STUDIA MATHEMATICA, T. LXXII. (1982)

Problèmes de complémentation de sous-algèbre dans l'algèbre des séries de Fourier en deux variables absolument convergentes

par

MICHEL GATESOUPE (Nantes)

Abstract. $A(\boldsymbol{T}^2)$ is the Banach algebra—space of Fourier series in two variables absolutely convergent. For each continuous map φ of $\boldsymbol{T}$ into $\boldsymbol{T}$, we consider the subalgebra B_φ of functions in $A(\boldsymbol{T}^2)$ which are constant on curves $y-\varphi(x) = \text{const.}$ The subspace B_φ is complemented in $A(\boldsymbol{T}^2)$ but the type of complementation depends on the regularity of φ. If φ is C^2, there is a projection E which is a conditional expectation; in particular, $E(fg) = gE(f)$ for each f in $A(\boldsymbol{T}^2)$ and g in B_φ. But if φ is piecewise affine, no projection can preserve such equation.

A étant une algèbre de Banach commutative, B une sous-algèbre fermée dans A, on dira que B *est bien complémentée dans* A s'il existe une projection linéaire continue P de A sur B telle que pour tout a dans A et tout b dans B, on ait: $P(ab) = bP(a)$. On dira alors que P est une *espérance conditionnelle* de A sur B.

En particulier, considérons un espace compact Ω, la tribu borélienne $\mathscr{A}$ de Ω et $\mathscr{B}$ une sous-tribu. Soit A une algèbre de Banach topologiquement contenue dans l'algèbre $\mathscr{C}(\Omega)$ de toutes les fonctions continues sur Ω à valeurs complexes. Soit B la sous-algèbre fermée de A constituée par les fonctions de A qui sont $\mathscr{B}$-mesurables. Soit $d\mu$ une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$ et $\mathscr{E}^{\mathscr{B}}$ l'espérance conditionnelle au sens des probabilités projection orthogonale de $L^2(\Omega; \mathscr{A}; d\mu)$ sur $L^2(\Omega; \mathscr{B}; d\mu)$.

On peut se demander si la restriction de $\mathscr{E}^{\mathscr{B}}$ à A est un endomorphisme continu dans A. Si la réponse est positive, B est bien complémentée par l'espérance conditionnelle au sens des probabilités $\mathscr{E}^{\mathscr{B}}$.

I. On se place dans le cas particulier suivant: $\boldsymbol{T}$ désigne le tore à une dimension identifé à $\boldsymbol{R}/2\pi\boldsymbol{Z}$. $A(\boldsymbol{T})$ désigne l'algèbre de Banach des séries de Fourier 2π-périodiques absolument convergentes:

$$f(x) = \sum_{p\in \boldsymbol{Z}} a_p e^{ipx}$$

avec la norme

$$\|f\|_{A(T)} = \sum_p |a_p| < +\infty$$

et le produit ponctuel.

Ω est le tore à deux dimensions $\boldsymbol{T}^2$ identifié à $(\boldsymbol{R}/2\pi\boldsymbol{Z})\times(\boldsymbol{R}/2\pi\boldsymbol{Z})$, $A = A(\boldsymbol{T}^2)$ est l'algèbre de Banach des séries de Fourier en deux variables, 2π-périodiques en chacune d'elles, absolument convergentes:

$$f(x, y) = \sum_{p,q} a_{p,q} e^{i(px+qy)}$$

avec la norme

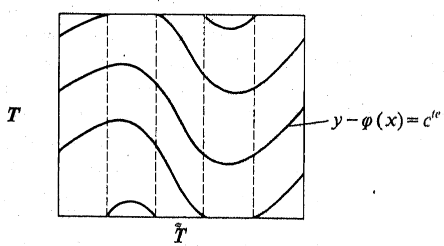
$$\|f\|_{A(T^2)} = \sum_{p,q} |a_{p,q}| < +\infty$$

et le produit ponctuel.

Choisissons une application continue φ de $\boldsymbol{R}$ dans $\boldsymbol{R}$ telle que $e^{i\varphi}$ appartienne à $A(\boldsymbol{T})$. On associe à φ l'application Φ de $\boldsymbol{R}^2$ sur $\boldsymbol{R}$ définie par: $\Phi(x, y) = y - \varphi(x)$.

$\mathscr{B}$ est la sous-tribu des boréliens de $\boldsymbol{T}^2$ correspondant à l'image réciproque par Φ des boréliens de $\boldsymbol{R}$.

La sous-algèbre B de $A = A(\boldsymbol{T}^2)$ est l'ensemble des fonctions de A constantes sur les lignes de niveaux de $\boldsymbol{T}^2$ correspondant aux lignes de niveaux de $\boldsymbol{R}^2$ définies par $\Phi(x, y) = c^{te}$. B est donc l'ensemble des fonctions de A de la forme $F\circ\Phi$ où F est une fonction continue sur $\boldsymbol{T}$. Désignons par $\tilde{B}$ la sous-algèbre de $\mathscr{C}(\boldsymbol{T})$ des fonctions F telles que $F\circ\Phi$ appartienne à A.



Par transport de structure, $\tilde{B}$ est isométriquement isomorphe à l'algèbre de Banach B, avec la norme $\|F\|_{\tilde{B}} = \|F\circ\Phi\|_{A(T^2)}$.

Pour $x = x_0$ fixé, la fonction $F\big(\Phi(x_0, y)\big) = F\big(y - \varphi(x_0)\big)$ est une fonction de $A(\boldsymbol{T})$ en la variable y. La fonction F est donc elle-même une fonction de $A(\boldsymbol{T})$, c'est une série de Fourier:

$$F(t) = \sum_{n\in Z} a_n e^{int} \quad \text{avec} \quad \sum_n |a_n| < +\infty. \tag{1}$$

$F\circ\Phi$ étant une fonction de $A(\boldsymbol{T}^2)$, c'est une série de Fourier:

$$F\big(\Phi(x, y)\big) = \sum_{p,q\in Z^2} b_{p,q} e^{i(px+qy)} \tag{2}$$

avec

$$\|F\circ\Phi\|_{A(T^2)} = \sum_{p,q} |b_{p,q}|. \tag{3}$$

D'après (1) et (2), on a:

$$\sum_n a_n e^{in(y-\varphi(x))} = \sum_q e^{iqy}\Big(\sum_p b_{p,q} e^{ipx}\Big)$$

donc

$$a_n e^{-in\varphi(x)} = \sum_p b_{p,n} e^{ipx} \tag{4}$$

et

$$|a_n|\,\|e^{-in\varphi}\|_{A(T)} = \sum_p |b_{p,n}|. \tag{5}$$

Ainsi, d'après (3) et (5):

$$\|F\circ\Phi\|_{A(T^2)} = \sum_{n,p} |b_{p,n}| = \sum_n |a_n|\,\|e^{-in\varphi}\|_{A(T)}. \tag{6}$$

Posons $\omega(n) = \|e^{-in\varphi}\|_{A(T)}$; on remarque que $\|e^{-in\varphi}\|_{A(T)} = \|e^{in\varphi}\|_{A(T)} \geqslant 1$ et que ω est un poids sous multiplicatif sur $\boldsymbol{Z}$: $\omega(n_1+n_2) \leqslant \omega(n_1)\,\omega(n_2)$ pour tout couple (n_1, n_2) de $\boldsymbol{Z}^2$.

On associe à ω l'algèbre de Banach $A(\boldsymbol{T};\omega)$ (dite algèbre à poids ou algèbre de Beurling) des séries de Fourier 2π-périodiques absolument convergentes avec le poids ω:

$$F(t) = \sum_n a_n e^{int} \quad \text{avec} \quad \|F\|_{A(T;\omega)} = \sum_n |a_n|\,\omega(n) < +\infty.$$

Les calculs précédents montrent que $\tilde{B}$ est identique à $A(\boldsymbol{T};\omega)$:

Proposition 1. *La sous-algèbre de $A(\boldsymbol{T}^2)$ des fonctions constantes sur les lignes de niveaux $y-\varphi(x) = c^{te}$ est isométriquement isomorphe à l'algèbre à poids $A(\boldsymbol{T};\omega)$ des séries de Fourier 2π-périodiques absolument convergentes avec le poids ω:*

$$F(t) = \sum a_n e^{int}$$

avec

$$\|F\|_{A(\boldsymbol{T};\omega)} = \|F(y-\varphi(x))\|_{A(\boldsymbol{T}^2)} = \sum_n |a_n|\,\omega(n)$$

où $\omega(n) = \|e^{in\varphi}\|_{A(\boldsymbol{T})}$.

La sous-algèbre B dépendant de φ sera notée B_φ. Remarquons que si la série de Fourier de la fonction $e^{i\varphi}$ choisie continue et 2π-périodique n'était pas de plus choisie absolument convergente, contrairement à l'hypothèse faite, c'est-à-dire si φ n'était pas choisie assez régulière, alors la sous-algèbre B des fonctions de $A(\boldsymbol{T}^2)$ constantes sur les lignes de niveaux $y-\varphi(x) = c^{te}$ serait réduite à la sous-algèbre triviale des fonctions constantes sur $\boldsymbol{T}^2$.

La proposition 1 permet facilement de montrer:

Proposition 2. *Pour toute application φ, B_φ est complémentée dans* $A(\boldsymbol{T}^2)$.

Démonstration. En dehors du cas trivial où B_φ est réduite aux constantes, on utilise le résultat général suivant:

Dans un espace $L^1(X;\mu)$ un sous-espace fermé E qui est lui-même isométriquement isomorphe à un espace $L^1(Y;\nu)$ est complémenté dans $L^1(X;\mu)$ (Le résultat vaut encore si E est isomorphe à $L^1(Y;\nu)$ avec une distance d'isomorphisme assez proche de 1: Théorème de L. Dor [2]. Ici $A(\boldsymbol{T}^2)$ est isométriquement isomorphe à $l^1(\boldsymbol{Z}^2)$ et B_φ, sous-espace fermé de $A(\boldsymbol{T}^2)$, est isométrique à $l^1(\boldsymbol{Z};\omega)$ d'après la proposition 1.)

On peut, sans utiliser ce résultat général, donner une démonstration directe, suivant une idée de N. Leblanc (communication orale), de la complémentation, démonstration qui a l'avantage d'expliciter une projection:

Pour tout p de $\boldsymbol{Z}$, on développe en série de Fourier $e^{-ip\varphi}$:

$$e^{-ip\varphi(x)} = \sum_n C(n,p)\,e^{inx}.$$

Posons $a(n,p) = 0$ si $C(n,p) = 0$ et sinon $a(n,p) = (1/\|e^{ip\varphi}\|_{A(\boldsymbol{T})})\times \times\big(\overline{C(n,p)}/|C(n,p)|\big)$. On définit une application linéaire continue P de norme 1 de $A(\boldsymbol{T}^2)$ dans B_φ en posant pour tout couple (n,p) de $\boldsymbol{Z}^2$: $P(e^{i(nx+py)}) = a(n,p)\,e^{ip(y-\varphi(x))}$, car:

$$\|e^{ip(y-\varphi(x))}\|_{A(\boldsymbol{T}^2)} = \|e^{ipy}\|_{A(\boldsymbol{T})}\times\|e^{-ip\varphi(x)}\|_{A(\boldsymbol{T})} = \|e^{ip\varphi}\|_{A(\boldsymbol{T})}.$$

P est une projection sur B_φ car pour tout p de $\boldsymbol{Z}$:

$$\begin{aligned} P(e^{ip(y-\varphi(x))}) &= P\Big(\sum_n C(n,p)\,e^{i(nx+py)}\Big) \\ &= (1/\|e^{ip\varphi}\|_{A(\boldsymbol{T})})\Big(\sum_n C(n,p)\big(\overline{C(n,p)}/|C(n,p)|\big)\Big)e^{ip(y-\varphi(x))} \\ &= e^{ip(y-\varphi(x))}. \end{aligned}$$

II. On peut se demander si B_φ est bien complémentée. Bien que cette propriété ait un caractère algébrique, la réponse dépend de la régularité de φ: nous verrons que si φ est de classe C^2, alors B_φ est bien complémentée, mais qu'il n'en est pas de même si φ est linéaire par morceaux (et non linéaire). Pour donner une condition nécessaire et suffisante de bonne complémentation, précisons quelques notations: $PM(\boldsymbol{T})$ désigne l'espace dual de $A(\boldsymbol{T})$, le produit scalaire de dualité d'une forme linéaire S, dite pseudo mesure sur $\boldsymbol{T}$, avec une fonction f de $A(\boldsymbol{T})$ est

$$\langle S, f\rangle = \sum_n \hat{S}(-n)\hat{f}(n)$$

où

$$\hat{S}(n) = \langle S, e^{-int}\rangle$$

et

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int}f(t)\,dt$$

sont les n-ièmes coefficients de Fourier respectivement de S et f. La norme de la pseudo mesure S est:

$$\|S\|_{PM(\boldsymbol{T})} = \sup_n |\hat{S}(n)|.$$

$PM(\boldsymbol{T})$ est un module sur $A(\boldsymbol{T})$: S et g appartenant respectivement à $PM(\boldsymbol{T})$ et à $A(\boldsymbol{T})$, gS est la pseudo mesure sur $\boldsymbol{T}$ définie pour tout f de $A(\boldsymbol{T})$ par $\langle gS, f\rangle = \langle S, fg\rangle$ et $\|gS\|_{PM(\boldsymbol{T})} \leqslant \|g\|_{A(\boldsymbol{T})}\|S\|_{PM(\boldsymbol{T})}$.

Avec ces notations, on a:

Proposition 3. *B_φ est bien complémentée si et seulement s'il existe une pseudo mesure $S \neq 0$ dans $PM(\boldsymbol{T})$ et une constante $C > 0$ telle que pour tout p de $\boldsymbol{Z}$*:

$$\|e^{ip\varphi}\|_{A(\boldsymbol{T})}\times\|e^{ip\varphi}S\|_{PM(\boldsymbol{T})} \leqslant C.$$

Corollaire de la proposition 3. *A chaque fonction θ de $A(\boldsymbol{T})$ telle que $\langle S, \theta\rangle \neq 0$, on peut associer une espérance conditionnelle P_θ qui à toute fonction f de $A(\boldsymbol{T})$ fait correspondre la fonction de B_φ*:

$$(P_\theta f)(x,y) = \big\langle(\theta/\langle S,\theta\rangle)S,\ f(t, \varphi(t)+y-\varphi(x))\big\rangle_t$$

(le produit scalaire de dualité étant pris pour (x,y) fixés, en la variable t).

Démonstration. La condition de la proposition 3 est équivalente à l'existence d'une pseudo mesure U sur $\boldsymbol{T}$ vérifiant

$$(1)\qquad \langle U, 1\rangle = 1$$

et d'une constante $C_1 > 0$ telle que pour tout p de $\boldsymbol{Z}$:

$$\|e^{ip\varphi}\|_{A(\boldsymbol{T})} \times \|e^{ip\varphi} U\|_{PM(\boldsymbol{T})} \leqslant C_1. \tag{2}$$

En effet, si S satisfait la condition de la proposition (3), en prenant θ dans $A(\boldsymbol{T})$ telle que $\langle S, \theta\rangle \neq 0$, la pseudo mesure $U = \theta S/\langle S, \theta\rangle$ vérifie (1) et (2), car:

$$\|e^{ip\varphi} U\|_{PM(\boldsymbol{T})} \leqslant (1/|\langle S, \theta\rangle|)\|\theta\|_{A(\boldsymbol{T})}\|e^{ip\varphi} S\|_{PM(\boldsymbol{T})}.$$

1ère étape: Condition suffisante. Supposons qu'il existe une pseudo mesure S sur $\boldsymbol{T}$ ayant les propriétés (1) et (2). Pour tout couple (n, p) de $\boldsymbol{Z}^2$ définissons:

$$P(e^{i(nx+py)}) = \Big\langle S, \exp i\big(nt + p(\varphi(t) + y - \varphi(x))\big)\Big\rangle_t$$

le produit scalaire de dualité étant pris, pour (x, y) fixés, en la variable t. On a:

$$P(e^{i(nx+py)}) = \langle S, e^{i(nt+p\varphi(t))}\rangle e^{ip(y-\varphi(x))}$$

d'où

$$\|P(e^{i(nx+py)})\|_{A(\boldsymbol{T})} \leqslant \|e^{ip\varphi} S\|_{PM(\boldsymbol{T})} \times \|e^{ip\varphi}\|_{A(\boldsymbol{T})} \leqslant C_1.$$

Donc P prolongé par linéarité à $A(\boldsymbol{T}^2)$ est continue de norme $\|P\| \leqslant C_1$, et c'est une projection car $(Pf)(x, y) = \langle S, f(t, \varphi(t) + y - \varphi(x))\rangle_t$ et si $f(x, y) = F(y - \varphi(x))$, on obtient $Pf = f$. (Remarquons qu'on a nécessairement $C_1 \geqslant 1$.)

2ème étape: Condition nécessaire. Supposons B_φ bien complémentée par P projection linéaire continue de $A(\boldsymbol{T}^2)$ sur B_φ. Soit $\mathscr{I}$ l'isométrie de B_φ sur $\tilde{B}_\varphi = A(\boldsymbol{T}; \omega)$ qui à toute fonction $F(y - \varphi(x))$ de B_φ fait correspondre la fonction F de $A(\boldsymbol{T}; \omega)$ et soit $\tilde{P} = \mathscr{I} \circ P$.

Pour tout couple (n, p) de $\boldsymbol{Z}^2$, notons $\theta_{n,p}$ la fonction $\tilde{P}(e^{i(nx+py)})$ appartenant à $A(\boldsymbol{T}; \omega)$, dont le développement en série de Fourier est:

$$\theta_{n,p}(t) = \sum_{l \in \boldsymbol{Z}} a(n, p, l) e^{ilt} \tag{1}$$

avec

$$\|\theta_{n,p}\|_{A(\boldsymbol{T};\omega)} = \sum_l |a(n, p, l)|\,\omega(l) = \|P(e^{i(nx+py)})\|_{A(\boldsymbol{T}^2)} \leqslant \|P\|$$

où

$$\omega(l) = \|e^{il\varphi}\|_{A(\boldsymbol{T})}.$$

Posons

$$e^{-ip\varphi(x)} = \sum_n C(n, p) e^{inx}$$

d'où

$$e^{ip(y-\varphi(x))} = \sum_n C(n, p) e^{i(nx+py)}$$

donc

$$e^{ipt} = \sum_n C(n, p)\,\theta_{n,p}(t). \tag{2}$$

D'après (1) et (2), on a:

$$\sum_n C(n, p) a(n, p, l) = 0 \quad \text{si} \quad l \neq p, \qquad \sum_n C(n, p) a(n, p, p) = 1. \tag{3}$$

Pour tout triplet (n, p, l) de $\boldsymbol{Z}^3$, on a:

$$|a(n, p, l)| \leqslant \|\theta_{n,p}\|_\infty \leqslant \|\theta_{n,p}\|_{A(\boldsymbol{T};\omega)} \leqslant \|P\|,$$

ce qui permet de définir pour tout couple (p, l) de $\boldsymbol{Z}^2$ une pseudo mesure $V(p, l)$ sur $\boldsymbol{T}$ par $\hat{V}(p, l)(-n) = a(n, p, l)$ pour tout n de $\boldsymbol{Z}$. On a ainsi:

$$\sum_n C(n, p) a(n, p, l) = \sum_n \hat{V}(p, l)(-n) C(n, p) = \langle V(p, l), e^{-ip\varphi}\rangle;$$

donc (3) équivaut à:

$$\langle V(p, l), e^{-ip\varphi}\rangle = 0 \quad \text{si} \quad l \neq p, \qquad \langle V(p, p), e^{-ip\varphi}\rangle = 1. \tag{3'}$$

De plus $\sum_l |a(n, p, l)|\ \omega(l) \leqslant \|P\|$, donc $\sum_l |\hat{V}(p, l)(-n)|\,\omega(p) \leqslant \|P\|$ et a fortiori $|\hat{V}(p, p)(-n)|\,\omega(p) \leqslant \|P\|$ d'où

$$\|V(p, p)\|_{PM(\boldsymbol{T})}\,\omega(p) \leqslant \|P\|. \tag{4}$$

Puisque P est une espérance conditionnelle, on a pour tout triplet (n, p, k) de $\boldsymbol{Z}^3$: $\tilde{P}(e^{ik(y-\varphi(x))} e^{i(nx+py)}) = e^{ikt}\theta_{n,p}(t)$. Or

$$e^{ik(y-\varphi(x))} e^{i(nx+py)} = \sum_j C(j, k) e^{i(j+n)x} e^{i(k+p)y}. \tag{5}$$

Appliquons $\tilde{P}$ en utilisant l'expression:

$$\theta_{n,p}(t) = \sum_l \langle V(p, l), e^{inu}\rangle_u e^{ilt}. \tag{6}$$

On a donc d'après (5) et (6):

(7)
$$e^{ikt}\sum_q \langle V(p,q), e^{inu}\rangle e^{iql} = \sum_j C(j,k)\sum_l \langle V(k+p,l), e^{i(j+n)u}\rangle e^{ilt}$$
$$= \sum_l \langle V(k+p,l), e^{inu}e^{-ik\varphi(u)}\rangle e^{ill},$$

car $\sum_j C(j,k)e^{iju} = e^{-ik\varphi(u)}$. L'égalité (7) entraîne que pour tout 4-uple (p,n,l,k) de $\boldsymbol{Z}^4$:

$$\langle V(p,l-k), e^{inu}\rangle = \langle V(k+p,l), e^{-ik\varphi(u)}e^{inu}\rangle$$

c'est-à-dire pour tout triplet (p,l,k) l'égalité des pseudo mesures:

$$V(p,l-k) = e^{-ik\varphi}V(k+p,l).$$

En particulier, prenons $p=0$, $l=k$, on a:

$$V(0,0) = e^{-ik\varphi}V(k,k) \quad \text{pour tout } k \text{ de } \boldsymbol{Z}.$$

Notons S cette pseudo mesure $V(0,0)$, les relations (3′) et (4):

$$\langle V(p,p), e^{-ip\varphi}\rangle = 1$$

et

$$\|V(p,p)\|_{PM(\boldsymbol{T})}\,\omega(p) \leqslant \|P\|$$

montrent que $\langle S,1\rangle = 1$ et $\|e^{ip\varphi}S\|_{PM(\boldsymbol{T})}\times\|e^{ip\varphi}\|_{A(\boldsymbol{T})} \leqslant \|P\|$ car $V(p,p) = e^{ip\varphi}S$ et $\omega(p) = \|e^{ip\varphi}\|_{A(\boldsymbol{T})}$. S possède donc les propriétés requises, ce qui achève de démontrer la proposition 3.

Lorsque B_φ est bien complémentée, on peut se demander s'il existe une espérance conditionnelle au sens des probabilités projetant A sur B_φ. Voici une réponse partielle:

PROPOSITION 4. *Soit $d\nu$ une mesure de probabilité sur $\boldsymbol{T}$ et $d\mu(x,y) = d\nu(x)\otimes dy$ qui est alors une mesure de probabilité sur $\boldsymbol{T}^2$. Soit $\mathscr{B} = \mathscr{B}(\Phi)$ la sous-tribu des boréliens de $\boldsymbol{T}^2$ associée à la fonction $\Phi(x,y) = y-\varphi(x)$. Soit $\mathscr{E}^{\mathscr{B}}$ la projection orthogonale de $L^2(\boldsymbol{T}^2;\mathscr{A};d\mu)$ sur $L^2(\boldsymbol{T}^2;\mathscr{B};d\mu)$. $\mathscr{E}^{\mathscr{B}}$ est une projection continue de $A(\boldsymbol{T}^2)$ sur B_φ si et seulement s'il existe une constante $C>0$ telle que pour tout p de $\boldsymbol{Z}$*:

(1)
$$\|e^{ip\varphi}\|_{A(\boldsymbol{T})}\times\|e^{ip\varphi}d\nu\|_{PM(\boldsymbol{T})} \leqslant C$$

et on a:

(2)
$$\mathscr{E}^{\mathscr{B}}(f) = \int_{\boldsymbol{T}} f\big(t,\varphi(t)+y-\varphi(x)\big)\,d\nu(t).$$

Démonstration. Un calcul facile pour une fonction f continue sur $\boldsymbol{T}^2$ donne $\mathscr{E}^{\mathscr{B}}(f)$ sous la forme (2). En particulier:

$$\mathscr{E}^{\mathscr{B}}\big(e^{i(nx+py)}\big) = \Big(\int_0^{2\pi} e^{int}e^{ip\varphi(t)}\,d\nu(t)\Big)e^{ip(y-\varphi(x))}.$$

$\mathscr{E}^{\mathscr{B}}$ est continue dans $A(\boldsymbol{T}^2)$ si et seulement s'il existe une constante $C>0$ telle que pour tout couple (n,p) de $\boldsymbol{Z}^2$:

$$\Big|\int_0^{2\pi} e^{i(nt+p\varphi(t))}\,d\nu(t)\Big| \times \|e^{ip\varphi}\|_{A(\boldsymbol{T})} \leqslant C$$

c'est-à-dire pour tout p de $\boldsymbol{Z}$:

$$\|e^{ip\varphi}d\nu\|_{PM(\boldsymbol{T})}\times\|e^{ip\varphi}\|_{A(\boldsymbol{T})} \leqslant C.$$

On peut alors démontrer:

PROPOSITION 5. *Si φ est de classe C^2, B_φ est bien complémentée par une espérance conditionnelle au sens des probabilités.*

Démonstration. Si φ est linéaire, la proposition 4 s'applique avec $d\nu(x) = dx/2\pi$ car $\|e^{ip\varphi}\|_{A(\boldsymbol{T})} = 1$.

Si φ est non linéaire de classe C^2, il existe un intervalle I de $\boldsymbol{T}$ et un nombre $\alpha>0$ tel que pour tout t dans I, on ait $|\varphi''(t)| \geqslant \alpha$. On utilise alors le lemme suivant dû à Van der Corput [4].

LEMME. *Soit f une fonction de classe C^2 à valeurs réelles définie sur un intervalle $[a,b]$ et telle qu'il existe $\varrho>0$ avec $|f''(t)|\geqslant\varrho$ pour tout t dans $[a,b]$. On a*:

$$\Big|\int_a^b e^{if(t)}\,dt\Big| \leqslant 4\sqrt{2\pi}/\sqrt{\varrho}.$$

On applique ce lemme avec $I=[a,b]$, $f(t) = nt+p\varphi(t)$ de sorte que $f''(t) = p\varphi''(t)$, ainsi:

$$\Big|\int_I e^{i(nt+p\varphi(t))}\,dt\Big| \leqslant C/\sqrt{|p|} \quad\text{avec}\quad C = 4\sqrt{2\pi}/\sqrt{\alpha}.$$

On prend $d\nu(t) = (1/|I|)\chi_I(t)\,dt$, χ_I fonction indicatrice de I et dt mesure de Lebesgue de $[0,2\pi]$. On a donc:

$$\Big|\int_0^{2\pi} e^{i(nt+p\varphi(t))}\,d\nu(t)\Big| \leqslant C_1/\sqrt{|p|}$$

où C_1 ne dépend pas de n et de p, donc:

(1)
$$\|e^{ip\varphi}d\nu\|_{PM(\boldsymbol{T})} \leqslant C_1/\sqrt{|p|}.$$

Par ailleurs, si f et f' appartiennent à $L^2(\boldsymbol{T})$, on a une inégalité classique (dite de Carlson); voir par exemple [3]:

$$\|f\|_{A(T)} \leqslant 2\sqrt{2}\,\|f\|_{L^2(T)}^{1/2} \times \|f'\|_{L^2(T)}^{1/2} + \sqrt{3}\,\|f\|_{L^2(T)}.$$

On applique ceci avec $f(t) = e^{ip\varphi(t)}$ d'où une constante $C_2 > 0$ telle que pour tout p de $\boldsymbol{Z}$:

$$\|e^{ip\varphi}\|_{A(T)} \leqslant 1 + C_2\sqrt{|p|}. \tag{2}$$

D'après (1) et (2), la proposition (4) s'applique et B_φ est *bien complémentée* par l'espérance conditionnelle au sens des probabilités:

$$f \rightsquigarrow \int_0^{2\pi} f\big(t, \varphi(t) + y - \varphi(x)\big)\, d\nu(t).$$

PROPOSITION 6. *Si φ est linéaire par morceaux et non linéaire, B_φ n'est pas bien complémentée.*

Démonstration. D'après la proposition 3, supposons qu'il existe une pseudo mesure $S \neq 0$ sur $\boldsymbol{T}$ et une constante $C > 0$ telle que pour tout p de $\boldsymbol{Z}$:

$$\|e^{ip\varphi}\|_{A(T)} \times \|e^{ip\varphi} S\|_{PM(T)} \leqslant C. \tag{1}$$

Considérons le graphe de l'application φ de $\boldsymbol{R}$ dans $\boldsymbol{R}$. Choisissons un intervalle $[a, a+2\pi[$ tel que a soit l'abscisse d'un point anguleux du graphe (il en est alors de même pour $a+2\pi$) et soit E l'ensemble: $x_1 = a < x_2 < \ldots < x_N$ des abscisses croissantes des N points anguleux du graphe correspondant à l'intervalle $[a, a+2\pi[$. $\boldsymbol{T}$ s'identifie à la réunion de E et des intervalles disjoints I_j, $j = 1, 2, \ldots, N$ avec $I_j =]x_j, x_{j+1}[$ pour $j = 1, 2, \ldots, N-1$ et $I_N =]x_N, a+2\pi[$.

Supposons le support de S non contenu dans E; il existe alors une fonction f de $A(\boldsymbol{T})$ dont le support est disjoint de E, c'est-à-dire $\operatorname{supp} f \subset \bigcup_{j=1,2,\ldots,N} I_j$ et telle que $\langle S, f\rangle \neq 0$.

Alors $\operatorname{supp} f \cap I_j = K_j$ est un compact contenu dans I_j. Il est possible de choisir une fonction $g_j \in C^\infty$, égale à 1 sur K_j, à support compact $\tilde{K}_j \subset I_j$. Alors $fg_j = f_j$ appartient à $A(\boldsymbol{T})$ et $f = f_1 + \ldots + f_N$. Il existe au moins un indice j_0 tel que $\langle S, f_{j_0}\rangle \neq 0$. Ecrivons de deux façons le produit scalaire:

$$\langle S, f_{j_0}\rangle = \langle e^{ip\varphi} S, e^{-ip\varphi} f_{j_0}\rangle$$

d'où

$$|\langle S, f_{j_0}\rangle| \leqslant \|e^{ip\varphi} S\|_{PM(T)} \|e^{-ip\varphi} f_{j_0}\|_{A(T)}. \tag{2}$$

Sur I_{j_0} on a: $\varphi(x) = y_0 + \lambda_0 x$, y_0 et λ_0 constantes réelles, donc:

$$e^{-ip\varphi} f_{j_0} = e^{-ipy_0} e^{-ip\lambda_0 x} f_{j_0}.$$

Or $A(\boldsymbol{T})$ est localement isomorphe à $A(\boldsymbol{R}) = \mathfrak{F}\big(L^1(\boldsymbol{R})\big)$, donc il existe une constante $C_1 > 0$ telle que:

$$\|e^{-ip\lambda_0 x} f_{j_0}\|_{A(T)} \leqslant C_1 \|e^{-ip\lambda_0 x} f_{j_0}\|_{A(R)} = C_1 \|f_{j_0}\|_{A(R)}$$

donc d'après (2):

$$|\langle S, f_{j_0}\rangle| \leqslant C_1 \|e^{ip\varphi} S\|_{PM(T)} \|f_{j_0}\|_{A(R)}$$

ce qui, avec l'hypothèse (1), entraîne:

$$\|e^{ip\varphi}\|_{A(T)} \leqslant \big(CC_1/|\langle S, f_{j_0}\rangle|\big) \|f_{j_0}\|_{A(R)}.$$

D'après un théorème de Beurling et Helson [1], ceci est impossible si φ n'est pas linéaire. C'est donc que le support de S est contenu dans E. C'est-à-dire que $S = a_1\delta_{x_1} + \ldots + a_N\delta_{x_N}$ est une somme de mesures de Dirac aux points $x_1 \ldots x_N$ (il ne peut y avoir de dérivées de mesure de Dirac, car ce ne sont pas des pseudo mesures). Pour tout $j = 1, \ldots, N$, hcoisissons une fonction g_j appartenant à $A(\boldsymbol{T})$ dont le support rencontre E au point x_j et telle que $g_j(x_j) \neq 0$. On a $\langle e^{ip\varphi} S, g_j\rangle = a_j e^{ip\varphi(x_j)} g_j(x_j)$, donc:

$$|a_j|\,|g_j(x_j)| = |\langle e^{ip\varphi} S, g_j\rangle| \leqslant \|e^{ip\varphi} S\|_{PM(T)} \times \|g_j\|_{A(T)}.$$

L'hypothèse (1) entraîne si $a_j \neq 0$:

$$\|e^{ip\varphi}\|_{A(T)} \leqslant \big(C/|a_j|\,|g_j(x_j)|\big) \|g_j\|_{A(T)}$$

ce qui à nouveau est impossible d'après le théorème de Beurling et Helson. Donc $a_j = 0$ pour $j = 1, \ldots, N$ et ainsi $S = 0$ ce qui achève la démonstration.

References

[1] A. Beurling et Helson, *Fourier Stieltjes transforms with bounded powers*, Math. Scand. 1 (1953), 120–126.
[2] L. Dor, Ann. of Math. (1975), 463–474.
[3] J. P. Kahane, *Séries de Fourier absolument convergentes*, Springer, 1970, p. 76.
[4] A. Zygmund, *Trigonometric series*, Vol. 1, Cambridge 1959, p. 197.

Received October 12, 1979 (1578)