STUDIA MATHEMATICA, T. LXXIV. (1982)

Sur un problème de W. Rudin concernant les fonctions holomorphes et bornées

par

ERIC AMAR (Bordeaux)

Abstract. Let V be an analytic subvariety of the polydisc $\boldsymbol{D}^n$ in $\boldsymbol{C}^n$; let $H^\infty(\boldsymbol{D}^n)$ be the space of bounded holomorphic functions in $\boldsymbol{D}^n$ and $H^\infty(V)$ the space of bounded holomorphic functions on V.

V possesses the (W.R.) property if:

(W.R.) $f \in H^\infty(\boldsymbol{D}^n)$ and $1/f \in H^\infty(V) \Rightarrow \exists\, g \in H^\infty(\boldsymbol{D}^n)$ s.t. $g \mid V = 1/f$.

In this work we give a simple characterization of the varieties V which are (W.R.) in the case of the unit disc ($n = 1$) and we answer a question of W. Rudin.

Introduction. Soit V un sous-ensemble analytique du polydisque $\boldsymbol{D}^n = \{z = (z_1, \ldots, z_n) \in \boldsymbol{C}^n, |z_i| < 1\}$; on note $H^\infty(\boldsymbol{D}^n)$ l'espace des fonctions holomorphes et bornées dans $\boldsymbol{D}^n$, $H^\infty(V)$ celui des fonctions holomorphes et bornées sur V.

On dira que V *possède la propriété* (W.R.) (pour W. Rudin) si on a:

(W.R.) $f \in H^\infty(\boldsymbol{D}^n)$ et $1/f \in H^\infty(V) \Rightarrow \exists\, g \in H^\infty(\boldsymbol{D}^n)$ t.q. $g \mid V = 1/f$.

Dans [3], pb no. 7.5.9, W. Rudin pose la question de savoir quelles sont les variétés ayant la propriété (W.R.) et si toute variété V de $\boldsymbol{D}^n$ la possède. On va montrer que, déjà pour $n = 1$, il n'en est rien si on autorise V a être de connectivité infinie.

En fait dans ce cas on obtient une caractérisation des suites de points (qui sont les seuls ensembles holomorphes de $\boldsymbol{D}$) vérifiant (W.R.).

THÉORÈME. *Pour qu'une suite σ vérifie la condition* (W.R.) *il faut et il suffit que σ soit une union finie de suites d'interpolation.*

Rappelons que $\sigma = \{z_n, n \in \boldsymbol{N}\}$ est une suite d'interpolation si:

(I) $\forall \{\lambda_n, n \in \boldsymbol{N}\} \in l^\infty(N)$, $\exists\, f \in H^\infty(\boldsymbol{D})$ t.q. $f(z_n) = \lambda_n$ $\forall n \in \boldsymbol{N}$.

Ces suites ont été complètement caractérisées par L. Carleson [1].

(I′) $$\sigma \text{ interpolation} \Leftrightarrow \inf_n \prod_{k \neq n} \left| \frac{z_n - z_k}{1 - \bar{z}_k z_n} \right| > 0.$$

Remarque 1. Ce théorème répond à la question de W. Rudin car il existe des suites σ, zéro de fonction de $H^\infty(\boldsymbol{D})$ qui ne sont pas union finie de suites d'interpolation.

Remarque 2. On a que σ vérifie (W.R.) si et seulement si la mesure $\sum_{z\in\sigma}(1-|z|^2)\delta_z$ est de Carleson dans $\boldsymbol{D}$. Il serait intéressant d'obtenir ce fait directement sans passer par un découpage dans un sens, et par le théorème de la couronne dans l'autre.

Remarque 3. W. Rudin m'a donné un exemple dans la boule de $\boldsymbol{C}^2$ (et dans le polydisque de $\boldsymbol{C}^2$) de variété V vérifiant (W.R.) mais n'étant pas le zéro d'une fonction de $H^\infty(\boldsymbol{B})$ (où de $H^\infty(\boldsymbol{D}^2)$).

Le problème reste entier dans $\boldsymbol{C}^n$ pour le cas d'une variété irréductible.

L'exemple de W. Rudin est le suivant: Sur la sphère $S_r = \{z\in \boldsymbol{C}^2, |z| = r<1\}$ on met un nombre fini de points σ_r de sorte que:

$$\forall\delta>0,\ \forall f\in H^\infty(\boldsymbol{B})\ |f(z)|\geqslant\delta \text{ sur } \sigma_r\Rightarrow|f|\geqslant\delta/2 \text{ sur } S_r.$$

Prenant une suite r_n de réels <1 t.q. $r_n\to 1$, on a, avec $\sigma=\bigcup_n\sigma_{r_n}$: $\forall\delta$, $\forall f\in H^\infty(\boldsymbol{B})$ $|f|\geqslant\delta$ sur σ alors $|f|\geqslant\delta/2$ dans $\bigcup_n S_{r_n}$. La variété σ vérifie (W.R.) mais n'est pas le zéro commun à des fonctions de $H^\infty(\boldsymbol{B})$.

On peut prendre V de codimension 1 en prenant les disques complexes de centre les points de σ. L'union de ces disques est une variété holomorphe qui ne peut même pas être le zéro d'une fonction de la classe de Nevanlinna, la condition de Blaschke n'étant pas vérifiée si il y a assez de points par sphère S_{r_n}.

Pour le polydisque on procède de manière analogue avec les "sphères" $\max(|z_1|, |z_2|) = r<1$.

0. Rappels. Si $\sigma=\{z_n, n\in\boldsymbol{N}\}$ est une suite d'interpolation dans $\boldsymbol{D}$ alors la mesure

$$\mu=\sum_n(1-|z_n|^2)\delta_{z_n} \tag{0.1}$$

est de Carleson dans $\boldsymbol{D}$ [1] et les points z_n sont uniformément séparés:

$$\left|\frac{z_n-z_m}{1-\bar z_m z_n}\right|\geqslant\delta>0\quad\forall n\neq m. \tag{0.2}$$

Réciproquement, on sait [1] que si μ est de Carleson et si (0.2) est vrai, alors $\{z_n, n\in\boldsymbol{N}\}$ est d'interpolation.

Si σ est d'interpolation et si ζ_0 est tel que

$$\zeta_0\in\boldsymbol{D} \text{ et } d(\zeta_0,\sigma)=\inf_{z\in\sigma}\left|\frac{\zeta-z}{1-\bar z\zeta}\right|\geqslant\varepsilon>0 \tag{0.3}$$

alors $\zeta_0\cup\sigma$ est encore d'interpolation grâce à la caractérisation ci-dessus. Utilisant la caractérisation équivalente (I') de l'introduction, on en déduit:

$$\sigma \text{ interpolation},\ \forall\varepsilon>0,\ \exists\gamma>0 \text{ t.q. } d(\zeta,\sigma)\geqslant\varepsilon\Rightarrow|U_\sigma(\zeta)|\geqslant\gamma \tag{0.4}$$

où

$$U_\sigma(\zeta)=\prod_{z\in\sigma}\frac{\bar z}{|z|}\frac{\zeta-z}{1-\bar z\zeta}.$$

Enfin si $\mu=\Sigma(1-|z_n|^2)\delta_{z_n}$ est une mesure de Carleson (δ_{z_n} est la mesure de Dirac en z_n) alors $\sigma=\{z_n, n\in\boldsymbol{N}\}$ est une union finie de suites d'interpolation; la réciproque est évidente.

1. Une equivalence. Soit σ une suite de points de D; on a alors la proposition suivante:

PROPOSITION 1.1. *La suite σ vérifie* (W.R.) *si et seulement si:*

(1) *σ est une suite de Blaschke.*

(2) *Si U_σ est le produit de Blaschke associé, on a*

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\gamma>0,\ \forall\zeta\in\boldsymbol{D} \text{ t.q. } d(\zeta,\sigma)\geqslant\varepsilon\Rightarrow|U_\sigma(\zeta)|\geqslant\gamma \tag{1.1}$$

où on a posé

$$U_\sigma(\zeta)=\prod_{z\in\sigma}\frac{\bar z}{|z|}\left(\frac{\zeta-z}{1-\bar z\zeta}\right) \tag{1.2}$$

et d est la distance de Gleason dans $\boldsymbol{D}$:

$$\forall z,\zeta\in\boldsymbol{D},\ d(z,\zeta)=\left|\frac{z-\zeta}{1-\bar\zeta z}\right|. \tag{1.3}$$

Preuve de la proposition 1.1. Si σ n'est pas une suite de Blaschke, soit $z_0\in\boldsymbol{D}$, $z_0\notin\sigma$ et considérons la fonction $f=\zeta-z_0$; sur σ (qui ne peut s'accumuler qu'au bord) on a

$$|f|\geqslant\delta>0\quad\text{sur}\quad\sigma \tag{1.4}$$

donc si (W.R.) est vrai pour σ il vient:

$$\exists\varphi\in H^\infty(\boldsymbol{D}) \text{ t.q. } f\varphi=1 \text{ sur } \sigma \tag{1.5}$$

mais alors $f\varphi-1$ est nul sur σ et est dans $H^\infty(\boldsymbol{D})$ donc $f\varphi-1=0$ dans $\boldsymbol{D}$ tout entier ce qui n'est pas possible car $f(z_0)=0$.

Pour montrer (1.1) supposons que σ vérifie (W.R.), on a alors, pour $\zeta_0\in\boldsymbol{D}$, $d(\zeta_0,\sigma)\geqslant\varepsilon$; on considère

$$f_0(\zeta)=\frac{\zeta-\zeta_0}{1-\bar\zeta_0\zeta}.$$

Par hypothèse $|f_0| \geqslant \varepsilon$ sur σ donc il existe $\varphi_0 \in H^\infty(\boldsymbol{D})$ tel que

$$f_0 \varphi_0 = 1 \quad \text{sur} \quad \sigma. \tag{1.7}$$

Montrons

$$\|\varphi_0\|_\infty \leqslant C(\sigma, \varepsilon) \tag{1.8}$$

où C est indépendant de ζ_0.

Si (1.8) était faux, alors

$$\exists \zeta_n \in \boldsymbol{D},\ d(\zeta_n, \sigma) \geqslant \varepsilon \text{ et } \|\varphi_n\|_* \geqslant n \tag{1.9}$$

où $\|f\|_*$ désigne la norme de f dans le quotient $H^\infty / U_\sigma H^\infty$.

Si ζ_n ne tend pas vers le bord de $\boldsymbol{D}$ alors il existe $\zeta^* \in \boldsymbol{D}$ adhérent à ζ_n. Supposons que ζ_n tend vers ζ^* (quitte à prendre une sous-suite); alors f_n tend vers f^* dans le quotient avec

$$f^* = \frac{\zeta - \zeta^*}{1 - \bar{\zeta}^* \zeta}$$

et, par hypothèse f^* est inversible. On a alors

$$f_n = f^* + f_n - f^* \Rightarrow \varphi_n = \varphi^*[1 + (f_n - f^*)\varphi^*]^{-1}$$

et pour n assez grand $\|(f_n - f^*)\varphi^*\|_* < 1$ d'où $\|\varphi_n\|_* < C$ et la contradiction.

Si ζ_n tend vers $\partial \boldsymbol{D}$ alors on peut extraire de $\{\zeta_n\}$ une sous-suite infinie d'interpolation; il suffit de choisir ζ_{n_k} t.q. $1 - |\zeta_{n_k}| \leqslant \frac{1}{2}(1 - |\zeta_{n_{k-1}}|)$.

Appelons V le *produit de Blaschke* dont les zéros sont ζ_{n_k}, on a alors

$$|V| \geqslant \gamma > 0 \quad \text{sur} \quad \sigma \tag{1.10}$$

grâce à (0.4) car $\forall z \in \sigma,\ d(z, s) \geqslant \varepsilon$ où $s = \{\zeta_{n_k}, k \in \boldsymbol{N}\}$. Donc, grâce à (W.R.)

$$\exists G \in H^\infty(\boldsymbol{D}) \text{ t.q. } V \cdot G = 1 \text{ sur } \sigma. \tag{1.11}$$

Mais $V = f_{n_k} \cdot V_k$ avec $f_{n_k} = \dfrac{\zeta - \zeta_{n_k}}{1 - \bar{\zeta}_{n_k} \zeta}$ et $\|V_k\|_* \leqslant 1$. On en déduit $f_{n_k} \cdot (V_k G) = 1$ sur σ, donc $\varphi_{n_k} = V_k G$ dans le quotient et $\|V_k G\|_* \leqslant \|G\|_*$ $\forall k \in \boldsymbol{N}$ d'où $\|\varphi_{n_k}\|_* \leqslant \|G\|_*$ $\forall k \in \boldsymbol{N}$ et la contradiction qui prouve (1.8).

De (1.7) et (1.8), on déduit

$$f_0 \varphi_0 + g U_\sigma = 1 \quad \text{avec} \quad \|g\|_\infty \leqslant 1 + \|\varphi_0\|_\infty \leqslant 1 + C(\sigma, \varepsilon) \tag{1.12}$$

d'où faisant $\zeta = \zeta_0$ dans (1.12)

$$|U_\sigma(\zeta_0)| = \frac{1}{|g(\zeta_0)|} \geqslant \frac{1}{\|g\|_\infty} \geqslant \frac{1}{1 + C(\sigma, \varepsilon)}. \tag{1.13}$$

Réciproquement supposons (1) et (2) de la proposition vérifiés pour σ et soit f dans $H^\infty(\boldsymbol{D})$ t.q. $|f| > \delta > 0$ sur σ; puisque $f \in H^\infty(\boldsymbol{D})$, il existe $\varepsilon > 0$ t.q.

$$\forall \zeta \in \boldsymbol{D},\ d(\zeta, \sigma) \leqslant \varepsilon \Rightarrow |f(\zeta)| \geqslant \delta/2, \tag{1.14}$$

car d est la distance de Gleason; par (2) de la proposition, il existe $\gamma = \gamma(\varepsilon) > 0$ t.q.

$$\forall \zeta \in \boldsymbol{D}\ d(\zeta, \sigma) \geqslant \varepsilon \Rightarrow |U_\sigma(\zeta)| \geqslant \gamma; \tag{1.15}$$

de (1.14) et (1.15), on déduit donc:

$$\forall \zeta \in \boldsymbol{D}\ |f(\zeta)| + |U_\sigma(\zeta)| \geqslant \min(\delta/2, \gamma) > 0. \tag{1.16}$$

Utilisant alors le théorème de la couronne de L.Carleson [2], il vient

$$\exists \varphi \text{ et } g \text{ dans } H^\infty(\boldsymbol{D}) \text{ t.q. } f\varphi + U_\sigma g = 1 \tag{1.17}$$

donc σ est bien (W.R.).

2. Condition suffisante. Soit $\sigma = s_1 \cup \ldots \cup s_n$ où s_i est une suite d'interpolation dans $\boldsymbol{D}$. Alors σ est de Blaschke. Considérons les produits de Blaschke associés

$$U_i(\zeta) = \prod_{z \in s_i} \frac{\bar{z}}{|z|} \left(\frac{\zeta - z}{1 - \bar{z}\zeta} \right), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.1}$$

Soit alors $\zeta_0 \in \boldsymbol{D}$ t.q. $d(\zeta_0, \sigma) \geqslant \varepsilon > 0$ cela entraîne

$$d(\zeta_0, s_i) \geqslant \varepsilon, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.2}$$

Mais alors (0.4) donne

$$|U_i(\zeta_0)| \geqslant \gamma_i > 0, \quad i = 1, 2, \ldots n. \tag{2.3}$$

donc

$$|U_\sigma(\zeta_0)| \geqslant \gamma_1 \ldots \gamma_n > 0. \tag{2.4}$$

On conclut alors de (2.4) grâce à la proposition 1.1.

3. Condition necessaire. Il nous faut montrer que si les conditions (1) et (2) du lemme 1.1 sont remplies pour la suite σ, alors σ est une union finie de suites d'interpolation.

On a la proposition:

PROPOSITION 3.1. *Si σ vérifie* (1) *et* (2) *alors il existe $\varepsilon > 0$ et $N \in \boldsymbol{N}$ tels que:*

$$\forall z \in \sigma,\ |B(z, \varepsilon) \cap \sigma| \leqslant N$$

où $B(z, \varepsilon)$ est la boule de centre z et de rayon de Gleason ε et $|E|$ est le cardinal de E.

Supposons la proposition 3.1 fausse alors cela signifie que

(3.1) $$\forall \varepsilon > 0,\ \forall N,\ \exists z_{\varepsilon,N} \in \sigma \text{ t.q. } |B(z_{\varepsilon,N}, \varepsilon) \cap \sigma| \geqslant N.$$

La condition (2) donne alors

$$\forall \varepsilon' > 0\ \exists \gamma' > 0 \text{ t.q. } d(\zeta, \sigma) \geqslant \varepsilon' \Rightarrow |U_\sigma(\zeta)| \geqslant \gamma'.$$

Si l'on prend ε très petit devant ε', on déduit que

$$|U_\sigma(\zeta)| \leqslant 2\, d(\zeta, z_{\varepsilon,N})^N$$

d'où

(3.2) $$d(\zeta, z_{\varepsilon,N}) \geqslant (\gamma'/2)^{1/N}.$$

Donc les points de $\boldsymbol{D}$ tels que $d(\zeta, \sigma) \geqslant \varepsilon'$ ne peuvent s'approcher à moins de $(\gamma'/2)^{1/N}$ de $z_{\varepsilon,N}$; cela signifie donc que dans la boule de Gleason de centre $z_{\varepsilon,N}$ et de rayon $(\gamma'/2)^{1/N}$ il y a un réseau de points de σ de maille ε'; notons $R_{\varepsilon',\varepsilon,N}$ ce réseau.

On va calculer la valeur du produit de Blaschke $B_{\varepsilon',\varepsilon,N}$ ayant pour zéro ces points du réseau en un point de $\boldsymbol{D}$ tel que $d(\zeta, \sigma) = d(\zeta, \text{réseau}) = \varepsilon'$.

Lemme 3.1. *Pour ε' donné, il y a une infinité de ε et de N tels qu'il existe ζ dans $\boldsymbol{D}$ vérifiant*

$$d(\zeta, \sigma) = d(\zeta, R_{\varepsilon',\varepsilon,N}) = \varepsilon'.$$

Preuve du lemme 3.1. Si tel n'était pas le cas pour une infinité de ε et de N les réseaux $R_{\varepsilon',\varepsilon,N}$ seraient reliés en un "grand" réseau de maille ε' contenant une infinité de lignes $1-|\zeta|^2 = 1-|z_{\varepsilon,N}|^2$ complètement remplies par des points de σ: la suite σ ne serait pas alors de Blaschke contredisant le (1) du lemme 1.1.

Lemme 3.2. *Soit $\zeta = \zeta_{\varepsilon',\varepsilon,N}$ un point de $\boldsymbol{D}$ tel que $d(\zeta, \sigma) = d(\zeta, R_{\varepsilon',\varepsilon,N}) = \varepsilon'$ alors on a $|B_{\varepsilon',\varepsilon,N}(\zeta)| \to 0$ quand $N \to \infty$.*

Preuve. Par transformation conforme on ne change rien aux distances de Gleason, donc on ne change pas la valeur des produits de Blaschke. Passant dans le demi-plan et faisant $\zeta_{\varepsilon',\varepsilon,N} = i$, on est dans la situation suivante:

$$R_{\varepsilon',\varepsilon,N} \subset \{z = 2^{-n}i + k2^{-n},\ k = (-2^n, -2^n+1, \ldots, 2^n),\ 1 \leqslant n \leqslant n_0\}$$

où n_0 dépend de la taille du réseau $R_{\varepsilon',\varepsilon,N}$.

La relation (3.2) donne que la taille de $R_{\varepsilon',\varepsilon,N}$ est au moins $\gamma'^{1/N}$ donc:

(3.3) $$N \to +\infty \Rightarrow \gamma'^{1/N} \to 1 \quad \text{donc} \quad n_0 \to +\infty.$$

D'autre part ε' a été choisi pour avoir le réseau dyadique.

Calculons alors $B_{\varepsilon',\varepsilon,N}(i)$:

(3.4) $$B_{\varepsilon',\varepsilon,N}(i) = \prod_{n=1}^{n_0} \prod_{k=-2^n}^{+2^n} \frac{i(1-2^{-n})-k2^{-n}}{i(1+2^{-n})-k2^{-n}} = \prod_{n=1}^{n_0} b_n.$$

On a

$$|b_n|^2 = \prod_{k=-2^n}^{2^n} \frac{(1-2^{-n})^2+k^2 2^{-2n}}{(1+2^{-n})^2+k^2 2^{-2n}} = \prod_{k=-2^n}^{2^n} \left(1 - \frac{2^{-n+1}}{(1+2^{-n})^2+k^2 2^{-2n}}\right)$$

d'où (3.5)

$$|b_n|^2 = \prod_k (1-a_k)$$

et

$$\log|b_n|^2 = \sum_{k=-2^n}^{2^n} \log(1-a_k) \leqslant -\sum_{k=-2^n}^{2^n} a_k = -S_n$$

mais

$$S_n = \sum_k \frac{2^{-n+1}}{(1+2^{-n})^2+k^2 2^{-2n}} \geqslant \sum_{k=-2^n}^{2^n} \frac{2^{-n+1}}{5} \geqslant 4/5$$

d'où

$$\log|b_n|^2 \leqslant -4/5 \Rightarrow |b_n|^2 \leqslant e^{-4/5} = \delta^2 < 1 \qquad \forall n \in \boldsymbol{N}.$$

On en déduit

(3.6) $$|B_{\varepsilon',\varepsilon,N}(i)| \leqslant \delta^{n_0}.$$

D'où avec (3.3) quand $N \to \infty$ $|B_{\varepsilon',\varepsilon,N}(i)| \to 0$ et le lemme 3.2.

Preuve de la proposition 3.1. ε' étant fixé, γ' l'est aussi et on a pour ε et N:

$$\gamma' \leqslant |U_\sigma(\zeta_{\varepsilon',\varepsilon,N})| \leqslant |B_{\varepsilon',\varepsilon,N}(\zeta_{\varepsilon',\varepsilon,N})|$$

faisant tendre N vers l'infini, il vient $\gamma' = 0$ ce qui est contraire à (2) du lemme et achève la preuve de la proposition 3.1.

Preuve de la condition nécessaire. Prenons le ε et le N donnés par la proposition 3.1 et considérons la sous-suite de points de σ ainsi construite. On prend $z_{n_1} = z_1$ $\sigma = \{z_k,\ k \in \boldsymbol{N}\}$ et z_{n_2} un point de σ t.q. $z_{n_2} \notin B(z_1, \varepsilon)$ et ainsi de suite.

On a bien sûr

(3.7) $$\sigma \subset \bigcup_{k \in \boldsymbol{N}} B(z_{n_k}, \varepsilon)$$

et il y a au plus N points de σ dans $B(z_{n_k}, \varepsilon)$.

Il existe $\varepsilon' = \varepsilon'(\varepsilon, N) < \varepsilon$ tel que chaque $B(z_{n_k}, \varepsilon)$ contiennent un point ζ_{n_k} de $\boldsymbol{D}$ vérifiant

$$d(\zeta_{n_k}, \sigma) \geqslant \varepsilon' \tag{3.8}$$

et donc par (2) de la proposition 1.1

$$|U_\sigma(\zeta_{n_k})| \geqslant \gamma'. \tag{3.9}$$

Considérons alors $\sigma_k = \sigma \setminus B(z_{n,k}, \varepsilon)$ et U_k le produit ayant pour zéros les points de σ_k, il vient

$$|U_k(\zeta_{n_k})| \geqslant |U_\sigma(\zeta_{n,k})| \geqslant \gamma' \tag{3.10}$$

et si l'on écrit σ comme une union finie de suites séparées par 2ε: $\sigma = \bigcup_{i=1}^{M} s_i$ où $i = 1, 2, \ldots, M$, $d(z, z') \geqslant 2\varepsilon$ pour $z, z' \in s_i$, $z \neq z'$ alors (3.10) implique que s_i est d'interpolation.

Références

[1] L. Carleson, *An interpolation problem for bounded analytic functions*, Amer. J. Math. 80 (1958).

[2] — *The Corona theorem*, Proc. 15th Scandinavian Congress, Oslo 1968.

[3] W. Rudin, *Functions theory in polydiscs*, W. A. Benjamin, Inc., New York 1969.

UNIVERSITÉ DE BORDEAUX I
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE

Received January 20, 1981 (1660)

STUDIA MATHEMATICA, T. LXXIV. (1982)

Die atomare Struktur topologischer Boolescher Ringe und s-beschränkter Inhalte

von

HANS WEBER (Konstanz)

Abstract. Starting point of this paper are the following questions concerning a (e.g. group-valued) finitely additive measure μ on a Boolean ring:

(1) When is the range of μ connected?

(2) When is the range of μ compact?

(3) When can μ be uniquely represented as sum of an atomless and an atomic finitely additive measure?

To answer this questions satisfactorily, it is necessary to define atomless and atomic measures in a new way. First we study (locally) s-bounded atomless and atomic in monotone ring topologies and then we deduce from the obtained results theorems about locally s-bounded finitely additive measures which answer questions (1), (2), (3).

0. Einleitung. Ausgangspunkt dieser Arbeit sind die folgenden Fragen:

(1) Wann ist der Wertebereich eines (z.B. gruppenwertigen) Inhalts zusammenhängend?

(2) Wann ist der Wertebereich eines Inhalts kompakt?

(3) Wann läßt sich ein Inhalt μ (in eindeutiger Weise) darstellen als Summe $\mu = \mu_l + \mu_a$ eines atomlosen Inhalts μ_l und eines atomaren Inhalts μ_a?

Für alle drei Fragen ist ein hier neu eingeführter Begriff des atomlosen und atomaren Inhalts von Bedeutung. Wir erläutern das zunächst an der Frage (3).

Das klassische Resultat, daß sich jedes reellwertige Maß auf einem σ-Ring eindeutig als Summe eines atomlosen und eines atomaren Maßes schreiben läßt, wurde von Hoffmann-Jørgensen ([5], Theorem 6) verallgemeinert für absolut stetige Maße mit Werten in einem lokalkonvexen Vektorraum und von Musiał ([12], Theorem 1) für gruppenwertige Maße, die die "countable chain condition" (kurz: ccc) erfüllen. Hoffmann-Jørgensen zeigt durch Beispiele ([5], Example 2 und 3), daß eine naheliegende Verallgemeinerung dieser Aussage für beliebige Maße mit Werten in lokalkonvexen Räumen i.allg. nicht richtig ist. Andererseits ist — wie