrée dans [8]. Pour démontrer la deuxième partie, nous allons montrer que T_a^* est un opérateur singulier sur l'espace homogène $\boldsymbol{D}$, muni de la pseudo-distance d et de la mesure μ_a, ou encore suivant Coifman et Weiss [5], qu'il existe deux constantes C_1 et C_2 $(C_1 > 1)$ telles que

$$\int\limits_{d(z,\zeta^0) > C_1 d(\zeta,\zeta^0)} \left| \frac{1}{(1 - z\cdot\bar\zeta)^{n+a}} - \frac{1}{(1 - z\cdot\bar\zeta^0)^{n+a}} \right| d\mu_a \leqslant C_2.$$

En fait, en vertu du lemme 2, il suffit de montrer que

LEMME 3. *Il existe deux constantes* C_1, C_2 $(C_1 > 0)$ *telles que quels que soient* z, ζ, ζ^0 *dans* $\boldsymbol{D}$ *vérifiant* $|1 - z\cdot\bar\zeta^0| > C_1 d(\zeta, \zeta^0)$:

$$\left| \frac{1}{(1 - z\cdot\bar\zeta)^{n+a}} - \frac{1}{(1 - z\cdot\bar\zeta^0)^{n+a}} \right| \leqslant C_2 \frac{[d(\zeta, \zeta^0)]^{1/2}}{|1 - z\cdot\bar\zeta^0|^{n+a+1/2}}.$$

Démonstration du lemme 3. Il suffit de le démontrer pour $\zeta^0 = (r_0, 0, \ldots, 0)$, $r_0 > 0$. Grâce au lemme 1, on sait que

$$|z\cdot(\bar\zeta - \bar\zeta^0)| \leqslant C[d(\zeta^0, \zeta) + \sqrt{d(z, \zeta^0) d(\zeta^0, \zeta)}] \leqslant \tfrac{1}{2}|1 - z\cdot\bar\zeta^0|,$$

si C_1 est choisi suffisamment grand.

On conclut en utilisant le théorème des accroissements finis et en remarquant que, quels que soient $0 < \theta < 1$ et $\eta = \theta\cdot\zeta^0 + (1-\theta)\zeta$,

$$|(1 - z\cdot\bar\zeta^0) - (1 - z\cdot\bar\eta)| \leqslant \tfrac{1}{2}|1 - z\cdot\bar\zeta^0|.$$

§ 3. Inégalités L^p à poids, $1 < p < +\infty$, pour le projecteur de Bergman. Cas des mesures absolument continues par rapport à μ_a. Nous allons d'abord caractériser les mesures absolument continues par rapport à μ_a pour lesquelles le projecteur T_a se prolonge en un opérateur continu de L^p dans lui-même, quand $1 < p < \infty$.

Soit donc $d\Omega = \omega d\mu_a$ une mesure absolument continue par rapport à μ_a: ω est une fonction localement intégrable, c'est-à-dire intégrable sur tout compact de $\boldsymbol{D}$. Nous voulons définir $T_a f$ pour tout f dans $L^p(\omega d\mu_a)$; pour cela, nous devons avoir:

LEMME 4. *Soit* ω *une fonction positive localement intégrable. Pour que la projection de Bergman* $T_a f$ *soit bien définie pour tout* $f \in L^p(\omega d\mu_a)$, *il faut que* $\omega^{-1/(p-1)}$ *soit intégrable.*

Démonstration. $T_a f(z)$ est bien défini si

$$\int\limits_{\boldsymbol{D}} \frac{|f(\zeta)|}{|1 - z\cdot\bar\zeta|^{n+a}} \, d\mu_a(\zeta) = T_a^* f(z) < +\infty.$$

Il faut donc que pour tout $f \in L^p(\omega d\mu_a)$, $\int\limits_{\boldsymbol{D}} |f| \, d\mu_a < +\infty$. Mais si $\omega^{-1/(p-1)}$ n'était pas intégrable sur $\boldsymbol{D}$, il existerait une fonction positive g dans $L^p(d\mu_a)$ telle que $\int g\omega^{-1/p} d\mu_a = +\infty$: ainsi $f = g\omega^{-1/p}$ serait dans $L^p(\omega d\mu_a)$ sans être dans $L^1(d\mu_a)$. Il est donc nécessaire que $\omega^{-1/(p-1)}$ soit intégrable.

Remarquons qu'alors $T_a f$ est une fonction holomorphe dans $\boldsymbol{D}$.

PROPOSITION 2. *Soit* ω *une fonction positive localement intégrable sur* $\boldsymbol{D}$. *Le projecteur de Bergman est bien défini sur* $L^p(\omega d\mu_a)$ *et est un opérateur continu dans* $L^p(\omega d\mu_a)$ *si et seulement si* $\omega d\mu_a$ *est dans* (B_p).

Démonstration. Montrons d'abord que la condition $\omega d\mu_a \in (B_p)$ est nécessaire. Nous avons déjà vu qu'il était nécessaire que $\omega^{-1/(p-1)}$ soit intégrable. Si nous montrons aussi que ω est intégrable, il nous suffira, pour démontrer que $\omega d\mu_a$ est dans (B_p), de ne considérer que des pseudo-boules de rayon inférieur à une petite constante $C < 1$.

Montrons donc que ω est dans $L^1(d\mu_a)$. Si

$$f(z) = (1 - |z|^2)^{1-a} \chi_{B(0,R)}(z), \qquad T_a f(z) = C_{R,a} > 0$$

en vertu du théorème de la moyenne appliqué à la fonction harmonique: $\zeta \to (1 - z\cdot\bar\zeta)^{-n+a}$. Comme T_a est continu dans $L^p(\omega d\mu_a)$, on a $\omega(\boldsymbol{D}) \leqslant C_{R,a,p}\, \omega(B(0, R)) < +\infty$.

Le fait que $\omega d\mu_a \in (B_p)$ se déduit du lemme suivant en utilisant le même argument que R.R. Coifman et C. Fefferman dans [4]:

LEMME 5. *Soit* B_1 *une pseudo-boule de rayon* R *assez petit et touchant le bord de* $\boldsymbol{D}$. *Il existe une pseudo-boule* B_2 *de même rayon, touchant le bord de* $\boldsymbol{D}$, *assez éloignée de* B_1, *mais telle que* $d(B_1, B_2) \simeq R$, *pour laquelle quels que soient la fonction* $f \geqslant 0$ *à support dans* B_i *et* $z \in B_j$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2$:

$$|T_a f(z)| \geqslant C_a [\mu_a(B_i)]^{-1} \int\limits_{B_i} f \, d\mu_a.$$

C_a *ne dépend ni de* B_1, *ni de* B_2, *ni de* f.

Démonstration du lemme 5. On appelle ζ^0 le centre de B. Si R est petit, B' est choisie de telle sorte que quels que soient $z \in B'$ et $\zeta \in B$, l'on ait $C_1 d(\zeta, \zeta_0) \leqslant d(z, \zeta^0)$, où C_1 désigne la constante désignée de la même façon dans lemme 3. En vertu de ce lemme, si l'on écrit:

$$T_a f(z) = \frac{1}{(1 - z\cdot\bar\zeta^0)^{n+a}} \int\limits_B f \, d\mu_a + \int\limits_B \left[\frac{1}{(1 - z\cdot\bar\zeta)^{n+a}} - \frac{1}{(1 - z\cdot\bar\zeta^0)^{n+a}} \right] f \, d\mu_a,$$

la deuxième intégrale est majorée par $2^{-1}|1-z\cdot\zeta^0|^{-(n+a)}\int\limits_{D} f\,d\mu_a$ et ainsi:

$$|T_a f(z)| \geqslant 2^{-1}|1-z\cdot\zeta^0|^{-(n+a)}\int\limits_{B} f\,d\mu_a.$$

Mais $|1-z\cdot\zeta^0| \leqslant C\,d(z,\zeta^0) \leqslant C'R$, en vertu du lemme 1: le lemme 5 est démontré, ainsi que la nécessité de la condition $\omega\,d\mu_a \in (B_p)$.

Nous allons maintenant montrer que si $\omega\,d\mu_a$ est dans (B_p), l'opérateur maximal T_a^* est continu dans $L^p(\omega\,d\mu_a)$. Nous allons en fait montrer que si m_a est la fonction maximale définie dans la définition 1, on a les deux assertions suivantes:

(i) $m_a f$ est dans $L^p(\omega\,d\mu_a)$ si f est dans $L^p(\omega\,d\mu_a)$;

(ii) $T_a^* f$ est dans $L^p(\omega\,d\mu_a)$ si et seulement si $m_a f$ est dans $L^p(\omega\,d\mu_a)$.

Dans (ii), l'une des implications est immédiate, car $T_a^* f \geqslant C m_a f$: alors si $T_a^* f \in L^p(\omega\,d\mu_a)$, on a aussi $m_a f \in L^p(\omega\,d\mu_a)$. Avant de démontrer l'implication réciproque dans (ii), nous allons d'abord montrer (i):

PROPOSITION 3. *Soit $\omega\,d\mu_a$ dans (B_p). Il existe une constante C_p telle que quelle que soit la fonction f dans $L^p(\omega\,d\mu_a)$:*

$$\int\limits_{D} [m_a f]^p\,\omega\,d\mu_a \leqslant C_p \int\limits_{D} |f|^p\,\omega\,d\mu_a.$$

Démonstration. Quel que soit $k \in]0,1[$, nous définissons un opérateur régularisateur noté R_k^a par

$$R_k^a f(z) = \frac{1}{\mu_a(B_k(z))}\int\limits_{B_k(z)} f\,d\mu_a,$$

où $B_k(z) = \{\zeta \in D:\ d(z,\zeta) < k(1-|z|)\}$.

Nous utiliserons les lemmes suivants, dont le premier est de démonstration immédiate:

LEMME 6. *Soit $k \in]0,\frac{1}{2}[$. Si z' est dans $B_k(z)$, alors z est dans $B_{k'}(z')$, où $k' = k/(1-k)$.*

LEMME 7. *Quel que soit $k \in]0,1[$, il existe une constante C_k telle que quelle que soit la fonction localement intégrable f, $f \geqslant 0$, on a:*

$$m_a f \leqslant C_k m_a(R_k^a f).$$

Démonstration du lemme 7. Nous devons montrer que quel que soit z et quelle que soit la pseudo-boule B contenant z et touchant le bord de D, il existe une pseudo-boule B' contenant z et touchant le bord de D pour laquelle

$$\frac{1}{\mu_a(B)}\int\limits_{B} f\,d\mu_a \leqslant C_k \frac{1}{\mu_a(B')}\int\limits_{B'}\Big[\frac{1}{\mu_a(B_k(z))}\int\limits_{B_k(z)} f\,d\mu_a\Big]\,d\mu_a(z).$$

Mais en vertu du lemme 6, $\chi_{B_k(z)}(\zeta) \geqslant \chi_{B_{k''}(\zeta)}(z)$, où $k'' = k/(k+1)$ et ainsi

$$\int\limits_{B'} R_k^a f(z)\,d\mu_a(z) \geqslant \int\limits_{B}\Big(\int\limits_{B'}\frac{1}{\mu_a(B_k(z))}\chi_{B_{k''}(\zeta)}(z)\,d\mu_a(z)\Big) f(\zeta)\,d\mu_a(\zeta).$$

En dilatant beaucoup B, on trouve une pseudo-boule que nous prendrons pour B' telle que quel que soit $\zeta \in B$, $B_{k''}(\zeta)$ est contenu dans B'. Comme en plus, $\mu_a(B_{k''}(\zeta)) \simeq \mu_a(B_k(z))$, quand $z \in B_{k''}(\zeta)$, on a:

$$\int\limits_{B'} R_k^a f\,d\mu_a \geqslant C_k' \int\limits_{B} f\,d\mu_a$$

et l'on conclut du fait que μ_a est homogène en vertu du lemme 2.

LEMME 8. *Quel que soit $k \in]0,\frac{1}{2}[$, il existe deux constantes C et $k' < 1$ ne dependant que de k, a et n telles que quels que soient f et g dans $L^1(d\mu_a)$, $f \geqslant 0$ et $g \geqslant 0$:*

$$\int\limits_{D} f[R_k^a g]\,d\mu_a \leqslant C\int [R_{k'}^a f]\,g\,d\mu_a.$$

Ce lemme est une conséquence immédiate du fait qu'en vertu du lemme 6, il existe deux constantes C et k' telles que

$$\frac{1}{\mu_a(B_k(z))}\chi_{B_k(z)}(z') \leqslant \frac{C}{\mu_a(B_{k'}(z'))}\chi_{B_{k'}(z')}(z).$$

LEMME 9. *Soit $k \in]0,1[$. Il existe deux constantes A et B ne dépendant que de a, n et k telles que quelle que soit la fonction localement intégrable g:*

$$m_a g \leqslant A R_k^a(m_a g) \leqslant B\, m_a g.$$

Il suffit de remarquer que, sur $B_k(z)$, $m_a g$ est à peu près constant.

En vue de la démonstration de la proposition 3, nous avons, en vertu successivement des lemmes 7 et 9, de l'inégalité de Hölder et du lemme 8:

$$\int [m_a f]^p\,\omega\,d\mu_a \leqslant A^p\int [R_k^a m_a(R_k^a f)]^p\,\omega\,d\mu_a \leqslant A^p\int\{R_k^a(m_a(R_k^a f))^p\}\,\omega\,d\mu_a$$
$$\leqslant A^p C'\int [m_a(R_k^a f)]^p R_{k'}^a\omega\,d\mu_a,$$

sachant que $R_k^a\omega \simeq R_{k'}^a\omega$. Si nous montrons maintenant que le nouveau poids $R_k^a\omega$ est dans la classe (A_p) de Muckenhoupt, alors:

$$\int [m_a(R_k^a f)]^p\,\omega\,d\mu_a \leqslant C_p\int [R_k^a(|f|)]^p R_k^a\omega\,d\mu_a.$$

Il nous restera à démontrer que

(1) $$\int [R_k^a(|f|)]^p R_k^a\omega\,d\mu_a \leqslant C_p'\int |f|^p\,\omega\,d\mu_a.$$

Démontrons d'abord que

Lemme 10. *Soit $k \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$. Si ω est dans (B_p), le poids $R_k^a\omega$ est dans la classe (A_p) de Muckenhoupt.*

Démonstration. En vertu du lemma 6 et de la démonstration du lemme 7, la condition $R_k^a\omega \in (A_p)$ sur les pseudo-boules qui touchent le bord se ramène à $\omega\, d\mu_a \in (B_p)$. Pour les petites pseudo-boules éloignées du bord, on conclut en remarquant que $R_k^a\omega$ y est à peu près constant.

Il reste à démontrer (1). L'inégalité de Hölder donne:

$$[R_k^a(|f|)]^p \leqslant [R_k^a(|f|^p\omega)][R_k^a(\omega^{-1(p-1)})]^{p-1}.$$

Ainsi le premier membre de (1) est inférieur à:

$$\int_{D} [R_k^a(|f|^p\omega)][R_k^a(\omega^{-1/(p-1)})]^{p-1}\cdot R_k^a\omega\, d\mu_a.$$

Mais comme $\omega\, d\mu_a$ est dans (B_p), il existe une constante C telle que pour tout $z \in D$:

$$[R_k^a\omega(z)][R_k^a(\omega^{-1/(p-1)})(z)]^{p-1} \leqslant C,$$

car les pseudo-boules $B_k(z)$ touchent presque ∂D et les mesures $\omega\, d\mu_a$ et $\omega^{-1/(p-1)}\, d\mu_a$ sont homogènes. On aboutit ainsi à (1). La proposition 3 est démontrée.

En vue de démontrer l'équivalence (ii) annoncée avant l'énoncé de la proposition 3 et qui complète la démonstration de la proposition 2, nous allons démontrer que

Proposition 4. *Soit $d\Omega = \omega\, d\mu_a$ dans (B_p). Il existe deux constantes K et δ telles que quels que soient γ et λ et quelle que soit la fonction positive $f \in L^1(d\mu_a)$:*

$$\Omega\big(\{z \in D:\ T_a^*f(z) > 2\lambda \text{ et } m_af(z) \leqslant \gamma\lambda\}\big) \leqslant K\gamma^\delta\,\Omega\big(\{z \in D:\ \ T_a^*f(z) > \lambda\}\big).$$

Démonstration. En fait, il suffit de montrer que

$$\Omega\big(\{z \in \mathcal{O}:\ T_a^*f(z) > 2\lambda \text{ et } m_af(z) \leqslant \gamma\lambda\}\big) \leqslant K\gamma^\delta\,\Omega(\mathcal{O}),$$

quel que soit l'ouvert $\mathcal{O}$ contenant $\{T_a^*f > \lambda\}$, ou encore comme dans R. Coifman et C. Fefferman [4], utilisant une décomposition de Whitney de $\mathcal{O}$, de montrer que, quelle que soit la pseudo-boule $B = B(z^B, \varrho)$ telle que $\tilde{B} = B(z^B, k\varrho)$ contienne un point z^0 pour lequel $T_a^*f(z^0) \leqslant \lambda$, on a:

$$(1) \qquad \Omega\big(\{z \in B:\ T_a^*f(z) > 2\lambda \text{ et } m_af(z) \leqslant \gamma\lambda\}\big) \leqslant K'\gamma^\delta\,\Omega(B).$$

Nous supposons qu'il existe ζ^0 dans B tel que $m_af(\zeta^0) \leqslant \gamma\lambda$, sinon il n'y a rien à montrer. Nous pouvons aussi prendre $\gamma \leqslant \gamma_0$ où γ_0 est une constante assez petite, sinon le résultat est trivial. Nous appelons $\bar{B}$ une boule de centre z_0, touchant le bord de D et de rayon égal à $\max(1-|z^0|, C\varrho)$, C étant une constante supérieure à k que nous préciserons ultérieurement.

Posons $f = f_1 + f_2$, où $f_1 = f\chi_{\bar{B}}$ et $f_2 = f\chi_{D\setminus\bar{B}}$. Nous montrons d'abord qu'il existe une constante A telle que quels que soient γ, λ et z:

$$(2) \qquad T_a^*f_2(z) \leqslant \lambda + A\gamma\lambda,$$

de sorte que si nous prenons γ assez petit, il nous suffira de démontrer que

$$(3) \qquad \Omega\big(\{z \in B:\ T_a^*f_1(z) > b\lambda \text{ et } m_af(z) \leqslant \gamma\lambda\}\big) < k'\gamma^\delta\,\Omega(B),$$

où $b = 2-(1+A\gamma) > 0$. Montrons donc (2):

$$(4) \qquad T_a^*f_2(z) \leqslant \int_{D\setminus\bar{B}} \frac{f(\zeta)}{|1-z^0\cdot\bar{\zeta}|^{n+a}}\, d\mu_a(\zeta) + \int_{D\setminus\bar{B}} f(\zeta)\left|\frac{1}{(1-z\cdot\bar{\zeta})^{n+a}} - \frac{1}{(1-z^0\cdot\bar{\zeta})^{n+a}}\right| d\mu_a(\zeta).$$

Le premier terme du deuxième membre est inférieur à λ, car $T_a^*f(z^0) \leqslant \lambda$. D'autre part, prenons la constante C et par suite le rayon de $\bar{B}$ suffisamment grands pour qu'en vertu du lemme 3:

$$\left|\frac{1}{(1-z\cdot\bar{\zeta})^{n+a}} - \frac{1}{(1-z^0\cdot\bar{\zeta})^{n+a}}\right| \leqslant \frac{C'\,d(z, z^0)^{1/2}}{d(z^0, \zeta)^{n+a+1/2}}.$$

Ainsi le deuxième terme du deuxième membre de (4) est inférieur à:

$$C'k^{1/2}\varrho^{1/2}\int_{d(z^0,\zeta)>C\max(1-|z^0|, C\varrho)} f(\zeta)[d(z^0, \zeta)]^{-(n+a+1/2)}\, d\mu_a(\zeta).$$

On aboutit à (2) en utilisant le fait que

Lemme 11. *Il existe une constante C telle que quels que soient $\beta > 0$, z^0, $R > 1-|z^0|$ et la fonction positive f:*

$$(5) \qquad R^\beta\int_{d(z^0,\zeta)>R} \frac{f(\zeta)}{[d(z^0, \zeta)]^{n+a+\beta}}\, d\mu_a(\zeta) \leqslant Cm_af(z),$$

quel que soit z dans $B(z^0, R)$.

Démonstration du lemme 11. Le premier membre de (5) est égal à:

$$R^\beta\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{\{\zeta\in D:\ 2^kR<d(z^0,\zeta)<2^{k+1}R\}} \frac{f(\zeta)\, d\mu_a(\zeta)}{[d(z^0, \zeta)]^{n+a+\beta}} \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-k(n+\beta+a)}R^{-(n+a)}\int_{d(z^0,\zeta)<2^{k+1}R} f\, d\mu_a.$$

En vertu du lemme 2, ceci est inférieur à $Cm_af(z)$, pour tout $z \in B(z^0, R)$, avec $C = c\sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-k\beta}$: d'où le lemme 11.

Revenons à la démonstration de la proposition 4 et démontrons (3). Il faut distinguer deux cas, selon que $C\varrho < 1-|z^0|$ ou non. Si $C\varrho < 1-|z^0|$, alors pour tous $z \in B$ et $\zeta \in \bar{B}$:

$$|1-z\cdot\bar{\zeta}| > 1-|z| > C'(1-|z^0|).$$

Donc:

$$T_a^* f(z) \leqslant \frac{C''}{\mu_a(\bar{B})} \int_{\bar{B}} f\,d\mu_a \leqslant C'' m_a f(\zeta^0) \leqslant C''\gamma\lambda;$$

dans ce cas, (3) est vérifié dès que γ est pris assez petit. Si maintenant $C\varrho > 1-|z^0|$, alors en vertu de la proposition 1, il existe une constante C_1 telle que

(6) $$\mu_a(\{T_a^* f_1 > b\lambda\}\cap B) \leqslant C_1\lambda^{-1}\int_{\bar{B}} f\,d\mu_a \leqslant C_1'\lambda^{-1}\mu_a(B)\,m_a f(\zeta^0) \leqslant C_1'\gamma\,\mu_a(B).$$

En fait, nous voulons montrer que

(7) $$\Omega(\{T_a^* f_1 > b\lambda\}\cap B) \leqslant k'\gamma^\delta\,\Omega(B).$$

Remarquons d'abord si nous notons

$$E = \{T_a^* f_1 > b\lambda\}\cap B,$$

il existe une constante C ne dépendant que de b' telle que

(8) $$E \subset R = \{z \in B:\ 1-|z| < C\gamma^{1/(n+a)}\varrho\},$$

ϱ étant le rayon de B. En effet, quel que soit $z \in E$, on a:

$$\begin{aligned} b'\lambda < T_a^* f_1(z) &= \int_{\bar{B}} f(\zeta)\,|1-z\cdot\bar{\zeta}|^{-(n+a)}\,d\mu_a(\zeta) < (1-|z|)^{-(n+a)}\int_{\bar{B}} f(\zeta)\,d\mu_a(\zeta) \\ &< (1-|z|)^{-(n+a)}\mu_a(\bar{B})\,m_a f(\zeta^0) < (1-|z|)^{-(n+a)}\gamma\lambda\,\mu_a(\bar{B}). \end{aligned}$$

En vertu du lemme 2, on en déduit (8).

Pour démontrer (7), nous allons introduire une mesure Ω' de la forme $R_k^a\,\omega\,d\mu_a$, comme dans la démonstration de la proposition 3. Ici nous prenons $d\Omega' = \omega'\,d\mu_a$ où:

$$\omega'(z) = \frac{1}{\mu_a(B(z))}\int_{B(z)} \omega(\zeta)\,d\mu_a(\zeta),$$

$B(z) = \{\zeta \in \boldsymbol{D}:\ d(z,\zeta) < \frac{1}{16}(1-|z|)\}$. Nous savons depuis le lemme 10, que si $\Omega \in (B_p)$, alors $\Omega' \in (A_p)$. Soit R le sous-ensemble de B définie dans (8); Ω' étant homogène, on a en vertu du lemme 6: $\Omega(R) \leqslant C\,\Omega'(R)$. D'autre part, R. Coifman et C. Fefferman ont démontré que si $\Omega' \in (A_p)$, alors Ω' est dans une classe (A_∞), c'est-à-dire qu'il existe deux constantes C et δ telles que quels que soient B et $R \subset B$, R mesurable, $\Omega'(R) \leqslant C[\mu_a(R)/\mu_a(B)]^\delta\,\Omega'(B)$.

De (6), on déduit que comme $\Omega'(B) \leqslant C\Omega(B)$: $\Omega(R) \leqslant C'\gamma^\delta\,\Omega(B)$; (7) est démontré, de même que la proposition 4.

De la proposition 4, on déduit, comme dans Burkholder [2], que

PROPOSITION 5. *$d\Omega = \omega\,d\mu_a$ est dans (B_p). Il existe une constante C_p telle que quelle que soit la fonction $f \in L^1(d\mu_a)$:*

$$\int_{\boldsymbol{D}} [T_a^* f]^p\,\omega\,d\mu_a \leqslant C_p \int_{\boldsymbol{D}} [m_a f]^p\,\omega\,d\mu_a.$$

§ 4. Inégalités L^p à poids. Cas des mesures quelconques. Venons-en à la démonstration du théorème 1. Comme deux fonctions égales presque partout ont la même projection de Bergman, il suffit de montrer que $\Omega \in (B_p)$ si et seulement si

(1) $$\int |T_a f|^p\,d\Omega \leqslant C_p \int |f|^p\,\omega\,d\mu_a,$$

où ω est la dérivée de Radon–Nikodym de Ω.

Remarquons que $\Omega \in (B_p)$ si et seulement si $\omega\,d\mu_a$ est dans (B_p) et s'il existe une constante C telle que quelle que soit la pseudo-boule $\boldsymbol{B}$ touchant le bord de $\boldsymbol{D}$,

(2) $$\Omega(B) \leqslant C\int_B \omega\,d\mu_a.$$

Si l'on a (1), $\omega\,d\mu_a \in (B_p)$ en vertu de la proposition 2; (2) découle du lemme 5 et de (1) quand on prend $f = \chi_B$. Ainsi $\Omega \in (B_p)$, dès que l'on a (1).

Nous allons maintenant montrer que si $\Omega \in (B_p)$, on a (1). Il suffit de montrer qu'il existe deux constantes C et γ telles que quel que soit $f \in L^1(d\mu_a)$, $f \geqslant 0$ et quel que soit $\lambda > 0$:

(3) $$\Omega(\{T_a^* f > 2\lambda\}) \leqslant C\Big\{\int_{\{T_a^* f>\lambda\}} \omega\,d\mu_a + \int_{\{m_a f>\gamma\lambda\}} \omega\,d\mu_a\Big\},$$

Il est clair que

$$\Omega(\{T_a^* f > 2\lambda\}) \leqslant \Omega(\{T_a^* f > 2\lambda \text{ et } m_a f \leqslant \gamma\lambda\}) + \Omega(\{m_a f > \gamma\lambda\}),$$

et que

$$\Omega(\{m_a f > \gamma\lambda\}) \leqslant C\int_{\{m_a f>\gamma\lambda\}} \omega\,d\mu_a,$$

en raison de (2).

D'autre part, dans la démonstration de la proposition 4, nous avons démontré que l'on peut trouver γ assez petit pour que $\{T_a^* f > 2\lambda$ et $m_a f \leqslant \gamma\lambda\} \subset \bigcup B$, où les pseudo-boules B sont les pseudo-boules de la décomposition de Whitney de $\{T_a^* f > \lambda\}$ qui touchent le bord de $\boldsymbol{D}$. De plus, les boules B sont presque disjointes, on a donc en vertu de (2):

$$\Omega(\{T_a^* f > 2\lambda \text{ et } m_a f \leqslant \gamma\lambda\}) \leqslant C' \int_{\{T_a^* f > \lambda\}} \omega\, d\mu_a;$$

on a obtenu (3) et le théorème 1 est démontré.

§ 5. Inégalité faible L^1 à poids pour le projecteur de Bergman. Cas des mesures absolument continues par rapport à μ_a. En vue de démontrer le théorème 2, nous allons également caractériser d'abord les mesures absolument continues par rapport à μ_a pour lesquelles le projecteur de Bergman est faiblement continu sur L^1.

PROPOSITION 6. *Soit ω une fonction positive localement intégrable. Le projecteur de Bergman T_a est bien défini et faiblement continu sur $L^1(\omega\, d\mu_a)$ si et seulement si $d\Omega = \omega\, d\mu_a$ est dans (B_1).*

Démonstration. Pour que $T_a f$ soit bien défini, il faut que $f \in L^1(d\mu_a)$ dès que $f \in L^1(\omega d\mu_a)$: il est donc nécessaire que ω soit minoré par une constante $C > 0$. Supposons T_a faiblement continu sur $L^1(\omega\, d\mu_a)$, comme $T_a\big(\chi_{B(0,R)}(\zeta)(1-|\zeta|^2)^{1-a}\big)$ est supérieur à une constante $C_{a,R}$, on déduit que $\Omega(\boldsymbol{D}) < +\infty$ et ainsi $\Omega(\boldsymbol{D})/\mu_a(\boldsymbol{D}) \leqslant C'\,\omega(z)$, quel que soit $z \in \boldsymbol{D}$. Pour montrer que Ω satisfait à la condition d'appartenance à (B_1) sur des petites pseudo-boules touchant le bord de $\boldsymbol{D}$, on se sert du lemme 5 et on conclut comme dans [4].

Maintenant, supposons que Ω est dans (B_1). $T_a^* f$ est bien défini quand $f \in L^1(d\Omega)$. Montrons que T_a est faiblement continu sur $L^1(d\Omega)$. Nous allons d'abord démontrer que

PROPOSITION 7. *Si $d\Omega = \omega\, d\mu_a$ est dans (B_1), il existe une constante C telle que quel que soit f dans $L^1(\omega\, d\mu_a)$ et quel que soit $\lambda > 0$, on a:*

$$\Omega(\{m_a f > \lambda\}) \leqslant \frac{C}{\lambda} \int_{\boldsymbol{D}} |f|\,\omega\, d\mu_a.$$

Démonstration. La démonstration utilise le lemme suivant, analogue au lemme 8 et de démonstration immédiate:

LEMME 15. *Si $\omega\, d\mu_a = d\Omega$ est dans (B_1) il existe une constante C telle que quelles que soient la pseudo-boule B touchant le bord de $\boldsymbol{D}$ et la fonction $f \in L^1(\omega\, d\mu_a)$, on a:*

$$\left(\frac{1}{\mu_a(B)} \int_B |f|\, d\mu_a\right) \Omega(B) \leqslant C \int_B |f|\,\omega\, d\mu_a.$$

Il existe une constante C telle que quel que soit f,

$$E_\lambda = \{m_a f > \lambda\} \subset \{m_a' f > C\lambda\}$$

où

$$m_a' f(z) = \sup_{r > 1-|z|} \frac{1}{\mu_a(B(z,r))} \int_{B(z,r)} |f(\zeta)|\, d\mu_a(\zeta).$$

Ainsi si $z \in E_\lambda$, il existe une pseudo-boule B_z centrée en z et qui touche le bord telle que $\{\mu_a(B_z)\}^{-1} \int_{B_z} |f|\, d\mu_a > C\lambda$ et ainsi $E_\lambda = \bigcup_{z \in E_\lambda} B_z$.

En vertu d'un lemme de type Vitali, on peut extraire de cette famille $\{B_z\}$ une suite $\{B_i\}$ de pseudo-boules disjointes telles que pour une constante K, les dilatées K fois de B_i recouvrent $\{m_a f > \lambda\}$. On a ainsi, en vertu du lemme 15:

$$\Omega(\{m_a f > \lambda\}) \leqslant C \sum \Omega(B_i) \leqslant C \sum_i \left(\int_{B_i} |f|\,\omega\, d\mu_a\right)\left(\frac{1}{\mu_a(B_i)} \int_{B_i} |f|\, d\mu_a\right)^{-1}$$
$$\leqslant C\lambda^{-1} \int_{\boldsymbol{D}} |f|\,\omega\, d\mu_a,$$

et la proposition 7 est démontrée.

Utilisons la proposition 7 pour démontrer qu'il existe une constante C telle que quels que soient $\lambda > 0$ et $f \in L^1(\omega\, d\mu_a)$:

$$\Omega(\{T_a^* f > \lambda\}) \leqslant C\lambda^{-1} \int_{\boldsymbol{D}} |f|\,\omega\, d\mu_a.$$

Pour cela, nous faisons, de manière adaptée à la situation présente, un découpage de type Calderón–Zygmund de la fonction f en bonne et mauvaise fonction:

LEMME 16. *Soient λ et k deux nombres réels, $\lambda > 0$, $k \in (0,1)$ et soit $f \in L^1(\boldsymbol{D}) \cdot f$ peut s'écrire $b + m$ où:*

1° *$R_k^a b \leqslant C_k \lambda$; C_k dépend de k mais ne dépend ni de f ni de λ;*

2° *il existe une famille $\mathscr{B}$ de pseudo-boules B presque disjointes, contenues dans $\{m_a f > \lambda\}$, telles que si $r(B)$ désigne le rayon de $B \in \mathscr{B}$, on a $r(B) \geqslant \frac{1}{2} d(B, \partial\boldsymbol{D})$; en plus $m \simeq \sum_{B \in \mathscr{B}} m_B$ où m_B est à support dans B et de moyenne $\leqslant C\lambda$.*

Démonstration du lemme 16. En vertu du lemme de Whitney, $\{m_a f > \lambda\}$ est recouvert par une famille $\mathscr{F}$ de pseudo-boules presque disjointes pour laquelle il existe une constante K, telle que si $B \in \mathscr{F}$, alors $\tilde{B}$, la dilatée K fois de B rencontre le complémentaire de $\{m_a f > \lambda\}$. Nous prenons pour famille $\mathscr{B}$ du lemme, le sous famille de $\mathscr{F}$ constituée par toutes les pseudo-boules $B \in \mathscr{F}$ telles que $r(B) \geqslant \frac{1}{2} d(B, \partial\boldsymbol{D})$. Appelons

$$b = f\chi_{\{m_a f \leqslant \lambda\} \cup \left(\bigcup_{B \in \mathscr{F} \setminus \mathscr{B}} B\right)} \quad \text{et} \quad m = f\chi_{\bigcup_{B \in \mathscr{B}} B}.$$

Montrons d'abord que pour tout $k \in]0,1[$, $R_k^a b \leqslant C_k \lambda$. Il est clair que $R_k^a b \leqslant C'_k m_a b$. Montrons que $m_a b \leqslant C\lambda$. Soit B_0 une pseudo-boule touchant le bord de D; montrons que

$$\frac{1}{\mu_a(B_0)} \int_{B_0} |b|\, d\mu_a \leqslant C\lambda.$$

En effet, si $B_0 \cap \{m_a f \leqslant \lambda\} \neq \emptyset$, c'est évident ainsi que si $b = 0$ sur B_0. Montrons que si $B_0 \cap \{b \neq 0\} \neq \emptyset$, alors $\tilde{\tilde{B}}_0 \cap \{m_a f \leqslant \lambda\} \neq \emptyset$, où $\tilde{\tilde{B}}_0$ est la dilatée $2K$ fois de B_0. Mais si B_0 rencontre une pseudo-boule $B \in \mathscr{F} \setminus \mathscr{B}$, alors $\tilde{\tilde{B}}_0$ contient $\tilde{B}$, donc

$$\frac{1}{\mu_a(B_0)} \int_{B_0} |b|\, d\mu_a \leqslant C \frac{1}{\mu_a(\tilde{\tilde{B}}_0)} \int_{\tilde{\tilde{B}}_0} |b|\, d\mu_a \leqslant C \frac{1}{\mu_a(\tilde{\tilde{B}}_0)} \int_{\tilde{\tilde{B}}_0} |f|\, d\mu_a \leqslant C\lambda.$$

Pour m, on prend $m_B = f\chi_B$; comme $\tilde{B}$ rencontre le complémentaire de $\{m_a f > \lambda\}$, la moyenne de m_B est $\leqslant C\lambda$. Le lemme 16 est démontré.

Du fait de la proposition 7, il nous suffit de démontrer qu'avec les notations du lemme 16, on a:

$$\Omega(\{T_a^* b > \lambda/2\}) \leqslant C\lambda^{-1} \int_D |f|\, \omega\, d\mu_a, \tag{1}$$

$$\Omega(\{z \in D \setminus \bigcup \tilde{B}:\ T_a^* m(z) > \lambda/2\}) \leqslant C\lambda^{-1} \int_D |f|\, \omega\, d\mu_a. \tag{2}$$

Démontrons d'abord (1). Nous utilisons le lemme suivant:

Lemme 17. *Quel que soit $k \in]0, \frac{1}{16}[$, il existe C_k tel que quelle que soit la fonction f positive et intégrable, on a:*

$$T_a^* f \leqslant C_k T_a^*(R_k^a f).$$

Démonstration du lemme 17. On remarque $|1 - z\cdot\bar{\tau}|$ est du même ordre que $|1 - z\cdot\bar{\zeta}|$, quels que soient $\zeta \in D$ et $\tau \in B_k(\zeta)$; ainsi si $1/|1 - z\cdot\bar{\zeta}|^{n+a} = g(\zeta)$, alors $g(\zeta) \simeq R_k^a g(\zeta)$. On conclut en appliquant le lemme 8 à $f(\xi)$ et $g(\xi)$.

On aboutit maintenant à (1) de manière analogue au cas classique. Comme $\Omega \in (\mathscr{B}_2)$, on a en vertu du lemme 17:

$$\Omega(\{T_a^* b > \lambda/2\}) \leqslant C\lambda^{-2} \int_D |R_k^a b|^2 \omega\, d\mu_a \leqslant C'\lambda^{-1} \int_D |R_k^a b|\, \omega\, d\mu_a$$

car $|R_k^a b| \leqslant C\lambda$. Puis en vertu du lemme 8:

$$\Omega(\{T_a^* b > \lambda/2\}) \leqslant C'\lambda^{-1} \int_D |b| R_{k'}^a \omega\, d\mu_a.$$

On conclut parce que $R_{k'}^a \omega \leqslant C''\omega$.

Pour démontrer (2), nous utilisons le lemme suivant:

Lemme 18. *Soit $K > 1$. Pour toute pseudo-boule B, si $\tilde{B}$ désigne la dilatée K fois de B et que $z \in D \setminus \tilde{B}$, on a*

$$T_a^* g(z) \leqslant C T_a^* \tilde{g}(z),$$

quand $g \geqslant 0$ est à support dans B et $\tilde{g} = (\mu_a B))^{-1} \big(\int_B g\, d\mu_a\big)\chi_B$.

Ce lemme se démontre en remarquant que si $z \in D \setminus \tilde{B}$, $|1 - z\cdot\bar{\zeta}|$ reste à peu près constant quand ζ parcourt B.

Maintenant en vue de (2), prenons $\tilde{B}$ comme dans la démonstration du lemme 16, $B \in \mathscr{B}$. Alors si $z \in D \setminus \bigcup \tilde{B}$:

$$T_a^* m(z) \leqslant \sum_{B \in \mathscr{B}} T_a^* m_B(z) \leqslant C \sum_{B \in \mathscr{B}} T_a^* \tilde{m}_B(z),$$

avec les notations du lemme 18. Maintenant, si l'on pose $E = \{z \in D \setminus \bigcup \tilde{B}:\ T_a^* m(z) > \lambda\}$, alors:

$$\Omega(E) \leqslant \Omega\big(\{z \in D \setminus \bigcup \tilde{B}:\ T_a^* \tilde{m}(z) > C\lambda\}\big) \leqslant C'\lambda^{-2} \|\tilde{m}\|_{2,\omega}^2,$$

où $\tilde{m} = \sum_{B \in \mathscr{B}} \tilde{m}_B$. Mais $|\tilde{m}| \leqslant C\lambda$ et ainsi:

$$\Omega(E) \leqslant CC'\lambda^{-1} \sum \int_B \tilde{m}\,\omega = CC'\lambda^{-1} \sum \Big\{\frac{1}{\mu_a(B)} \int_B |f(z)|\, d\mu_a(z) \int_B \omega\, d\mu_a\Big\}.$$

En vertu du lemme 15, on aboutit à:

$$\Omega(E) \leqslant C''\lambda^{-1} \sum_{B \in \mathscr{B}} \int_B |f|\, \omega\, d\mu_a \leqslant C''\lambda^{-1} \int_D |f|\, \omega\, d\mu_a.$$

§ 6. Inégalité faible L^1 à poids. Cas des mesures quelconques. Venons-en à la démonstration du théorème 2. Comme pour le théorème 1, il suffit de démontrer que quels que soient $\lambda > 0$ et $f \in L^1(\omega\, d\mu_a)$:

$$\Omega\big(\{z \in D:\ |T_a f(z)| > \lambda\}\big) \leqslant \frac{C}{\lambda} \int_D |f|\, \omega\, d\mu_a, \tag{1}$$

si et seulement si $\Omega \in (B_1)$. Ici aussi, $\Omega \in (B_1)$ si et seulement si $\omega\, d\mu_a \in (B_1)$ et s'il existe une constante C telle que quelle que soit la pseudo-boule B touchant le bord de D:

$$\Omega(B) \leqslant C \int_B \omega\, d\mu_a. \tag{2}$$

Si l'on a (1), $\omega\, d\mu_a \in (B_1)$ en vertu de la proposition 6; (2) découle du lemme 5 et de (1) quand on prend $f = \chi_B$.

Montrons maintenant que si $\Omega \in (B_1)$, on a (1). Comme $\Omega(B) \leqslant C \int_B \omega\, d\mu_a$, quand B touche le bord, il est immédiat que

$$\Omega(\{m_a f > \lambda\}) \leqslant C' \int_{\{m_a f > \lambda\}} \omega\, d\mu_a.$$

Montrons maintenant que

$$\Omega(\{T_a^* f > \lambda\}) \leqslant \frac{C}{\lambda} \int_D |f|\, \omega\, d\mu_a.$$

Avec les notations du lemme 16, on a:

$$\Omega(\{T_a^* f > \lambda\}) \leqslant \Omega_1 + \Omega_2,$$

où $\Omega_1 \leqslant \Omega(\{T_a^* b > \lambda/2\})$ et $\Omega_2 = \Omega(\{T_a^* m > \lambda/2\})$. Mais en vertu du lemme 17 et comme $\Omega \in (B_2)$, on a:

$$\Omega_1 \leqslant \Omega(\{T_a^* R_k^a b > C\lambda\}) \leqslant C\lambda^{-2} \int [R_k^a b]^2\, \omega\, d\mu_a$$

et

$$\Omega_2 \leqslant \Omega\Big(\bigcup_{B\in\mathscr{B}} \tilde{B}\Big) + \Omega\Big(\Big\{z \in D \setminus \bigcup_{B\in\mathscr{B}} \tilde{B}:\ T_a^* m(z) > \lambda/2\Big\}\Big).$$

En vertu de (2) et du lemme 18, on a:

$$\Omega_2 \leqslant C\Big\{\bigcup_{\mathscr{B}} \int_B \omega\, d\mu_a + \lambda^{-2} \|\tilde{m}\|_{2,\omega}^2\Big\}.$$

On aboutit ainsi au théorème 2, en utilisant des résultats démontrés dans le cas absolument continu.

Bibliographie

[1] D. Békollé et A. Bonami, *Inégalités à poids pour le noyau de Bergman*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A 286 (1978), 775–778.

[2] T. Burkholder, *Distribution function inequalities for martingales*, Ann. Probability 1 (1973), 19–42.

[3] A. P. Calderón, *Inequalities for the maximal function relative to a metric*, Studia Math. 57 (1976), 297–306.

[4] R. R. Coifman and C. Fefferman, *Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals*, ibid. 51 (1974), 241–250.

[5] R. R. Coifman et G. Weiss, *Analyse harmonique non commutative sur certains espaces homogènes*, Lectures Notes, Springer-Verlag, 1971.

[6] R. R. Coifman and G. Weiss, *Extensions of Hardy spaces and their use in analysis*, Bull. Amer. Math. Soc. 83 (1977), 569–645.

[7] C. Fefferman, *The Bergman kernel and biholomorphic mappings of pseudo-convex domains*, Invent. Math. 26 (1974), 1–66.

[8] F. Forelli and W. Rudin, *Projections on spaces of holomorphic functions in balls*, Indiana Univ. J. 24, 6 (1974), 593–602.

[9] H. Helson and G. Szegö, *A problem in prediction theory*, Ann. Math. Pura Appl. 51 (1960), 107–138.

[10] R. A. Hunt, B. Muckenhoupt, R. L. Wheeden, *Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals*, Trans. Amer. Math. Soc. 176 (1973), 227–251.

[11] B. Muckenhoupt, *Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function*, ibid. 165 (1972), 207–226.

[12] D. H. Phong and E. M. Stein, *Estimates for the Bergman and Szegö projections on strongly pseudo-convex domains*, Duke Math. J. 44, 3 (1977), 695–704.

[13] E. M. Stein, *Singular integrals and estimates for the Cauchy–Riemann equations*, Bull. Amer. Math. Soc. 79 (1973), 440–445.

Received April 24, 1979
Revised version October 19, 1979 (1542)