dividing m. Hence the above equals

$$\Big(\prod_{p}|\eta(p)|^2\Big)\Big(\sum_{\substack{m=1\\ q(m)=P}}^{\infty}\varphi(m)\prod_{p^k\|m}\Big|\frac{\eta_k(f;p)}{\eta(p)}\Big|^2\Big)\Big(\sum_{\substack{n=1\\ (n,P)=1}}^{\infty}\prod_{p^k\|n}\Big|\frac{\eta_k(f;p)}{\eta(p)}\Big|^2\Big)$$

$$=\Big(\prod_{p}|\eta(p)|^2\Big)\Big(\prod_{p\in\mathscr{P}}\sum_{k=1}^{\infty}\varphi(p^k)\Big|\frac{\eta_k(f;p)}{\eta(p)}\Big|^2\Big)\Big(\prod_{p\notin\mathscr{P}}\sum_{k=0}^{\infty}\varphi(p^k)\Big|\frac{\eta_k(f;p)}{\eta(p)}\Big|^2\Big)$$

$$=\prod_{p}\sum_{k=0}^{\infty}\varphi(p^k)|\eta_k(f;p)|^2$$

$$=\prod_{p}\Big(1+\sum_{j=1}^{\infty}p^{-j}\big(|f(p^j)|^2-|f(p^{j-1})|^2\big)\Big)$$

$$=\prod_{p}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\Big(1+\sum_{j=1}^{\infty}p^{-j}|f(p^j)|^2\Big) = M(|f|^2)$$

by Lemma 1.

References

[1] H. Daboussi and H. Delange, *On a theorem of P.D.T.A. Elliott on multiplicative functions*, J. London Math. Soc. (2), 14 (1976), pp. 345–356.

[2] H. Delange, *Quelques résultats sur les fonctions multiplicatives*, C.R. Acad. Sc. Paris, Ser. A, 281 (1975), pp. 997–1000.

[3] P. D. T. A. Elliott, *A mean-value theorem for multiplicative functions*, Proc. London Math. Soc. (3), 31 (1975), pp. 418–438.

[4] K.-H. Indlekofer, *A mean-value theorem for multiplicative functions*, Math. Z. 172 (1980), pp. 255–271.

[5] L. Lucht and F. Tuttas, *Mean-values of multiplicative functions and natural boundaries of power series with multiplicative coefficients*, J. London Math. Soc. (2), 19 (1979), pp. 25–34.

[6] F. Tuttas, *Über die Entwicklung multiplikativer Funktionen nach Ramanujan-Summen*, Acta. Arith. 36 (1980), pp. 257–270.

Received on 28. 11. 1980
and in revised form on 2. 10. 1981 (1236)

ACTA ARITHMETICA
XLII (1983)

Sur les fonctions arithmétiques multiplicatives de module $\leqslant 1$

par

HUBERT DELANGE (Orsay)

1. Introduction. f étant une fonction arithmétique multiplicative complexe telle que $|f(n)|\leqslant 1$ pour tout $n\in \boldsymbol{N}^*$, G. Halász a étudié le comportement pour x tendant vers $+\infty$ de la somme $\sum_{n\leqslant x} f(n)$(1). En modifiant légèrement sa formulation, on peut énoncer son résultat principal de la façon suivante.

L'une des deux circonstances suivantes a lieu:

(a) $(1/x)\sum_{n\leqslant x} f(n)$ *tend vers zéro quand x tend vers $+\infty$, autrement dit la fonction f possède une valeur moyenne nulle;*

(b) *Il existe une constante complexe non nulle C, une constante réelle a et une fonction réelle A définie sur l'intervalle $[1,+\infty[$ et satisfaisant à*

$$\lim_{x\to\infty}\{\sup_{x<t\leqslant x^2}|A(t)-A(x)|\} = 0,$$

telles que, quand x tend vers $+\infty$,

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x} f(n) = Cx^{ia}\exp\big(iA(x)\big)+o(1).$$

On voit immédiatement que, dans le cas (b), $|C|$ et a sont bien déterminés par le fait que, si $F(x)=\sum_{n\leqslant x} f(n)$, on a $\lim_{x\to\infty}|(1/x)F(x)| = |C|$ et, pour tout $\lambda>0$, $\lim_{x\to\infty}\frac{F(\lambda x)}{\lambda F(x)} = \lambda^{ia}$. Par contre, la fonction A et la constante C elle-même ne sont pas déterminées: on peut remplacer A par une fonction A_1 quelconque telle que $A_1(x)-A(x)$ tende vers une limite finie θ quand x tend vers $+\infty$, en remplaçant en même temps C par $C_1 = Ce^{-i\theta}$.

---

(1) *Über die Mittelwerte multiplikativer zahlentheoretischer Funktionen*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 19 (1968), p. 365–403.

Mais, quand A est fixée, C est déterminée (égale à

$$\lim_{x\to\infty} F(x)x^{-ia-1}\exp\big(-iA(x)\big).$$

Halász détermine effectivement une valeur de C et une fonction A qui conviennent.

Nous montrerons ici que l'on a un résultat semblable à celui de Halász si on considère, au lieu de $\sum_{n\leqslant x} f(n)$, la somme

$$F(x;k,l) = \sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\equiv l \,(\mathrm{mod}\, k)}} f(n)$$

où k et l sont deux entiers donnés, $k\geqslant 1$.

On verra que, la fonction f étant fixée, s'il existe des couples $[k,l]$ pour lesquels le cas correspondant à (b) a lieu, la constante a est la même pour tous ces couples et il existe une fonction A valable pour tous.

Nous donnerons aussi des résultats concernant l'existence d'une valeur moyenne de f ou de ses puissances sur une progression arithmétique donnée.

Tous les résultats de cet article ont été énoncés sans démonstration en 1972 dans une note aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (2).

Il est entendu une fois pour toutes que, tout au long de l'article, la lettre p désignera toujours un nombre premier, tandis que les lettres m et n désigneront toujours des entiers >0.

Dans une série ou un produit infini dont le terme général s'exprime à l'aide de p, les nombres premiers seront supposés rangés par ordre croissant.

Une somme vide sera considérée comme égale à zéro, et un produit vide comme égal à 1.

2. Preliminaires.

2.1. Commençons par donner cinq lemmes utiles pour la suite.

2.1.1. Lemme 1. *Soient $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ et $v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$ deux suites de nombres réels ou complexes telles que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^2 < +\infty \quad \textit{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |u_n - v_n| < +\infty.$$

Alors le produit infini

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1+u_n)e^{-v_n}$$

est absolument convergent.

(2) 275 (1972), p. 781–784.

Démonstration. Il existe $U>0$ tel que $|u_n|\leqslant U$ et $|u_n-v_n|\leqslant U$ pour tout $n\in N^*$. Comme $\big((1+u)e^{-u}-1\big)/u^2$ et $(e^u-1)/u$ sont des fonctions entières de u (si on les prend égales respectivement à $-1/2$ et à 1 pour $u=0$), il existe $M>0$ tel que

$$|(1+u)e^{-u}-1|\leqslant M|u|^2 \quad \text{et} \quad |e^u-1|\leqslant M|u| \quad \text{pour } |u|\leqslant U.$$

Si on pose $(1+u_n)e^{-v_n} = 1+w_n$, on a pour tout $n\in N^*$

$$w_n = \big((1+u_n)e^{-u_n}-1\big)e^{u_n-v_n} + e^{u_n-v_n}-1$$

et, comme $|u_n|\leqslant U$ et $|u_n-v_n|\leqslant U$,

$$|w_n|\leqslant M|u_n|^2 e^{|u_n-v_n|} + M|u_n-v_n| \leqslant Me^U|u_n|^2 + M|u_n-v_n|.$$

Donc $\sum_{n=1}^{\infty}|w_n| < +\infty$.

2.1.2. Lemme 2. *Soient $z_1, z_2, \ldots, z_q$ des nombres complexes de module $\leqslant 1$ $(q\geqslant 2)$. On a*

$$\sqrt{1-\mathrm{Re}(z_1z_2\ldots z_q)} \leqslant \sum_{j=1}^{q}\sqrt{1-\mathrm{Re}\,z_j}, \tag{1}$$

$$1-\mathrm{Re}(z_1z_2\ldots z_q) \leqslant q\sum_{j=1}^{q}(1-\mathrm{Re}\,z_j), \tag{2}$$

et

$$|\mathrm{Im}(z_1+z_2+\ldots+z_q - z_1z_2\ldots z_q)| \leqslant (q-1)\sum_{j=1}^{q}(1-\mathrm{Re}\,z_j). \tag{3}$$

Démonstration. L'inégalité (2) résulte immédiatement de (1) par application de l'inégalité de Cauchy–Schwarz.

Pour établir (1) il suffit de considérer le cas où $q=2$, le cas général s'en déduisant par récurrence sur q.

Posons $z_1 = x_1+iy_1$, $z_2 = x_2+iy_2$, avec x_1, y_1, x_2, y_2 réels.

On a

$$\begin{aligned} 1-\mathrm{Re}(z_1z_2) &= 1-x_1x_2+y_1y_2 \\ &= (1-x_1)+(1-x_2)-(1-x_1)(1-x_2)+y_1y_2 \\ &\leqslant (1-x_1)+(1-x_2)+|y_1y_2| \end{aligned}$$

puisque $x_1\leqslant 1$ et $x_2\leqslant 1$.

Mais $y_1^2\leqslant 1-x_1^2 = (1-x_1)(1+x_1)\leqslant 2(1-x_1)$ et, de même, $y_2^2\leqslant 2(1-x_2)$. Donc $|y_1y_2|\leqslant 2\sqrt{1-x_1}\sqrt{1-x_2}$.

On obtient ainsi

$$1-\mathrm{Re}(z_1z_2)\leqslant (1-x_1)+(1-x_2)+2\sqrt{1-x_1}\sqrt{1-x_2} = (\sqrt{1-x_1}+\sqrt{1-x_2})^2.$$

L'inégalité (3) résulte de

$$(4)\qquad |\mathrm{Im}(z_1+z_2+\ldots+z_q-z_1z_2\ldots z_q)| \leqslant 2\sum_{1\leqslant j<k\leqslant q}\sqrt{1-\mathrm{Re}\,z_j}\sqrt{1-\mathrm{Re}\,z_k}$$

en remarquant que

$$2\sqrt{1-\mathrm{Re}\,z_j}\sqrt{1-\mathrm{Re}\,z_k} \leqslant (1-\mathrm{Re}\,z_j)+(1-\mathrm{Re}\,z_k).$$

On voit immédiatement que, pour établir (4), il suffit de l'établir pour $q=2$; le cas général s'en déduira par récurrence sur q en remarquant que

$$\begin{aligned}|\mathrm{Im}(z_1+z_2+\ldots+z_{q+1}-z_1z_2\ldots z_{q+1})| &\leqslant |\mathrm{Im}(z_1+z_2+\ldots+z_q-z_1z_2\ldots z_q)|+\\ &\quad+\big|\mathrm{Im}\big((z_1z_2\ldots z_q)+z_{q+1}-(z_1z_2\ldots z_q)z_{q+1}\big)\big|\end{aligned}$$

et tenant compte de (1).

Pour $q=2$, on a, avec les mêmes notations que plus haut,

$$\mathrm{Im}(z_1+z_2-z_1z_2) = y_1(1-x_2)+(1-x_1)y_2,$$

d'où, en utilisant l'inégalité de Cauchy–Schwarz,

$$\begin{aligned}|\mathrm{Im}(z_1+z_2-z_1z_2)|^2 &\leqslant \big(y_1^2+(1-x_1)^2\big)\big((1-x_2)^2+y_2^2\big)\\ &= (1+x_1^2+y_1^2-2x_1)(1+x_2^2+y_2^2-2x_2) \leqslant 4(1-x_1)(1-x_2).\end{aligned}$$

COROLLAIRE. *Si z est un nombre complexe de module $\leqslant 1$ on a pour tout $q\in \boldsymbol{N}^*$*

$$1-\mathrm{Re}(z^q)\leqslant q^2(1-\mathrm{Re}\,z) \quad \textit{et} \quad |\mathrm{Im}(qz-z^q)|\leqslant q(q-1)(1-\mathrm{Re}\,z).$$

2.1.3. LEMME 3[3]. *Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes de module $\leqslant 1$. On a*

$$1-\mathrm{Re}(z_1z_2)\geqslant \tfrac{1}{2}(1-\mathrm{Re}\,z_1)-(1-\mathrm{Re}\,z_2),$$

ou

$$1-\mathrm{Re}\,z_1\leqslant 2\big(1-\mathrm{Re}(z_1z_2)\big)+2(1-\mathrm{Re}\,z_2).$$

Démonstration. L'expression de $1-\mathrm{Re}(z_1z_2)$ que nous avons utilisée plus haut montre que l'on a

$$1-\mathrm{Re}(z_1z_2)\geqslant (1-x_1)+(1-x_2)-\big((1-x_1)(1-x_2)+|y_1y_2|\big).$$

Mais, a étant un nombre >0 quelconque, on a

$$(1-x_1)(1-x_2) = a(1-x_1)\cdot\frac{1}{a}(1-x_2)\leqslant \frac{1}{2}\left(a^2(1-x_1)^2+\frac{1}{a^2}(1-x_2)^2\right)$$

et

$$|y_1y_2| = a|y_1|\cdot\frac{1}{a}|y_2|\leqslant\frac{1}{2}\left(a^2y_1^2+\frac{1}{a^2}y_2^2\right).$$

En tenant compte de ce que $(1-x_1)^2+y_1^2\leqslant 2(1-x_1)$ et $(1-x_2)^2+y_2^2\leqslant 2(1-x_2)$, ceci donne par addition

$$(1-x_1)(1-x_2)+|y_1y_2|\leqslant a^2(1-x_1)+\frac{1}{a^2}(1-x_2).$$

En prenant $a=1/\sqrt{2}$, on obtient

$$(1-x_1)(1-x_2)+|y_1y_2|\leqslant \tfrac{1}{2}(1-x_1)+2(1-x_2),$$

d'où le résultat voulu.

2.1.4. LEMME 4. *Soit $u_1, u_2, \ldots, u_\nu, \ldots$ une suite de nombres complexes de module $\leqslant 1$, et $a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots$ une suite de nombres réels $\geqslant 0$.*

Si l'on a

$$(5)\qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu(1-\mathrm{Re}\,u_\nu)<+\infty,$$

pour tout $q\in\boldsymbol{N}^*$ la série

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu\big((1-u_\nu^q)-q(1-u_\nu)\big)$$

est convergente.

Ceci entraîne immédiatement les résultats suivants:

1. *Si la série $\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu(1-u_\nu)$ est convergente, pour tout $q\in\boldsymbol{N}^*$ la série $\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu(1-u_\nu^q)$ est convergente;*

2. *Si, pour un $q\in\boldsymbol{N}^*$, la série $\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu(1-u_\nu^q)$ est convergente, et si on a (5), la série $\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu(1-u_\nu)$ est convergente.*

Démonstration. Soit q fixé $\in\boldsymbol{N}^*$. D'après le corollaire du lemme 2 on a pour chaque ν

$$\mathrm{Re}(1-u_\nu^q)\leqslant q^2(1-\mathrm{Re}\,u_\nu)$$

et

$$\big|\mathrm{Im}\big((1-u_\nu^q)-q(1-u_\nu)\big)\big|\leqslant q(q-1)(1-\mathrm{Re}\,u_\nu).$$

(3) Ce lemme est dû à W. Schwarz (Cf. § 3 de *A remark on multiplicative functions*, Bull. London Math. Soc. 4 (1972), p. 136–140).

Avec (5), la première de ces inégalités montre d'abord que $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \operatorname{Re}(1-u_\nu^q) < +\infty$, puisque la série

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \operatorname{Re}\big((1-u_\nu^q)-q(1-u_\nu)\big)$$

est convergente.

La seconde montre que, quels que soient m' et $m'' \in \boldsymbol{N}^*$, avec $m' \leqslant m''$,

$$\Big|\sum_{\nu=m'}^{m''} a_\nu \operatorname{Im}\big((1-u_\nu^q)-q(1-u_\nu)\big)\Big| \leqslant q(q-1)\sum_{\nu=m'}^{m''} a_\nu(1-\operatorname{Re} u_\nu),$$

et il en résulte que la série

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \operatorname{Im}\big((1-u_\nu^q)-q(1-u_\nu)\big)$$

est convergente.

2.1.5. LEMME 5. *Soit g une fonction complexe définie sur l'ensemble des nombres premiers et satisfaisant à*

$$|g(p)| \leqslant 1 \quad \textit{pour tout } p.$$

Soit

$$A(x) = \sum_{p\leqslant x} \frac{1}{p} \operatorname{Im} g(p) \qquad (= 0 \textit{ pour } x < 2).$$

Si l'on a $\sum \frac{1}{p}\big(1-\operatorname{Re} g(p)\big) < +\infty$, *on a*

$$\lim_{x\to\infty}\Big(\sup_{x<t\leqslant x^2} |A(t)-A(x)|\Big) = 0.$$

Démonstration. Si $x > 1$, on a pour $x < t \leqslant x^2$

$$|A(t)-A(x)|^2 = \Big|\sum_{x<p\leqslant t}\frac{1}{p}\operatorname{Im} g(p)\Big|^2 \leqslant \Big(\sum_{x<p\leqslant x^2}\frac{1}{p}|\operatorname{Im} g(p)|\Big)^2$$
$$\leqslant \Big(\sum_{x<p\leqslant x^2}\frac{1}{p}\Big)\Big(\sum_{x<p\leqslant x^2}\frac{1}{p}\big(\operatorname{Im} g(p)\big)^2\Big)$$

d'après l'inégalité de Cauchy–Schwarz.

Le premier facteur de la dernière expression tend vers $\log 2$ quand x tend vers $+\infty$. Le second tend vers zéro car on a pour chaque p

$$\big(\operatorname{Im} g(p)\big)^2 \leqslant 1-\big(\operatorname{Re} g(p)\big)^2 = \big(1+\operatorname{Re} g(p)\big)\big(1-\operatorname{Re} g(p)\big) \leqslant 2\big(1-\operatorname{Re} g(p)\big)$$

et par suite on a $\sum (1/p)\big(\operatorname{Im} g(p)\big)^2 < +\infty$.

2.2. Nous allons maintenant donner un théorème qui fournira une formulation plus précise du résultat de Halász cité dans l'introduction, étendu à une hypothèse un peu plus large sur la fonction multiplicative considérée. Il s'agit du théorème suivant:

THÉORÈME A. *Soit g une fonction multiplicative complexe.*

On suppose qu'il existe un ensemble E de nombres premiers, fini ou vide, tel que

$$|g(p^r)| \leqslant 1 \quad \textit{pour tout } r \in \boldsymbol{N}^* \textit{ si } p \notin E,$$

et

$$\sum_{\substack{p\in E\\ r\in \boldsymbol{N}^*}} \frac{|g(p^r)|}{p^r} < +\infty. \tag{6}$$

1. *Si l'on a* $\sum_{p\notin E} (1/p)\big(1-\operatorname{Re}\big(g(p)p^{-iu}\big)\big) = +\infty$ *pour tout u réel,* $(1/x)\sum_{n\leqslant x} g(n)$ *tend vers zéro quand x tend vers $+\infty$;*

2. *S'il existe un a réel tel que*

$$\sum_{p\notin E} \frac{1}{p}\big(1-\operatorname{Re}\big(g(p)p^{-ia}\big)\big) < +\infty \tag{7}$$

(on sait qu'il ne peut en exister qu'un au plus), pour tout $\lambda > 0$ on a quand x tend vers $+\infty$

$$\frac{1}{\lambda x}\sum_{n\leqslant \lambda x} g(n) = \frac{(\lambda x)^{ia}}{1+ia}\prod_{p\leqslant x}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\Big(1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{g(p^r)}{p^{r(1+ia)}}\Big) + o(1). \tag{8}$$

Pour $\lambda = 1$ ceci peut s'écrire

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x} g(n) = Cx^{ia}\exp\big(iA(x)\big) + o(1), \tag{9}$$

où C est une certaine constante et

$$A(x) = \sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\notin E}} \frac{1}{p}\operatorname{Im}\big(g(p)p^{-ia}\big). \tag{10}$$

La fonction A satisfait à

$$\lim_{x\to\infty}\Big(\sup_{x<t\leqslant x^2}|A(t)-A(x)|\Big) = 0. \tag{11}$$

2.2.1. La première partie de ce théorème résulte directement des raisonnements de Halász, tout comme le fait qu'il existe au plus un a réel tel que l'on ait (7).

La deuxième partie pourrait aussi se déduire de ses résultats, mais nous préférons utiliser le théorème suivant qui est une conséquence immédiate du théorème 2 de notre article *On a class of multiplicative arithmetical functions* (Scripta Math. 26 (1961–63), p. 121–141)(4):

THÉORÈME B. *Soit f une fonction multiplicative complexe satisfaisant à*

$$|f(n)|\leqslant 1 \quad \textit{pour tout } n\in \boldsymbol{N}^*.$$

Si l'on a $\sum(1/p)(1-\operatorname{Re}f(p))<+\infty$, *on a quand* x *tend vers* $+\infty$

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}f(n)=\prod_{p\leqslant x}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\Big(1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{f(p^r)}{p^r}\Big)+o(1).$$

2.2.2. La fonction g satisfaisant à l'hypothèse initiale du théorème A, supposons que l'on ait (7).

Soit g_1 la fonction arithmétique, évidemment multiplicative, définie par

$$g_1(n)=g(n)n^{-ia}.$$

Soient h et k les fonctions multiplicatives déterminées par

$$h(p^r)=\begin{cases}g_1(p^r) & \text{si } p\in E,\\ 0 & \text{si } p\notin E,\end{cases}\quad \text{et}\quad k(p^r)=\begin{cases}0 & \text{si } p\in E,\\ g_1(p^r) & \text{si } p\notin E\end{cases}\qquad (r\in \boldsymbol{N}^*).$$

Il résulte de (6) que l'on a

$$(12)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|h(n)|}{n}<+\infty\quad \text{et}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{h(n)}{n}=\prod_{p\in E}\Big(1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{g_1(p^r)}{p^r}\Big).$$

On vérifie immédiatement que $g_1=h*k$, de sorte que l'on a pour $x\geqslant 1$

$$(13)\qquad \frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}g_1(n)=\sum_{n\leqslant x}\frac{h(n)}{n}K\Big(\frac{x}{n}\Big),\quad \text{où}\quad K(x)=\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}k(n).$$

Le théorème B s'applique à la fonction k et montre que l'on a quand x tend vers $+\infty$

$$(14)\qquad K(x)=\prod_{p\leqslant x}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\Big(1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{k(p^r)}{p^r}\Big)+o(1).$$

(4) Nous avons donné dans notre enseignement oral une démonstration de ce théorème sensiblement plus simple que celle de l'article cité, et qui, contrairement à celle-ci, n'utilise aucun théorème taubérien. Nous nous proposons de la publier ailleurs.

Le lemme 1 montre que le produit infini

$$\prod\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\Big(1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{k(p^r)}{p^r}\Big)\exp\Big(-\frac{i}{p}\operatorname{Im}k(p)\Big)$$

est absolument convergent.

En effet, son terme général peut s'écrire $(1+u_p)e^{-v_p}$, où

$$u_p=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{k(p^r)-k(p^{r-1})}{p^r}\quad \text{et}\quad v_p=\frac{i}{p}\operatorname{Im}k(p).$$

On a $|u_p|\leqslant 2\sum_{r=1}^{\infty}1/p^r=2/(p-1)$ et

$$|u_p-v_p|=\Big|\frac{\operatorname{Re}k(p)-1}{p}+\sum_{r=2}^{\infty}\frac{k(p^r)-k(p^{r-1})}{p^r}\Big|\leqslant\frac{1}{p}\big(1-\operatorname{Re}k(p)\big)+\frac{2}{p(p-1)},$$

de sorte que $\sum|u_p|^2<+\infty$ et $\sum|u_p-v_p|<+\infty$.

Si on désigne par C_1 la valeur de ce produit infini, la relation (14) donne

$$(15)\qquad K(x)=C_1\exp\big(iA(x)\big)+o(1)$$

où A est la fonction définie par (10), car $\sum_{p\leqslant x}(1/p)\operatorname{Im}k(p)=A(x)$.

Le lemme 5 montre que l'on a (11).

(11) entraîne évidemment que, quel que soit $\lambda>0$, on a quand x tend vers $+\infty$

$$(16)\qquad A(\lambda x)-A(x)=o(1),$$

de sorte que, d'après (15), $K(\lambda x)-K(x)=o(1)$.

Compte tenu de ce que l'on a évidemment $|K(x)|\leqslant 1$ pour tout $x\geqslant 1$, la relation (13) montre alors que l'on a quand x tend vers $+\infty$

$$(17)\qquad \frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}g_1(n)=K(x)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h(n)}{n}+o(1).$$

Comme elle peut s'écrire

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}g_1(n)=K(x)\sum_{n\leqslant x}\frac{h(n)}{n}+\sum_{n\leqslant x}\frac{h(n)}{n}\Big(K\Big(\frac{x}{n}\Big)-K(x)\Big),$$

il suffit de voir que

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{h(n)}{n}\Big(K\Big(\frac{x}{n}\Big)-K(x)\Big)=o(1).$$

En fait, quel que soit l'entier $N \geqslant 1$, on a pour $x > N$

$$\left|\sum_{n\leqslant x}\frac{h(n)}{n}\left(K\left(\frac{x}{n}\right)-K(x)\right)\right| \leqslant \left|\sum_{n=1}^{N}\frac{h(n)}{n}\left(K\left(\frac{x}{n}\right)-K(x)\right)\right| + 2\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{|h(n)|}{n},$$

et il en résulte que

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\left|\sum_{n\leqslant x}\frac{h(n)}{n}\left(K\left(\frac{x}{n}\right)-K(x)\right)\right| \leqslant 2\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{|h(n)|}{n}.$$

On obtient le résultat indiqué en faisant tendre N vers $+\infty$.

Compte tenu de (14) et (12) la relation (17) donne

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x} g_1(n) = \prod_{p\leqslant x}\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{g_1(p^r)}{p^r}\right)+o(1). \tag{18}$$

D'autre part, avec (15), elle donne

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x} g_1(n) = C_2\exp\left(iA(x)\right)+o(1), \tag{19}$$

où $C_2 = C_1\sum_{n=1}^{\infty} h(n)/n$.

En posant $G_1(x) = \sum_{n\leqslant x} g_1(n)$, on a pour $x > 1$

$$\sum_{n\leqslant x} g(n) = \sum_{n\leqslant x} g_1(n)n^{ia} = \int_{1/2}^{x} t^{ia}dG_1(t) = x^{ia}G_1(x) - ia\int_{1}^{x} t^{ia-1}G_1(t)\,dt,$$

et, compte tenu de (19), on voit que, quand x tend vers $+\infty$,

$$\sum_{n\leqslant x} g(n) = C_2x^{1+ia}\exp\left(iA(x)\right) - iaC_2\int_1^x t^{ia}\left(\exp\left(iA(t)\right)\right)dt + o(x).$$

Mais

$$\int_1^x t^{ia}\left(\exp\left(iA(t)\right)\right)dt$$
$$= \frac{x^{1+ia}-1}{1+ia}\exp\left(iA(x)\right) - \int_1^x t^{ia}\left(\exp\left(iA(x)\right)-\exp\left(iA(t)\right)\right)dt$$
$$= \frac{x^{1+ia}}{1+ia}\exp\left(iA(x)\right)+o(x).$$

En effet, d'une part,

$$\left|\int_1^{x^{1/2}} t^{ia}\left(\exp\left(iA(x)\right)-\exp\left(iA(t)\right)\right)dt\right| \leqslant 2x^{1/2},$$

d'autre part, pour $x^{1/2}\leqslant t\leqslant x$,

$$\left|\exp\left(iA(x)\right)-\exp\left(iA(t)\right)\right| \leqslant |A(x)-A(t)| \leqslant \sup_{t<u\leqslant t^2}|A(u)-A(t)|.$$

Quel que soit $\varepsilon > 0$, dès que x est assez grand ceci est $\leqslant \varepsilon$, de sorte que

$$\left|\int_{x^{1/2}}^{x} t^{ia}\left(\exp\left(iA(x)\right)-\exp\left(iA(t)\right)\right)dt\right| \leqslant \varepsilon x.$$

On arrive ainsi à

$$\sum_{n\leqslant x} g(n) = \frac{C_2}{1+ia}x^{1+ia}\exp\left(iA(x)\right)+o(x),$$

ou

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x} g(n) = \frac{C_2}{1+ia}x^{ia}\exp\left(iA(x)\right)+o(1), \tag{20}$$

ce qui n'est autre que (9) avec $C = C_2/(1+ia)$.

En remplaçant x par λx dans (20) et tenant compte de (16), on obtient

$$\frac{1}{\lambda x}\sum_{n\leqslant \lambda x} g(n) = \frac{C_2}{1+ia}(\lambda x)^{ia}\exp\left(iA(x)\right)+o(1),$$

et, en combinant ceci avec (19) et (18), on obtient

$$\frac{1}{\lambda x}\sum_{n\leqslant \lambda x} g(n) = \frac{(\lambda x)^{ia}}{1+ia}\prod_{p\leqslant x}\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{g_1(p^r)}{p^r}\right)+o(1),$$

ce qui n'est autre que (8).

Le théorème A est ainsi complètement démontré.

3. Théorème principal. Dans tout ce qui suit, f est une fonction multiplicative complexe satisfaisant à

$$|f(n)|\leqslant 1 \quad \text{pour tout } n\in \boldsymbol{N}^*.$$

3.1. Remarque préliminaire. Il existe au plus un couple (χ, u), où χ est un caractère de Dirichlet primitif[5] et u un nombre réel, pour

[5] Nous admettons parmi les caractères primitifs la fonction égale à 1 pour tout n, le conducteur étant 1. Ainsi, pour tout $k\in \boldsymbol{N}^*$, il y a $\varphi(k)$ caractères modulo k et chacun d'eux, y compris le caractère trivial, est équivalent à un caractère primitif.

lequel on a

$$\sum \frac{1}{p}\left(1-\mathrm{Re}\left(\chi(p)f(p)p^{-iu}\right)\right) < +\infty.$$

En effet, supposons que (χ_1, u_1) et (χ_2, u_2) soient deux tels couples, les conducteurs de χ_1 et χ_2 étant k_1 et k_2 (qui sont donc $\neq 2$).

Si p est un nombre premier ne divisant pas k_1k_2, le corollaire du lemme 2 donne, en prenant $q = \varphi(k_1)\varphi(k_2)$ et respectivement $z = \chi_1(p)f(p)p^{-iu_1}$, et $z = \chi_2(p)f(p)p^{-iu_2}$,

$$1-\mathrm{Re}\left(f(p)^q p^{-iqu_1}\right) \leqslant q^2\left(1-\mathrm{Re}\left(\chi_1(p)f(p)p^{-iu_1}\right)\right)$$

et

$$1-\mathrm{Re}\left(f(p)^q p^{-iqu_2}\right) \leqslant q^2\left(1-\mathrm{Re}\left(\chi_2(p)f(p)p^{-iu_2}\right)\right).$$

Par suite

$$\sum \frac{1}{p}\left(1-\mathrm{Re}\left(f(p)^q p^{-iqu_1}\right)\right) < +\infty \quad \text{et} \quad \sum \frac{1}{p}\left(1-\mathrm{Re}\left(f(p)^q p^{-iqu_2}\right)\right) < +\infty,$$

ce qui entraîne, d'après la théorie de Halász, que $u_1 = u_2$.

Maintenant, toujours pour p ne divisant pas k_1k_2, en prenant dans le lemme 3

$$z_1 = \chi_2(p)\overline{\chi_1(p)} \quad \text{et} \quad z_2 = \chi_1(p)f(p)p^{-iu_1},$$

on obtient

$$1-\mathrm{Re}\left(\chi_2(p)\overline{\chi_1(p)}\right) \leqslant 2\left(1-\mathrm{Re}\left(\chi_2(p)f(p)p^{-iu_1}\right)\right)+2\left(1-\mathrm{Re}\left(\chi_1(p)f(p)p^{-iu_1}\right)\right).$$

Il en résulte que

$$\sum_{p\nmid k_1k_2} \frac{1}{p}\left(1-\mathrm{Re}\left(\chi_2(p)\overline{\chi_1(p)}\right)\right) < +\infty.$$

Si k_1 ou $k_2 \geqslant 3$, de sorte que $\varphi(k_1)\varphi(k_2) \geqslant 2$, ceci entraîne

$$\sum_{\substack{p\nmid k_1k_2 \\ \chi_1(p)\neq\chi_2(p)}} \frac{1}{p} < +\infty,$$

car, si $p\nmid k_1k_2$ et $\chi_1(p) \neq \chi_2(p)$, on a

$$1-\mathrm{Re}\left(\chi_2(p)\overline{\chi_1(p)}\right) \geqslant 1-\cos\frac{2\pi}{\varphi(k_1)\varphi(k_2)}$$

puisque

$$\left(\chi_2(p)\overline{\chi_1(p)}\right)^{\varphi(k_1)\varphi(k_2)} = 1 \quad \text{et} \quad \chi_2(p)\overline{\chi_1(p)} \neq 1.$$

Ceci implique $\chi_1 = \chi_2$.

Si $k_1 = k_2 = 1$, on a aussi $\chi_1 = \chi_2$ (= la fonction égale à 1 pour tout n).

Il est clair que, *s'il n'existe aucun couple* (χ, u) *du type indiqué, on a*

$$\sum \frac{1}{p}\left(1-\mathrm{Re}\left(\chi(p)f(p)p^{-iu}\right)\right) = +\infty$$

pour tout caractère χ *et tout* u *réel, tandis que, s'il en existe un, soit* (χ_0, a), *on a*

$$\sum \frac{1}{p}\left(1-\mathrm{Re}\left(\chi(p)f(p)p^{-iu}\right)\right) < +\infty$$

si, et seulement si, le caractère χ *est équivalent à* χ_0 *et* $u = a$.

3.2. THÉORÈME 1. *Soit* $k \in \mathbf{N}^*$ *et* $l \in \mathbf{Z}$, *et soit* $F(x; k, l) = \sum_{\substack{n\leqslant x \\ n\equiv l \,(\mathrm{mod}\, k)}} f(n)$.

L'une des deux circonstances suivantes a lieu:

(a) $\frac{1}{x}F(x; k, l)$ *tend vers zéro quand* x *tend vers* $+\infty$;

(b) *il existe une constante complexe non nulle* C, *une constante réelle* a, *et une fonction réelle* A *définie sur l'intervalle* $[1, +\infty[$ *et satisfaisant à*

$$\lim_{x\to\infty}\{\sup_{x<t\leqslant x^2} |A(t)-A(x)|\} = 0,$$

telles que, quand x *tend vers* $+\infty$,

$$\frac{1}{x}F(x; k, l) = Cx^{ia}\exp\left(iA(x)\right)+o(1).$$

Dans le cas (b), $|C|$ *et* a *sont déterminés* (*car on a* $\lim_{x\to\infty}\left|\frac{1}{x}F(x; k, l)\right| = |C|$ *et, pour tout* $\lambda > 0$, $\lim_{x\to\infty}\frac{F(\lambda x; k, l)}{\lambda F(x; k, l)} = \lambda^{ia}$).

Par contre, la fonction A *et la constante* C *elle même ne sont pas déterminés: on peut évidemment remplacer* A *par une fonction* A_1 *quelconque telle que* $A_1(x)-A(x)$ *tende vers une limite finie* θ *quand* x *tend vers* $+\infty$, *en remplaçant en même temps* C *par* $C_1 = Ce^{-i\theta}$.

S'il existe des couples $[k, l]$ *pour lesquels* (b) *a lieu, la constante* a *est la même pour tous et il existe une fonction* A *valable pour tous.*

On peut préciser dans quels cas on a (a) *ou* (b).

Si l'on a

$$\sum \frac{1}{p}\left(1-\mathrm{Re}\left(\chi(p)f(p)p^{-iu}\right)\right) = +\infty \tag{21}$$

pour tout caractère χ et tout u réel, c'est le cas (a) *qui a lieu quels que soient* k *et* l.

S'il existe un caractère primitif χ_0 et un nombre réel a tels que

$$\sum \frac{1}{p}\left(1-\operatorname{Re}\left(\chi_0(p)f(p)p^{-ia}\right)\right) < +\infty, \tag{22}$$

le comportement de $F(x; k, l)$ pour x tendant vers $+\infty$ est déterminé comme suit, k_0 étant le conducteur de χ_0.

Posons $(k, l) = d$, $k = dk'$, $l = dl'$, $\delta_1 = \prod_{p|(d,k')} p^{v_p(d)}$ (6), $\delta_2 = \prod_{\substack{p|d\\ p\nmid k'}} p^{v_p(d)}$ (*de sorte que* $d = \delta_1\delta_2$, $(\delta_2, k') = 1$).

Si k' n'est pas multiple de k_0, c'est le cas (a) *qui a lieu.*

Si k' est multiple de k_0, on a quand x tend vers $+\infty$

$$\frac{1}{x}F(x; k, l) = \frac{\overline{\chi_0(\delta_2 l')}f(\delta_1)}{(1+ia)k'\delta_1^{1+ia}}\, x^{ia} \prod_{\substack{p\le x\\ p\nmid k'}}\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{r=v_p(d)}^{\infty}\frac{\chi_0(p^r)f(p^r)}{p^{r(1+ia)}} + o(1), \tag{23}$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{1}{x}F(x;k,l) = C_{k,l}x^{ia}\exp\left(iA(x)\right)+o(1), \tag{24}$$

avec

$$A(x) = \sum_{p\le x}\frac{1}{p}\operatorname{Im}\left(\chi_0(p)f(p)p^{-ia}\right) \tag{25}$$

et

$$C_{k,l} = \frac{\overline{\chi_0(\delta_2 l')}f(\delta_1)}{(1+ia)k'\delta_1^{1+ia}}\exp\left(-i\sum_{\substack{p|k'\\ p\nmid k_0}}\frac{1}{p}\operatorname{Im}\left(\chi_0(p)f(p)p^{-ia}\right)\right)\times \tag{26}$$
$$\times\prod_{p\nmid k'}\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(\sum_{r=v_p(d)}^{\infty}\frac{\chi_0(p^r)f(p^r)}{p^{r(1+ia)}}\right)\exp\left(-\frac{i}{p}\operatorname{Im}\left(\chi_0(p)f(p)p^{-ia}\right)\right)$$

où le produit infini est absolument convergent.

La fonction A satisfait à (11).

On remarque, d'autre part, que $|C_{k,l}|$ ne dépend que de k et d.

On est dans le cas (a) *ou dans le cas* (b) *suivant que $C_{k,l} = 0$ ou $C_{k,l} \neq 0$.*

(6) Pour tout $m \in \boldsymbol{N}^*$, nous désignons par $v_p(m)$ le plus grand $\alpha \in \boldsymbol{N}$ tel que $p^\alpha | m$.

On a $C_{k,l} = 0$ si, et seulement si,

$$f(\delta_1)\prod_{\substack{p|2d\\ p\nmid k'}}\left(\sum_{r=v_p(d)}^{\infty}\frac{\chi_0(p^r)f(p^r)}{p^{r(1+ia)}}\right) = 0.$$

En particulier, $C_{k,l}\neq 0$ si $k = 2k_0$ et $(k, l) = 1$ (car $\delta_1 = d = 1$ et $k' = k$).

Si f est à valeurs réelles, on a $a = 0$ et $A(x) = 0$, de sorte que (24) *se réduit à*

$$(1/x)F(x; k, l) = C_{k,l}+o(1) \quad (C_{k,l}\ \textit{étant évidemment réel}).$$

3.3. Démonstration du théorème 1. Remarquons d'abord que, pour démontrer le théorème 1, il suffit d'établir les deux points suivants:

1. Si l'on a (21) pour tout caractère χ et tout u réel, quels que soient k et l, $(1/x)F(x; k, l)$ tend vers zéro quand x tend vers $+\infty$.

2. Dans le cas où il existe un caractère primitif χ_0 et un nombre réel a tels que l'on ait (22), si k' n'est pas multiple du conducteur k_0 de χ_0, $(1/x)F(x; k, l)$ tend vers zéro quand x tend vers $+\infty$, et, si k' est multiple de k_0, on a (23).

En effet, dans ce dernier cas, le lemme 1 montre que le produit infini

$$\prod_{p\nmid k'}\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(\sum_{r=v_p(d)}^{\infty}\frac{\chi_0(p^r)f(p^r)}{p^{r(1+ia)}}\right)\exp\left(-\frac{i}{p}\operatorname{Im}\left(\chi_0(p)f(p)p^{-ia}\right)\right)$$

est absolument convergent, de sorte que la formule (26) définit bien $C_{k,l}$.

Pour le voir, on remarque que, en posant $g(n) = \chi_0(n)f(n)n^{-ia}$, son terme général s'écrit

$$(1+u_p)e^{-v_p},$$

où

$$u_p = \left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{r=v_p(d)}^{\infty}\frac{g(p^r)}{p^r}-1 \quad \text{et} \quad v_p = \frac{i}{p}\operatorname{Im}g(p).$$

Pour $p > d$, on a

$$u_p = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{g(p^r)-g(p^{r-1})}{p^r}$$

et

$$u_p - v_p = \frac{1}{p}\left(\operatorname{Re}g(p)-1\right)+\sum_{r=2}^{\infty}\frac{g(p^r)-g(p^{r-1})}{p^r},$$

d'où, puisque $|g(n)| \leqslant 1$ pour tout n, $|u_p| \leqslant 2/(p-1)$ et

$$|u_p - v_p| \leqslant \frac{1}{p}\big(1 - \operatorname{Re} g(p)\big) + \frac{2}{p(p-1)}$$
$$= \frac{1}{p}\big(1 - \operatorname{Re}\big(\chi_0(p) f(p) p^{-ia}\big)\big) + \frac{2}{p(p-1)},$$

et il résulte de là que $\sum |u_p|^2 < +\infty$ et $\sum |u_p - v_p| < +\infty$.

On voit alors que la relation (23) donne bien (24) où $C_{k,l}$ est définie par la formule (26) et $A(x)$ par (25).

De plus, le lemme 5 montre que l'on a (11).

Le fait que $C_{k,l} = 0$ si, et seulement si,

$$f(\delta_1) \prod_{\substack{p|2d \\ p\nmid k'}} \left(\sum_{r=v_p(d)}^{\infty} \frac{\chi_0(p^r) f(p^r)}{p^{r(1+ia)}} \right) = 0$$

résulte de ce que, si $p \nmid 2d$,

$$\sum_{r=v_p(d)}^{\infty} \frac{\chi_0(p^r) f(p^r)}{p^{r(1+ia)}} = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\chi_0(p^r) f(p^r)}{p^{r(1+ia)}} \neq 0$$

car

$$\left| \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\chi_0(p^r) f(p^r)}{p^{r(1+ia)}} \right| \leqslant \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{p^r} = \frac{1}{p-1} < 1.$$

D'autre part, si f est à valeurs réelles, en prenant k et l tels que $C_{k,l} \neq 0$, par exemple $k = 2k_0$ et $(k, l) = 1$, on voit que, pour tout $\lambda > 0$,

$$\lambda^{ia} = \lim_{x\to\infty} \frac{F(\lambda x; k, l)}{\lambda F(x; k, l)} \quad \text{est réel},$$

ce qui implique $a = 0$.

Alors (22) se réduit à $\sum \frac{1}{p}\big(1 - \operatorname{Re}\big(\chi_0(p) f(p)\big)\big) < +\infty$ et il en résulte que χ_0 est un caractère réel, de sorte que $A(x) = 0$.

En effet, s'il existait un m tel que $\chi_0(m)$ ne soit pas réel, on aurait $k_0 \geqslant 3$, d'où $\varphi(k_0) \geqslant 2$, et, pour $p \equiv m \pmod{k_0}$,

$$1 - \operatorname{Re}\big(\chi_0(p) f(p)\big) \geqslant 1 - \cos \frac{2\pi}{\varphi(k_0)}.$$

3.3.1. On voit d'abord que la condition $n \equiv l \pmod{k}$ est équivalente à

$$n = dn' \quad \text{avec} \quad n' \equiv l' \pmod{k'},$$

et par suite

$$F(x; k, l) = \sum_{\substack{n' \leqslant x/d \\ n' \equiv l' \pmod{k'}}} f(dn').$$

Remarquons que la condition $n' \equiv l' \pmod{k'}$ entraîne $(n', k') = 1$, d'où $(n', \delta_1) = 1$ puisque $\delta_1 | k'$, d'où $(\delta_2 n', \delta_1) = 1$ puisque $(\delta_1, \delta_2) = 1$, et par suite $f(dn') = f(\delta_1 \delta_2 n') = f(\delta_1) f(\delta_2 n')$.

On a donc

$$F(x; k, l) = f(\delta_1) \sum_{\substack{n' \leqslant x/d \\ n' \equiv l' \pmod{k'}}} f(\delta_2 n').$$

A ce point, on voit que, si $f(\delta_1) = 0$, on a bien les conclusions voulues, qu'il existe ou non un couple (χ_0, a) tel que l'on ait (22). En effet, $F(x; k, l) = 0$ et, dans le cas où il existe (χ_0, a) tel que l'on ait (22), le terme principal du second membre de (23) est nul.

Il en est de même s'il existe un nombre premier p divisant δ_2 tel que $f(p^r) = 0$ pour tout $r \geqslant v_p(d)$.

En effet, on a encore $F(x; k, l) = 0$ car, quel que soit n', on a pour le p en question $v_p(\delta_2 n') \geqslant v_p(\delta_2) = v_p(d)$, d'où $f(p^{v_p(\delta_2 n')}) = 0$, et par suite $f(\delta_2 n') = 0$. Par ailleurs, s'il existe un couple (χ_0, a) tel qu'on ait (22), le facteur correspondant au p en question dans le produit au second membre de (23) est nul.

3.3.2. Nous pouvons donc écarter les deux cas que nous venons de considérer et supposer que $f(\delta_1) \neq 0$ et que, ou bien $\delta_2 = 1$, ou bien, pour tout nombre premier p divisant δ_2, il existe au moins un $r \geqslant v_p(d)$ tel que $f(p^r) \neq 0$.

Dans ce dernier cas, nous désignerons par $v_p(d) + \alpha_p$ le plus petit $r \geqslant v_p(d)$ tel que $f(p^r) \neq 0$.

Définissons l'entier δ par

$$\delta = 1 \quad \text{si} \quad \delta_2 = 1, \qquad \delta = \prod_{p|\delta_2} p^{\alpha_p} \quad \text{si} \quad \delta_2 > 1,$$

de sorte que $(\delta, k') = 1$ et $f(\delta_2 \delta) \neq 0$.

On voit que, si $\delta > 1$, pour que $f(\delta_2 n') \neq 0$, il faut que n' soit multiple de δ.

En effet, si n' n'est pas multiple de δ, il existe un nombre premier p divisant δ, donc divisant δ_2 et tel que $\alpha_p \geqslant 1$, tel que $v_p(n') < v_p(\delta) = \alpha_p$. Alors $v_p(\delta_2 n') = v_p(\delta_2) + v_p(n') = v_p(d) + v_p(n') < v_p(d) + \alpha_p$, et par conséquent $f(p^{v_p(\delta_2 n')}) = 0$. Donc $f(\delta_2 n') = 0$.

Il résulte de là que l'on a

$$F(x;k,l)=f(\delta_1)\sum_{\substack{m\leqslant x/\delta d\\ \delta m\equiv l' \pmod{k'}}} f(\delta_2\delta m)$$

$$=f(\delta_1)\sum_{m\leqslant x/\delta d} f(\delta_2\delta m)\left(\frac{1}{\varphi(k')}\sum_{\chi \bmod k'}\overline{\chi(l')}\chi(\delta m)\right),$$

et par suite

$$F(x;k,l)=\frac{1}{\varphi(k')}f(\delta_1)\sum_{\chi \bmod k'}\overline{\chi(l')}\chi(\delta)\left(\sum_{m\leqslant x/\delta d}\chi(m)f(\delta_2\delta m)\right). \tag{27}$$

Introduisons la fonction multiplicative f_1 déterminée par

$$f_1(p^r)=\begin{cases} f(p^r) & \text{si } p\nmid \delta_2,\\ \dfrac{f(p^{v_p(\delta_2\delta)+r})}{f(p^{v_p(\delta_2\delta)})} & \text{si } p\mid\delta_2,\end{cases}\qquad (r\in \boldsymbol{N}^*).$$

On vérifie immédiatement que, pour tout $m\in\boldsymbol{N}^*$,

$$f(\delta_2\delta m)=f(\delta_2\delta)f_1(m).$$

Ainsi, on voit finalement que l'on a

$$\frac{1}{x}F(x;k,l)$$
$$=\frac{1}{\varphi(k')}\cdot\frac{f(\delta_1)f(\delta_2\delta)}{\delta d}\sum_{\chi \bmod k'}\overline{\chi(l')}\chi(\delta)\left(\frac{\delta d}{x}\sum_{m\leqslant x/\delta d}\chi(m)f_1(m)\right). \tag{28}$$

3.3.3. Pour tout caractère χ modulo k', la fonction χf_1 satisfait à l'hypothèse initiale sur g du théorème A, l'ensemble E étant l'ensemble des p qui divisent δ_2.

D'autre part, pour $p>\delta_2$, $\chi(p)f_1(p)=\chi(p)f(p)$.

Si l'on a (21) pour tout caractère χ et tout u réel, il résulte du théorème A que, pour chaque caractère χ modulo k',

$(1/X)\sum_{m\leqslant X}\chi(m)f_1(m)$ tend vers zéro quand X tend vers $+\infty$.

La formule (28) montre alors que $(1/x)F(x;k,l)$ tend vers zéro quand x tend vers $+\infty$.

Supposons maintenant qu'il existe un caractère primitif χ_0 et un nombre réel a tels que l'on ait (22), et soit k_0 le conducteur de χ_0.

Si k' n'est pas multiple de k_0, aucun caractère modulo k' n'est équivalent à χ_0, et on voit encore que $(1/x)F(x;k,l)$ tend vers zéro quand x tend vers $+\infty$.

Si k' est multiple de k_0, parmi les caractères modulo k', il y en a exactement un, soit χ_1, qui est équivalent à χ_0.

Pour tout caractère χ modulo k' autre que χ_1, le théorème A montre que $(1/X)\sum_{m\leqslant X}\chi(m)f_1(m)$ tend vers zéro quand X tend vers $+\infty$.

Mais on a

$$\sum\frac{1}{p}\left(1-\mathrm{Re}\left(\chi_1(p)f_1(p)p^{-ia}\right)\right)<+\infty,$$

et le théorème A montre (en prenant $g=\chi_1 f_1$ et $\lambda=1/\delta d$ dans (8)) que, quand x tend vers $+\infty$,

$$\frac{\delta d}{x}\sum_{m\leqslant x/\delta d}\chi_1(m)f_1(m)$$
$$=\frac{x^{ia}}{(1+ia)(\delta d)^{ia}}\prod_{p\leqslant x}\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\chi_1(p^r)f_1(p^r)}{p^{r(1+ia)}}\right)+o(1).$$

La formule (28) montre donc (compte tenu de ce que $(k',\delta)=(k',l')=1$) que l'on a quand x tend vers $+\infty$

$$\frac{1}{x}F(x;k,l)=\frac{1}{\varphi(k')}\cdot\frac{f(\delta_1)f(\delta_2\delta)}{(1+ia)(\delta d)^{1+ia}}\overline{\chi_0(l')}\chi_0(\delta)x^{ia}\times \tag{29}$$
$$\times\prod_{p\leqslant x}\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\chi_1(p^r)f_1(p^r)}{p^{r(1+ia)}}\right)+o(1).$$

Compte tenu de ce que, pour tout $r\geqslant 1$,

$$\chi_1(p^r)=\begin{cases}0 & \text{si } p\mid k',\\ \chi_0(p^r) & \text{si } p\nmid k',\end{cases}$$

on a pour $x>k'$

$$\prod_{p\leqslant x}\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\chi_1(p^r)f_1(p^r)}{p^{r(1+ia)}}\right)$$
$$=\left(\prod_{p\mid k'}\left(1-\frac{1}{p}\right)\right)\prod_{\substack{p\leqslant x\\ p\nmid k'}}\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\chi_0(p^r)f_1(p^r)}{p^{r(1+ia)}}\right)$$
$$=\frac{\varphi(k')}{k'}\prod_{\substack{p\leqslant x\\ p\nmid k'}}\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\chi_0(p^r)f(p^r)}{p^{r(1+ia)}}.$$

Maintenant, on remarque que les p qui ne divisent pas k' sont ceux qui divisent δ_2 et ceux qui ne divisent pas k (formant deux ensembles disjoints).

Si $p\mid\delta_2$, on a pour chaque $r\geqslant 0$

$$\frac{\chi_0(p^r)f_1(p^r)}{p^{r(1+ia)}}=\frac{1}{f(p^{v_p(\delta_2\delta)})}\cdot\frac{\chi_0(p^r)f(p^{v_p(\delta_2\delta)+r})}{p^{r(1+ia)}}$$
$$=\frac{\overline{\chi_0(p^{v_p(\delta_2\delta)})}\,p^{(1+ia)v_p(\delta_2\delta)}}{f(p^{v_p(\delta_2\delta)})}\cdot\frac{\chi_0(p^{v_p(\delta_2\delta)+r})f(p^{v_p(\delta_2\delta)+r})}{p^{(1+ia)(v_p(\delta_2\delta)+r)}},$$

et il en résulte que

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\chi_0(p^r)f_1(p^r)}{p^{r(1+ia)}}=\frac{\overline{\chi_0(p^{v_p(\delta_2\delta)})}\,p^{(1+ia)v_p(\delta_2\delta)}}{f(p^{v_p(\delta_2\delta)})}\sum_{r=v_p(\delta_2\delta)}^{\infty}\frac{\chi_0(p^r)f(p^r)}{p^{r(1+ia)}}.$$

On peut remplacer $\sum\limits_{r=v_p(\delta_2\delta)}^{\infty}$ par $\sum\limits_{r=v_p(d)}^{\infty}$ car $v_p(\delta_2\delta)=v_p(d)+a_p$ et, si $a_p>0$, $f(p^r)=0$ pour $v_p(d)\leqslant r<v_p(d)+a_p$.

Comme $\delta\mid\delta_2$, on obtient ainsi

$$\prod_{p\mid\delta_2}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\Big(\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\chi_0(p^r)f_1(p^r)}{p^{r(1+ia)}}\Big)$$
$$=\frac{\overline{\chi_0(\delta_2\delta)}(\delta_2\delta)^{1+ia}}{f(\delta_2\delta)}\prod_{p\mid\delta_2}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\sum_{r=v_p(d)}^{\infty}\frac{\chi_0(p^r)f(p^r)}{p^{r(1+ia)}}.$$

Si $p\nmid k$, on a $f_1(p^r)=f(p^r)$ et $v_p(d)=0$, et par suite

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\chi_0(p^r)f_1(p^r)}{p^{r(1+ia)}}=\sum_{r=v_p(d)}^{\infty}\frac{\chi_0(p^r)f(p^r)}{p^{r(1+ia)}}.$$

Finalement, on voit que, pour $x>k$ (donc $>k'$ et $>\delta_2$),

$$\prod_{p\leqslant x}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\Big(1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\chi_1(p^r)f_1(p^r)}{p^{r(1+ia)}}\Big)$$
$$=\frac{\varphi(k')}{k'}\cdot\frac{\overline{\chi_0(\delta_2\delta)}(\delta_2\delta)^{1+ia}}{f(\delta_2\delta)}\prod_{\substack{p\leqslant x\\ p\nmid k'}}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\sum_{r=v_p(d)}^{\infty}\frac{\chi_0(p^r)f(p^r)}{p^{r(1+ia)}}.$$

En reportant ceci dans (29) et tenant compte de ce que $d=\delta_1\delta_2$, on obtient bien (23).

3.3.4. Remarque. Dans le cas où il existe un caractère primitif χ_0 et un nombre réel a tels que l'on ait (22), on a toujours

$$|C_{k,l}|\leqslant\frac{\delta_2}{k\sqrt{1+a^2}}\exp\Big(2-\sum_{p\nmid k}\frac{1}{p}\big(1-\operatorname{Re}(\chi_0(p)f(p)p^{-ia})\big)\Big).$$

En effet, on voit d'abord que

$$|C_{k,l}|=\frac{|f(\delta_1)|}{k'\delta_1\sqrt{1+a^2}}\times$$
$$\times\Big|\prod_{p\nmid k'}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\Big(\sum_{r=v_p(d)}^{\infty}\frac{\chi_0(p^r)f(p^r)}{p^{r(1+ia)}}\Big)\exp\Big(-\frac{i}{p}\operatorname{Im}(\chi_0(p)f(p)p^{-ia})\Big)\Big|.$$

On a

$$\frac{|f(\delta_1)|}{k'\delta_1\sqrt{1+a^2}}\leqslant\frac{1}{k'\delta_1\sqrt{1+a^2}}=\frac{\delta_2}{k\sqrt{1+a^2}}$$

(puisque $k=dk'=\delta_1\delta_2k'$).

D'autre part, comme chacun des facteurs du produit infini est évidemment de module $\leqslant 1$, son module est au plus égal à celui du produit obtenu en enlevant les facteurs correspondant aux p qui divisent $2d$ sans diviser k' (s'il y en a), c'est-à-dire du produit

$$\prod_{p\nmid 2k}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\Big(1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\chi_0(p^r)f(p^r)}{p^{r(1+ia)}}\Big)\exp\Big(-\frac{i}{p}\operatorname{Im}(\chi_0(p)f(p)p^{-ia})\Big).$$

En reprenant les raisonnements des paragraphes 2.2 à 2.3.2 de notre article *Sur les fonctions arithmétiques multiplicatives* (7), où la fonction f sera remplacée par la fonction égale à $\chi_0(n)f(n)n^{-ia}$, on voit que, pour chaque p, on a pour $|z|<1/2$

$$(1-z)\Big(1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\chi_0(p^r)f(p^r)}{p^{ria}}z^r\Big)=\exp\Big(\sum_{r=1}^{\infty}\frac{C_r^{(p)}-1}{r}z^r\Big),$$

où les $C_r^{(p)}$ sont des constantes satisfaisant à

$$|C_r^{(p)}|\leqslant 2^r-1\quad\text{pour tout } r\geqslant 1\quad\text{et}\quad C_1^{(p)}=\chi_0(p)f(p)p^{-ia}.$$

On obtient une expression du terme général du produit considéré ci-dessus en faisant $z=1/p$ dans cette formule et multipliant par

(7) Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (3) 78 (1961), p. 273–304.

$\exp\left(-\frac{i}{p}\,\mathrm{Im}\left(\chi_0(p)f(p)p^{-ia}\right)\right)$. On trouve que ce terme général est égal à

$$\exp\left(\sum_{r=1}^{\infty}\frac{C_r^{(p)}-1}{rp^r}-\frac{i}{p}\,\mathrm{Im}\left(\chi_0(p)f(p)p^{-ia}\right)\right)$$
$$=\exp\left(\sum_{r=2}^{\infty}\frac{C_r^{(p)}-1}{rp^r}-\frac{1-\mathrm{Re}\left(\chi_0(p)f(p)p^{-ia}\right)}{p}\right).$$

On a

$$\left|\sum_{r=2}^{\infty}\frac{C_r^{(p)}-1}{rp^r}\right|\leqslant\sum_{r=2}^{\infty}\frac{2^{r-1}}{p^r}=\frac{2}{p(p-2)},$$

puisque, pour $r\geqslant 2$,

$$\left|\frac{C_r^{(p)}-1}{r}\right|\leqslant 2^{r-1}.$$

La série $\sum_{p\nmid 2k}\left(\sum_{r=2}^{\infty}\frac{C_r^{(p)}-1}{rp^r}\right)$ est donc absolument convergente, et le produit est égal à

$$\exp\left(\sum_{p\nmid 2k}\left(\sum_{r=2}^{\infty}\frac{C_r^{(p)}-1}{rp^r}\right)-\sum_{p\nmid 2k}\frac{1-\mathrm{Re}\left(\chi_0(p)f(p)p^{-ia}\right)}{p}\right).$$

Son module est au plus égal à

$$\exp\left(2-\sum_{p\nmid k}\frac{1-\mathrm{Re}\left(\chi_0(p)f(p)p^{-ia}\right)}{p}\right)$$

puisque

$$\sum_{p\nmid 2k}\frac{2}{p(p-2)}\leqslant\sum_{p>2}\frac{2}{p(p-2)}<1\quad\text{et}\quad\frac{1-\mathrm{Re}\left(\chi_0(2)f(2)2^{-ia}\right)}{2}\leqslant 1.$$

4. Conditions pour l'existence de valeurs moyennes sur les progressions arithmétiques. Si g est une fonction arithmétique et E une partie infinie de $\boldsymbol{N}^*$, on appelle „valeur moyenne de g sur E" la limite pour x tendant vers $+\infty$ de $\left(\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in E}}1\right)^{-1}\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in E}}g(n)$, si cette limite existe et est finie.

Si $E=\boldsymbol{N}^*$, on retrouve la valeur moyenne usuelle.

Étant donné $k\in\boldsymbol{N}^*$ et $l\in\boldsymbol{Z}$, nous désignerons par $P(k,l)$ l'ensemble des $n\in\boldsymbol{N}^*$ tels que $n\equiv l(\mathrm{mod}\,k)$.

Il est clair que g possède une valeur moyenne sur $P(k,l)$ si, et seulement si, $(1/x)\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\equiv l\,(\mathrm{mod}\,k)}}g(n)$ tend vers une limite finie quand x tend vers $+\infty$, et que la valeur moyenne de g sur $P(k,l)$ est k fois cette limite.

Dans toute cette section comme dans la section 3, *f est une fonction multiplicative complexe satisfaisant à*

$$|f(n)|\leqslant 1\quad\textit{pour tout } n\in\boldsymbol{N}^*.$$

Nous conservons les notations de la section 3. En particulier, d, k', l', δ_1 *et* δ_2 *sont définis à partir de k et l comme dans l'énoncé du théorème* 1.

Ce théorème permet d'obtenir des résultats concernant l'existence de valeurs moyennes de f sur les ensembles $P(k,l)$.

4.1. Remarquons d'abord qu'il résulte du théorème 1 que, *si f est à valeurs réelles, elle possède une valeur moyenne sur $P(k,l)$ quels que soient k et l.*

4.2. Les deux théorèmes suivants sont aussi des conséquences immédiates du théorème 1.

THÉORÈME 2. *Etant donné $k\in\boldsymbol{N}^*$ et $l\in\boldsymbol{Z}$, pour que f possède une valeur moyenne nulle sur $P(k,l)$, il faut et il suffit que l'une des conditions suivantes soit satisfaite:*

(i) *On a* $\sum\frac{1}{p}\left(1-\mathrm{Re}\left(\chi(p)f(p)p^{-iu}\right)\right)=+\infty$ *pour tout caractère χ modulo k' et tout u réel.*

(ii) *Il existe un caractère χ_1 modulo k' et un nombre réel a tels que*

$$\sum\frac{1}{p}\left(1-\mathrm{Re}\left(\chi_1(p)f(p)p^{-ia}\right)\right)<+\infty\,(^8)$$

et on a

$$f(\delta_1)\prod_{\substack{p|2d\\ p\nmid k'}}\left(\sum_{r=v_p(d)}^{\infty}\frac{\chi_1(p^r)f(p^r)}{p^{r(1+ia)}}\right)=0.$$

La condition $f(\delta_1)=0$ est suffisante à elle seule.

THÉORÈME 3. *Pour que f ait une valeur moyenne nulle sur $P(k,l)$ quels que soient k et l, il faut et il suffit que l'on ait*

$$\sum\frac{1}{p}\left(1-\mathrm{Re}\left(\chi(p)f(p)p^{-iu}\right)\right)=+\infty$$

pour tout caractère χ et tout u réel.

(8) D'après ce qui a été dit au § 3.1, il ne peut exister plus d'un couple (χ_1,a) tel que ceci ait lieu.

Remarquons que *la condition indiquée est certainement satisfaite s'il existe* $\varrho \neq 1$ (et nécessairement de module $\leqslant 1$) *tel que, quand* x *tend vers* $+\infty$,

$$\sum_{\substack{p\leqslant x \\ f(p)\neq\varrho}} 1/p = o(\log\log x).$$

Cela tient à ce que, si χ est un caractère modulo k, on a pour tout u réel

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p}\big(1-\mathrm{Re}\big(\chi(p)f(p)p^{-iu}\big)\big) \geqslant \sum_{\substack{p\leqslant x \\ p\equiv 1 (\mathrm{mod}\, k)}}\frac{1}{p}\big(1-\mathrm{Re}(\varrho p^{-iu})\big) - \sum_{\substack{p\leqslant x \\ f(p)\neq\varrho}}\frac{1}{p},$$

et, quand x tend vers $+\infty$, le second membre est équivalent à

$$\frac{1-\mathrm{Re}\,\varrho}{\varphi(k)}\log\log x \quad \text{si} \quad u=0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\varphi(k)}\log\log x \quad \text{si} \quad u\neq 0$$

(car, si $u\neq 0$, la série $\sum_{p\equiv 1 (\mathrm{mod}\, k)} 1/p^{1+iu}$ est convergente).

Par exemple, la condition est satisfaite si f est la fonction μ de Möbius ou la fonction λ de Liouville.

4.3. Théorème 4. *S'il existe un caractère primitif* χ_0 *tel que la série*

$$\sum\frac{1}{p}\big(1-\chi_0(p)f(p)\big)$$

soit convergente, f possède une valeur moyenne sur $P(k,l)$ quels que soient k et l (⁹).

Cette valeur moyenne $M(f;k,l)$ est déterminée comme suit, k_0 étant le conducteur de χ_0:

Si k' n'est pas multiple de k_0, $M(f;k,l)=0$.

Si k' est multiple de k_0,

$$M(f;k,l) = \overline{\chi_0(\delta_2 l')}f(\delta_1)\,\delta_2\prod_{p\nmid k'}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\sum_{r=v_p(d)}^{\infty}\frac{\chi_0(p^r)f(p^r)}{p^r}.$$

Lorsque k' est multiple de k_0, on a $M(f;k,l)=0$ si, et seulement si,

$$f(\delta_1)\prod_{\substack{p\mid 2d \\ p\nmid k'}}\Big(\sum_{r=v_p(d)}^{\infty}\frac{\chi_0(p^r)f(p^r)}{p^r}\Big) = 0.$$

Il est à noter qu'en particulier, si $k=2k_0$ et $(k,l)=1$, $M(f;k,l)\neq 0$.

(⁹) En fait, f est limite-périodique B.

Démonstration. L'hypothèse faite entraîne que

$$\sum\frac{1}{p}\big(1-\mathrm{Re}\big(\chi_0(p)f(p)\big)\big) < +\infty,$$

ce qui est le cas particulier de (22) où $a=0$, et que la série

$$\sum\frac{1}{p}\,\mathrm{Im}\big(\chi_0(p)f(p)\big)$$

est convergente.

D'après le théorème 1, si k' n'est pas multiple de k_0, $(1/x)F(x;k,l)$ tend vers zéro quand x tend vers $+\infty$, et donc f possède une valeur moyenne nulle sur $P(k,l)$.

Si k' est multiple de k_0, la relation (23) donne

$$(30)\quad \frac{1}{x}F(x;k,l) = \frac{\overline{\chi_0(\delta_2 l')}f(\delta_1)}{k'\,\delta_1}\prod_{\substack{p\leqslant x \\ p\nmid k'}}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\sum_{r=v_p(d)}^{\infty}\frac{\chi_0(p^r)f(p^r)}{p^r} + o(1).$$

D'autre part, on sait que le produit infini

$$\prod_{p\nmid k'}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\Big(\sum_{r=v_p(d)}^{\infty}\frac{\chi_0(p^r)f(p^r)}{p^r}\Big)\exp\Big(-\frac{i}{p}\,\mathrm{Im}\big(\chi_0(p)f(p)\big)\Big)$$

est absolument convergent.

Comme le produit $\prod_{p\nmid k'}\exp\Big(\frac{i}{p}\,\mathrm{Im}\big(\chi_0(p)f(p)\big)\Big)$ est convergent, le produit

$$\prod_{p\nmid k'}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\sum_{r=v_p(d)}^{\infty}\frac{\chi_0(p^r)f(p^r)}{p^r}$$

est convergent.

La relation (30) montre alors que, quand x tend vers $+\infty$, $(1/x)\times\times F(x;k,l)$ tend vers

$$\frac{\overline{\chi_0(\delta_2 l')}f(\delta_1)}{k'\,\delta_1}\prod_{p\nmid k'}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\sum_{r=v_p(d)}^{\infty}\frac{\chi_0(p^r)f(p^r)}{p^r},$$

et, en tenant compte de ce que $k=k'\delta_1\delta_2$, on voit que f possède bien la valeur moyenne indiquée sur $P(k,l)$.

La condition pour que $M(f;k,l)=0$ est simplement que $C_{k,l}=0$.

4.3.1. Remarque. D'après la remarque du paragraphe 3.3.4, *lorsque k' est multiple de k_0, on a*

$$|M(f;k,l)| \leqslant \delta_2\exp\Big(2-\sum_{p\nmid k}\frac{1-\mathrm{Re}\big(\chi_0(p)f(p)\big)}{p}\Big)$$

(car $|M(f;k,l)| = k|C_{k,l}|$).

4.4. Théorème 5. *k et l étant donnés, pour que f possède une valeur moyenne non nulle sur $P(k,l)$ il est nécessaire qu'il existe un caractère χ modulo k' tel que la série*

$$\sum \frac{1}{p}\big(1-\chi(p)f(p)\big)$$

soit convergente (c'est-à-dire qu'il existe un caractère primitif de conducteur divisant k' satisfaisant à la même condition).

Démonstration. Supposons que f possède une valeur moyenne non nulle sur $P(k,l)$.

On voit d'abord qu'il existe un caractère primitif χ_0 et un nombre réel a tels que l'on ait (22), et que k' est multiple du conducteur k_0 de χ_0. (Dans le cas contraire, f aurait une valeur moyenne nulle sur $P(k,l)$).

On a donc (24), et évidemment $C_{k,l'} \neq 0$ (plus précisément,

$$|C_{k,l}| = \frac{1}{k}\,|M(f;k,l)|).$$

On voit que $a=0$, puisque (24) entraîne que, quel que soit $\lambda > 0$,

$$\lambda^{ia} = \lim_{x\to\infty} \frac{F(\lambda x,k,l)}{\lambda F(x,k,l)} = 1.$$

Ainsi (22) se réduit à

$$\sum \frac{1}{p}\Big(1-\operatorname{Re}\big(\chi_0(p)f(p)\big)\Big) < +\infty \tag{31}$$

et (24) et (25) à

$$\frac{1}{x}F(x;k,l) = C_{k,l}\exp\big(iA(x)\big)+o(1) \tag{32}$$

et

$$A(x) = \sum_{p\leqslant x} \frac{1}{p}\operatorname{Im}\big(\chi_0(p)f(p)\big).$$

(32) entraîne que, quand x tend vers $+\infty$, $\exp\big(iA(x)\big)$ tend vers $M(f;k,l)/kC_{k,l}$.

On déduit facilement de là que $A(x)$ tend vers une limite finie quand x tend vers $+\infty$.

En effet, soit $\varepsilon > 0$ et $< 2\pi - 1/2$.

Il existe $X_0 \geqslant 1$ tel que, si x' et $x'' \geqslant X_0$,

$$\big|\exp\big(iA(x'')\big)-\exp\big(iA(x')\big)\big| \leqslant 2\sin\frac{\varepsilon}{4}.$$

Alors, pour tout $x \geqslant X_0$, on a

$$\big|\exp\big(iA(x)\big)-\exp\big(iA(X_0)\big)\big| \leqslant 2\sin\frac{\varepsilon}{4},$$

c'est-à-dire $\left|\sin\dfrac{A(x)-A(X_0)}{2}\right| \leqslant \sin\dfrac{\varepsilon}{4}$, et par suite $A(x)$ appartient à l'un des intervalles

$$[A(X_0)+2s\pi-\varepsilon/2,\ A(X_0)+2s\pi+\varepsilon/2],\quad \text{où } s\in \mathbf{Z}.$$

On voit que cet intervalle est le même pour tous les $x \geqslant X_0$, c'est-à-dire $[A(X_0)-\varepsilon/2, A(X_0)+\varepsilon/2]$, car c'est le même pour x' et x'' si $X_0 \leqslant x' < x'' \leqslant x'+1$. En effet, on a dans ce cas $|A(x'')-A(x')| \leqslant 1/2$ puisque

$$A(x'')-A(x') = \sum_{x'<p\leqslant x''} \frac{1}{p}\operatorname{Im}\big(\chi_0(p)f(p)\big)$$

et cette somme contient au plus un terme, lequel est de module $\leqslant 1/2$. Si $A(x')$ et $A(x'')$ n'étaient pas dans le même intervalle on aurait $|A(x'')-A(x')| \geqslant 2\pi-\varepsilon > 1/2$.

Il résulte de là que, si x' et $x'' \geqslant X_0$, $|A(x'')-A(x')| \leqslant \varepsilon$.

$A(x)$ tendant vers une limite finie quand x tend vers $+\infty$, la série

$$\sum \frac{1}{p}\operatorname{Im}\big(\chi_0(p)f(p)\big)$$

est convergente.

Avec (31) ceci montre que la série $\sum \dfrac{1}{p}\big(1-\chi_0(p)f(p)\big)$ est convergente.

4.4.1. Remarquons que les théorèmes 4 et 5 fournissent une condition nécessaire et suffisante pour que f possède une valeur moyenne sur $P(k,l)$ quels que soient k et l, *celle-ci n'étant pas toujours nulle.*

4.4.2. Notons aussi que, *si f possède une valeur moyenne non nulle sur $P(k,l)$, on peut conclure non seulement qu'il existe un caractère χ modulo k' tel que la série $\sum \dfrac{1}{p}\big(1-\chi(p)f(p)\big)$ converge, mais que l'on a pour ce caractère*

$$\sum_{p\nmid k} \frac{1-\operatorname{Re}\big(\chi(p)f(p)\big)}{p} \leqslant 2+\log\frac{\delta_2}{|M(f;k,l)|}.$$

Cela résulte de la remarque du paragraphe 4.3.1.

4.5. Théorème 6. *S'il existe un $m_0 \in \mathbf{N}^*$ tel que la série*

$$\sum \frac{1}{p}\big(1-f(p)^{m_0}\big)$$

soit convergente, pour tout $m \in N^*$ la fonction f^m possède une valeur moyenne sur $P(k, l)$ quels que soient k et l.

Démonstration. Soit m fixé $\in N^*$.

On sait que, si l'on a

$$\sum \frac{1}{p}\left(1-\operatorname{Re}\left(\chi(p)f(p)^m p^{-iu}\right)\right) = +\infty$$

pour tout caractère χ et tout u réel, la fonction f^m possède une valeur moyenne nulle sur $P(k, l)$ quels que soient k et l.

Supposons donc qu'il existe un caractère primitif χ_0 et un nombre réel a tels que l'on ait

$$\sum \frac{1}{p}\left(1-\operatorname{Re}\left(\chi_0(p)f(p)^m p^{-ia}\right)\right) < +\infty, \tag{33}$$

et soit k_0 le conducteur de χ_0.

Soit $h = \varphi(k_0)$ et $\mu = m_0 m h$.

Il résulte du corollaire du lemme 2 que l'on a

$$\sum \frac{1}{p}\left(1-\operatorname{Re}\left(\left(\chi_0(p)f(p)^m p^{-ia}\right)^{m_0 h}\right)\right) < +\infty,$$

et par suite, puisque $\chi_0(p)^{m_0 h} = 1$ quand $p \nmid k_0$,

$$\sum \frac{1}{p}\left(1-\operatorname{Re}\left(f(p)^{\mu} p^{-im_0 ha}\right)\right) < +\infty. \tag{34}$$

D'autre part, il résulte du lemme 4 que la série

$$\sum \frac{1}{p}\left(1-f(p)^{\mu}\right)$$

est convergente, de sorte que l'on a

$$\sum \frac{1}{p}\left(1-\operatorname{Re}\left(f(p)^{\mu}\right)\right) < +\infty. \tag{35}$$

Du fait que l'on a (34) et (35) il résulte que $a = 0$.

Ainsi (33) se réduit à

$$\sum \frac{1}{p}\left(1-\operatorname{Re}\left(\chi_0(p)f(p)^m\right)\right) < +\infty.$$

Comme la série

$$\sum \frac{1}{p}\left(1-\left(\chi_0(p)f(p)^m\right)^{m_0 h}\right)$$

est convergente, le lemme 4 montre que la série

$$\sum \frac{1}{p}\left(1-\chi_0(p)f(p)^m\right)$$

converge.

Alors le théorème 4 montre que la fonction f^m possède une valeur moyenne sur $P(k, l)$ quels que soient k et l.

4.6. THÉORÈME 7. *Si, pour un $m_1 \in N^*$ et un couple $[k_1, l_1]$, la fonction f^{m_1} possède une valeur moyenne non nulle sur $P(k_1, l_1)$, pour tout $m \in N^*$ la fonction f^m possède une valeur moyenne sur $P(k, l)$ quels que soient k et l.*

Démonstration. D'après le théorème 5, il existe un caractère χ modulo $k_1' = k_1/(k_1, l_1)$ tel que la série $\sum \frac{1}{p}\left(1-\chi(p)f(p)^{m_1}\right)$ soit convergente.

Alors, d'après le lemme 4, la série

$$\sum \frac{1}{p}\left(1-\left(\chi(p)f(p)^{m_1}\right)^h\right), \quad \text{où } h = \varphi(k_1'),$$

est convergente, et donc aussi la série

$$\sum \frac{1}{p}\left(1-f(p)^{m_1 h}\right).$$

Le théorème 6 donne alors la conclusion annoncée.

4.7. THÉORÈME 8. *k et l étant fixés, s'il existe $h > 0$ multiple de $\varphi(k')$ et $K > 0$ tels que l'on ait*

$$\left|\operatorname{Im}\left(f(p)^h\right)\right| \leqslant K\left(1-\operatorname{Re}\left(f(p)^h\right)\right) \quad \textit{pour tout } p \textit{ premier}, \tag{36}$$

f possède une valeur moyenne sur $P(k, l)$ [10].

4.7.1. En vue de la démonstration de ce théorème, faisons d'abord la remarque suivante:

Soit g une fonction complexe définie sur l'ensemble des nombres premiers et satisfaisant à

$$|g(p)| \leqslant 1 \quad \text{pour tout } p \text{ premier}.$$

S'il existe un a réel $\neq 0$ tel que

$$\sum \frac{1}{p}\left(1-\operatorname{Re}\left(g(p)p^{-ia}\right)\right) < +\infty,$$

[10] En fait, il suffirait de supposer que l'on a (36) pour tous les p qui n'appartiennent pas à un ensemble E tel que $\sum_{p \in E} 1/p < +\infty$.

tout nombre complexe de module 1 est adhérent à la suite des nombres $g(p)$. Plus précisément, quel que soit θ réel et quel que soit $\varepsilon > 0$, on a

$$\sum_{|g(p)-e^{i\theta}|<\varepsilon} 1/p = +\infty.$$ (11)

En effet, comme

$$|g(p)-p^{ia}|^2 = |g(p)p^{-ia}-1|^2 \leqslant 2\big(1-\mathrm{Re}\big(g(p)p^{-ia}\big)\big),$$

on a pour tout $\varepsilon > 0$

$$\sum_{|g(p)-p^{ia}|\geqslant\varepsilon} 1/p < +\infty.$$

Alors, comme $|g(p)-e^{i\theta}| \leqslant |g(p)-p^{ia}|+|p^{ia}-e^{i\theta}|$, on a pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $x \geqslant 2$

$$\sum_{\substack{p\leqslant x\\ |g(p)-e^{i\theta}|<\varepsilon}} \frac{1}{p} \geqslant \sum_{\substack{p\leqslant x\\ |p^{ia}-e^{i\theta}|\leqslant\varepsilon/2}} \frac{1}{p} - \sum_{|g(p)-p^{ia}|\geqslant\varepsilon/2} \frac{1}{p}.$$

Il suffit donc de montrer que, quel que soit $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{|p^{ia}-e^{i\theta}|\leqslant\varepsilon} \frac{1}{p} = +\infty.$$

Comme $|p^{ia}-e^{i\theta}| = |p^{-ia}-e^{-i\theta}|$, on peut raisonner en supposant $a > 0$.

D'autre part, on peut supposer $\varepsilon < 2$, soit $\varepsilon = 2\sin\varphi$, où $0 < \varphi < \pi/2$. On a $|p^{ia}-e^{i\theta}| \leqslant \varepsilon$ pour tout p satisfaisant à

(37) $$2m\pi+\theta-2\varphi < a\log p \leqslant 2m\pi+\theta+2\varphi, \quad \text{avec } m \in \boldsymbol{N}^*.$$

Or, de ce que l'on a quand x tend vers $+\infty$

$$\sum_{p\leqslant x} \frac{1}{p} = \log\log x + b + o\left(\frac{1}{\log x}\right), \quad \text{où } b \text{ est une constante,}$$

on déduit aisément que, quand m tend vers $+\infty$, la somme des inverses des p satisfaisant à (37) est équivalente à $\dfrac{2\varphi}{\pi}\cdot\dfrac{1}{m}$.

4.7.2. Ceci dit, supposons que l'on ait (36) avec h multiple de $\varphi(k')$.

(11) On a même $\varliminf_{x\to\infty} (\log\log x)^{-1} \sum_{\substack{p\leqslant x\\ |g(p)-e^{i\theta}|<\varepsilon}} 1/p > 0.$

On sait que, si l'on a

$$\sum \frac{1}{p}\big(1-\mathrm{Re}\big(\chi(p)f(p)p^{-iu}\big)\big) = +\infty$$

pour tout caractère χ modulo k' et tout u réel, f possède une valeur moyenne nulle sur $P(k, l)$.

Supposons donc qu'il existe un caractère χ_1 modulo k' et un a réel tels que

$$\sum \frac{1}{p}\big(1-\mathrm{Re}\big(\chi_1(p)f(p)p^{-ia}\big)\big) < +\infty.$$

Il résulte du corollaire du lemme 2 que l'on a

$$\sum \frac{1}{p}\Big(1-\mathrm{Re}\Big(\big(\chi_1(p)f(p)p^{-ia}\big)^h\Big)\Big) < +\infty,$$

et par suite

(38) $$\sum \frac{1}{p}\big(1-\mathrm{Re}\big(f(p)^h p^{-iha}\big)\big) < +\infty.$$

Comme $e^{i\theta}$ n'est pas adhérent à la suite des nombres $f(p)^h$ si θ est non nul et assez petit, il résulte de la remarque ci-dessus que l'on a nécessairement $a = 0$.

(38) se réduit donc à $\sum \dfrac{1}{p}\big(1-\mathrm{Re}\big(f(p)^h\big)\big) < +\infty$.

Avec (36) ceci montre que la série $\sum \dfrac{1}{p}\big(1-f(p)^h\big)$ est convergente.

Il résulte alors du théorème 6 que f possède une valeur moyenne sur $P(k, l)$.

Reçu le 27. 2. 1981 (1243)