3.3. LEMMA. *If $B = \{B_{ij}\}$ is an $m\times m$ matrix with rational coefficients such that for each i, $\sum_j B_{ij} = n$, then $\lambda - n$ is a factor of the characteristic polynomial of B.*

The proof is immediate. From this lemma we obtain the following result.

3.4. COROLLARY. *Let X be a compact polyhedron and $f\colon X \to X^n/G$. Then $(\lambda-n)\,|\,P(\mu_{*0} f_{*0})$.*

Proof. Suppose X consists of m path components. Then the matrix representing $\mu_{*0} f_{*0}$ is an $m\times m$ diagonal with n's down the diagonal since on a path connected component $\mu_{*0} f_{*0} = \mu_{*0} = \sum_{i=1}^{n} \pi_{i*} = n$. The second equality follows from expression $(*)$ of section 2. ■

3.5. THEOREM. *Let X be a compact polyhedron and $f\colon X \to X^n/G$. If $H_i(X) = 0$, for i odd, then there is some m, $1 \leqslant m \leqslant \chi$, such that f has a periodic point of period $\leqslant m$. (χ is the Euler characteristic of X.)*

Proof. Since $H_i(X) = 0$ for odd i, $K(f) = \Pi_i P(\mu_{*2i} f_{*2i}) = \lambda^{\chi} + a_1\lambda^{\chi-1} + \ldots + a_{\chi}$. But $(\lambda-n)\,|\,P(\mu_{*0} f_{*0})$ and so $(\lambda-n)\,|\,K(f)$. Hence not all a_i's vanish. So by Theorem 3.2 the desired result follows. ■

3.6. EXAMPLE. Let S^k be the k-sphere with k even. Then any map $f\colon S^k \to (S^k)^n/G$ has a periodic point of period $\leqslant 2$.

We note that Theorem 3.2 and Theorem 3.5 both can be extended to symmetric product mappings of compact ANRs.

References

[1] B. Halpern, *Fixed points for iterates*, Pacific J. Math. 25 (2) (1968), pp. 255–275.

[2] J. L. Kelley and E. Spanier, *Uniqueness of the Euler and Lefschetz functions*, Pacific J. Math. 26 (2) (1968), pp. 317–339.

[3] S. Masih, *Fixed points of symmetric product mappings of polyhedra and metric absolute neighborhood retracts*, Fund. Math. 80 (1973), pp. 149–156.

[4] C. N. Maxwell, *Fixed points of symmetric product mappings*, Proc. Amer. Math. Soc. 8 (1957), pp. 808–815.

[5] N. E. Rallis, *Periodic points and a fixed point index theory for symmetric product mappings*, Ph. D. Dissertation, Indiana University, 1978.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
BOSTON COLLEGE
Chestnut Hill Mass.

Accepté par la Rédaction le 27. 9. 1980

Geordnete Läuchli Kontinuen

by

Norbert Brunner (Baden)

Inhalt. Ein linear geordnetes Kontinuum im geordneten Mostowski Modell ist genau dann ein Dedekind abzählbarer Lusinraum, wenn es stark zusammenhängend ist und die abzählbare Kettenbedingung erfüllt.

1. Einleitung.

1.1. DEFINITION. (X, Z) sei ein *topologischer Raum*: Er ist stark zusammenhängend, wenn jede stetige, reellwertige Funktion konstant ist. Ein stark zusammenhängendes Kontinuum heißt Läuchli Kontinuum.

1.2. BEISPIEL (Existenz). (a) H. Läuchli [5] hat ein Permutationsmodell konstruiert, in dem ein geordnetes AA1-Läuchli Kontinuum existiert (¹).

(b) Ist (X, Z) ein Kontinuum und $P(X)$ D-finit, so ist (X, Z) Läuchli'sch.

(c) $X = [a, b]$ sei ein abgeschlossenes Intervall von Atomen des geordneten Mostowski Modells ([8]) mit der Ordnungstopologie Z bzgl. der natürlichen Ordnung $<$ des Mostowski Modells: Ist $a<b$, so ist $(X, Z, <)$ ein nicht-triviales geordnetes Läuchli Kontinuum.

(d) Im zweiten Fraenkel Modell ([7]) gibt es keine nichttrivialen Läuchli Kontinuen ([1], S. 55), weil das Urysohn'sche Lemma gilt.

1.3. BEISPIEL (Anwendung). (a) Der Satz von Gelfand und Kolmogoroff, daß kompakte T_2-Räume homöomorph sind, wenn die Ringe der stetigen, reellwertigen Funktionen isomorph sind, ist in ZF+BPI nicht beweisbar (gemäß 1.2.c., [3] und [9]).

(b) Der Satz von Nakano und Stone, wonach ein kompakter T_2-Raum (X, Z) genau dann extrem unzusammenhängend ist, wenn jede nicht-leere punktweise beschränkte Teilmenge von $C(X)$ ein Supremum besitzt, ist in ZF+BPI nicht beweisbar.

1.4. BEMERKUNG. (a) *Ist (X_1, Z_1) ein Läuchli Kontinuum, (X_2, Z_2) T_2 und ist $f\colon X_1 \to X_2$ stetig, so ist $f(X_1)$ ein Läuchli Kontinuum.*

(¹) Die Mostowski'sche Konstruktion der Permutationsmodelle wird nach Specker [12] modifiziert, wodurch ZF^0 Modelle entstehen: a ist ein Urelement, wenn $a = \{a\}$ ist.

(b) *Ist $(X_i, Z_i)_{i\in I}$ eine Familie von Läuchli Kontinuen im Mostowski Modell, so ist der Produktraum $\prod_i (X_i, Z_i)$ ein Läuchli Kontinuum.*

(c) *In einem Permutationsmodell ist jeder T_2-Raum mit einer dichten, wohlordenbaren Teilmenge wohlordenbar. Folglich gibt es keine separablen Läuchli Kontinuen.*

Beweis. (b) Wegen [3] genügt zu zeigen: In ZF^0 ist das Produkt stark zusammenhängender Räume stark zusammenhängend (z.B. auch wenn es $\emptyset$ ist).

Ist $x^0 \in X = \prod_{i\in I} X_i$, $x^0 = (x_i^0)_i$, $f\colon \prod_i X_i \to \boldsymbol{R}$ stetig, $i_0 \in I$, $Y_i = \{x_i^0\}$ für $i \neq i_0$ und $Y_{i_0} = X_{i_0}$, so ist $Y = \prod_{i\in I} Y_i \subseteq X$ zu X_{i_0} homöomorph und daher $f|Y$ konstant; mehrmaliges Anwenden dieses Arguments liefert: $f|D$ ist konstant, wobei $D = \{x \in X\colon \{i\colon x_i \neq x_i^0\}$ ist endlich$\}$. Da D dicht ist, ist f konstant.

Somit gibt es im Mostowski Modell zu jeder vorgegebenen Kardinalzahl ein größeres Läuchli Kontinuum.

(c) Sei D eine dichte, wohlordenbare Teilmenge vom T_2-Raum (X, Z). Wie Soundararajan [11] gezeigt hat, ist X in ZF^0 in $\mathrm{PP}(D)$ einbettbar, einer wohlgeordneten Menge. Ist (X, Z) außerdem T_4, so läßt sich der übliche Beweis des Urysohn'schen Lemmas durchführen. Separable Läuchli Kontinuen sind somit Singletons, weil sie wegen Comfort [2] in ZF^0 T_4 sind.

1.5. Notation.

(a) LOC bedeutet: linear geordnetes Kontinuum.

(b) cac ist die abzählbare Antikettenbedingung von Souslin.

(c) (X, Z) ist G_δ-abgeschlossen, wenn jede G_δ-Menge offen ist; vollständig reguläre G_δ abgeschlossene Räume nennt man P-Räume.

(d) (X, Z) ist ein Lusin Raum ([6]), wenn jede nirgends dichte Menge abzählbar ist.

(e) X ist D-abzählbar, wenn die Hartogszahl von X höchstens ω_1 ist.

(f) (X, Z) erfüllt C_w, wenn es für alle $x \in X$ eine wohlordenbare Teilmenge W von Z mit $\{x\} = \bigcap W$ gibt.

(g) (X, Z) ist C'' ([10]), wenn es zu jeder Funktion $G\colon X \times \omega \to Z$, ω die natürlichen Zahlen, $x \in G(x, n)$, eine Diagonalfolge $(x_n)_n$ mit $X = \bigcup_{n\in\omega} G(x_n, n)$ gibt.

(h) AC_{wo} ist das Auswahlaxiom für Familien wohlgeordneter Mengen und AC^ω das Auswahlaxiom für abzählbare Mengensysteme. BPI ist der Tychonoff'sche Produktsatz für kompakte T_2-Räume.

2. Hauptresultat.

2.1. Lemma. *$(X, Z, \leqslant)$ sei ein* LOC *in einem Permutationsmodell. Ist X D-abzählbar, so ist (X, Z) ein Rothberger'scher C''-Raum und daher ein Läuchli-Kontinuum.*

Beweis. Sei $G\colon X \times \omega \to Z$ eine Funktion mit $x \in G(x, n)$ und sei e aus dem Normalideal des Permutationsmodells so gewählt, daß $(X, Z, \leqslant, G) \in \nabla(e)$ ist, der Klasse aller Mengen, die e als einen Träger haben. Sei k die Kardinalzahl von $X \cap \nabla(e)$ in der Wirklichkeit und sei $f\colon k \to X \cap \nabla(e)$ eine Bijektion in der Wirklichkeit — die wegen $f \in \nabla(e)$ im Model ist, woraus wegen der D-Abzählbarkeit $k \leqslant \omega_0$ folgt; mithin gibt es eine Surjektion $g\colon \omega \to X \cap \nabla(e)$ in $\nabla(e)$ und somit ist $O := \bigcup_{n\in\omega} G(g(n), n)$ eine offene Menge in $\nabla(e)$ die $X \cap \nabla(e)$ enthält. Es gilt $O = X$, woraus C'' folgt. Sei nämlich $x \in X$ beliebig; dann ist $[x] := \{\pi x\colon \pi \in \mathrm{fix}(e)\}$ in $\nabla(e)$ und es gibt wegen der Kompaktheit ein Infimum $i \in \nabla(e) \cap X \subseteq O$ von $[x]$. Daher ist $[x] \cap O \neq \emptyset$; i.e.: $\pi x \in O$ für ein $\pi \in \mathrm{fix}(e)$ und daher $x \in \pi^{-1} O = 0$.

Da das stetige, reellwertige Bild eines C''-Raums eine Lebesgue'sche Nullmenge ist ([10], ZFA-Resultat) und (X, Z) zusammenhängend ist, ist (X, Z) stark zusammenhängend.

2.2. Bemerkung. *Jedes D-abzählbare Kontinuum (X, Z) im Mostowski Modell ist Läuchli'sch.*

Beweis. Wegen [8] o.B.d.A. $X \subseteq I \times a$, a Ordinalzahl, $I = \bigcup_{n\in\omega} S_n$,

$$S_n = \{e \subseteq A\colon k(e) = n\},$$

A die Menge der Urelemente und $k(e)$ die Kardinalzahl von e (so sie definiert ist); $E(e) := \{b \in a\colon (e, b) \in X\} \subseteq On$. Da X D-abzählbar ist, ist $E(e)$ für alle $a \in I$ höchstens abzählbar und da $P(S_n)$ D-finit ist, ist $E_n = \{E(e)\colon e \in S_n\}$ endlich und daher $E = \bigcup_{n\in\omega} \bigcup E_n$ eine abzählbare Teilmenge des Kerns, woraus wegen $X \subseteq \bigcup_{(n,e)\in\omega\times E} S_n \times \{e\}$ folgt: $X = \bigcup_{n\in\omega} X_n$ für eine Familie von paarweise disjunkten Mengen X_n mit $P(X_n)$ D-finit.

Sei $f\colon X \to \boldsymbol{R}$ stetig. Da $f(X_n)$ endlich ist, ist $f(X) = \bigcup_n f(X_n)$ höchstens abzählbar. da im Kern das Auswahlaxiom gilt. Weil X zusammenhängend ist, ist $f(X)$ als abzählbares Intervall ein Singleton.

2.3. Beispiel. Seien $a<b$ Urelemente im geordneten Mostowski Modell (vgl. 1.2.c.): $[a, b]^\omega$ ist ein Läuchli Kontinuum, das nicht C'' ist.

Beweis. Wegen 1.2.c und 1.4.b ist non C'' zu zeigen (wir beweisen sogar non C'): $J(x) := [a, b)$ für $x \in [a, b)$, $J(b) := (a, b]$, $I([a, b)) := b$, $I((a, b]) := a$, $G((x_l)_{l\in\omega}, n) := \prod_{K\leqslant n} J(x_k) x \prod_{K>n} [a, b]$; $G \in \nabla(\{a, b\})$, $x \in G(x, n)$, $G(x, n)$ ist offen. Sei $(x^n)_n$ eine Folge in $[a, b]^\omega$; $x^n = (x_l^n)$. $x := (I \circ J(x_n^n))_{n\in\omega} \in [a, b]_\omega$: Da die n-te Komponente von x nicht in der n-ten Projektion von $G(x^n, n)$ liegt, ist $x \notin \bigcup_{n\in\omega} G(x^n, n)$.

2.4. Satz. *Sei $(X, Z, \leqslant)$ ein* LOC *im geordneten Mostowski Modell: (X, Z) ist genau dann ein Läuchli Kontinuum, das cac erfüllt, wenn es ein D-abzählbarer Lusinraum ist.*

Beweis. Im Hinblick auf 2.1 genügt es, nachzuweisen, daß aus cac + Läuchli'sch D-abzählbar + Lusin'sch folgt (da in ZF^0 Lusin'sch $\Rightarrow$ cac für LOCs, da jede offene Menge in Intervalle zerfällt, deren linke Endpunkte abzählbar sind); wegen 1.4.c reicht es aus, die Lusin'sche Eigenschaft herzuleiten.

Sei $A \subseteq X$ abgeschlossen, überabzählbar und nirgends dicht und sei M die Menge der Komponenten von A^c. Für K_1, K_2 in M wird definiert: $K_1 \cong K_2$ genau dann, wenn $c(K_1 \cup K_2) \cap A$ höchstens abzählbar ist, wobei $c(L)$ die konvexe Hülle von L ist (die ein Intervall ist): $\cong$ ist eine Äquivalenzrelation. Wir setzen für $H \in M$ $[H] := \bigcup_{K \cong H} K$ und $N := \{[H]: H \in M\}$.

Sei $H = [K_0] \in N$: $c(H) \cap A$ ist abzählbar. Denn wegen cac ist M abzählbar. Sei $k: \omega \to \{K: K \cong K_0\}$ eine Surjektion. Mit $C_n := c(\bigcup_{i \leqslant n} k(i))$ gilt: $c(H) = \bigcup_{n \in \omega} C_n$ und $C_n \cap A$ ist abzählbar. Aus AC_{w0} folgt, daß $c(H) \cap A$ abzählbar ist; AC_{w0} folgt aus dem Ordnungstheorem [8] zusammen mit [4]. Da A nirgends dicht ist, folgt daraus: N enthält mindestens zwei Elemente.

Seien $H_i = [K_i]$, $i = 1, 2$, verschieden: Dann ist $c(H_1) \cap c(H_2) = \emptyset$, da sonst wegen $c(K_1 \cup K_2) \subseteq c(H_1) \cup c(H_2)$ $H_1 = H_2$ folgt. Daher induziert $\leqslant$ auf ein N eine lineare Ordnung $<$. $<$ ist dicht: Denn seien $H_i = [K_i] \in N$, $i = 1, 2$, $H_1 < H_2$, $c(H_i)^- = [a_i, b_i]$. Wenn $c(H_1 \cup H_2) \cap A$ abzählbar ist, wäre $K_1 \cong K_2$. Da $c(H_i) \cap A$ abzählbar ist, folgt: $(b_1, a_2) \cap A$ ist überabzählbar ergoque nicht leer. Da A nirgends dicht ist, gibt es $K \in M$ mit $K \subseteq (b_1, a_2)$, mithin $H_1 < [K] < H_2$.

Aus cac ergibt sich die Existenz einer Bijektion $g: \omega \to N$, wodurch auf ω eine dichte Ordnung induziert wird, weswegen gemäß einem Satz von Cantor (ω ist im Kern) folgt: Es gibt eine monoton steigende Surjektion $F: N \to [0, 1] \cap Q$; $h: A^c \to [0, 1]$ wird definiert durch: $h(x) = F(H)$, $x \in H$. Setzt man h fort zu $f: X \to [0, 1]$, $f(x) = 0$ für $x < \inf A^c$ und $f(x) = \sup\{h(y): x \geqslant y \in A^c\}$ sonst, $f|A^c = h$, erhält man eine monoton steigende Abbildung, deren Bild dicht in $[0, 1]$ ist und die daher stetig ist: (X, Z) ist folglich nicht stark zusammenhängend.

2.5. Beispiel.

(a) $[a, b]$ wie in 1.2.c erfüllt cac.

(b) $[a, b] \cdot [a, b]$, $a < b$, mit der lexikographischen Ordnung ist ein D-finiter, linear geordneter Läuchli Raum, der cac nicht erfüllt.

2.6. Bemerkung.

(a) *Jedes G_δ-abgeschlossene Kontinuum ist Läuchli'sch* (vgl. 1.2.b).

(b) $(X, Z, \leqslant)$ *sei ein* LOC: (X, Z) *ist genau dann G_δ-abgeschlossen, wenn X D-finit ist.*

Beweis. (a) Jedes $f \in C(X)$ ist überall lokalkonstant.

(b) Sei $(O_n)_{n \in \omega}$ eine Folge offener Mengen, $G = \bigcap_{n \in \omega} O_n$, $O_{n+1} \subseteq O_n$ und $x \in G$: $a_n := \inf\{a: [a, x] \subseteq O_n\}$, $b_n := \sup\{b: [x, b] \subseteq O_n\}$. Dann ist

$$U_n = [a_n, b_n]^0 \setminus (\{a_n, b_n\} \setminus \{x\}) \subseteq O_n$$

eine offene Umgebung von x. Weil $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ monoton sind und X D-finit ist, gibt es $N \in \omega$, ab dem $(a_n)_{n \geqslant N}$ und $(b_n)_{n \geqslant N}$ konstant sind. Daher $x \in \bigcap_{n \leqq N} U_n \subseteq G$, G ist offen.

Ist X nicht D-finit, so gibt es eine injektive Folge in X, aus der eine monotone Teilfolge ausgewählt werden kann. Für diese Folge $(x_n)_n$ ist $[\sup_n x_n, \sup X]$ (bzw. $[\inf X, \inf_n x_n]$) eine abgeschlossene G_δ-Menge, die wegen des Zusammenhanges von X nicht offen sein kann.

2.7. Beispiel. In ZF+BPI ist der Satz von Dalen, daß ein LOC perfekt normal ist (i.e.: jede abgeschlossene Menge ist ein G_δ), wenn er cac erfüllt, nicht beweisbar (1.2.c und 2.6).

3. Anwendung.

3.1. Definition. Sei $P(A, G, I)$ ein *Permutationsmodell*, das durch eine abzählbare Menge A von Urelementen, die dicht, linear und frei von Endpunkten geordnet sind, durch die Menge G aller monoton steigenden Bijektionen auf A, durch ein Normalideal $I \subseteq P(A)$ gegeben ist: P ist ein *Läuchli Modell*, wenn jedes abgeschlossene Intervall in A ein Läuchli Raum in P ist.

3.2. Beispiel. (a) Das Läuchli'sche Modell und das Mostowski Modell sind Läuchli Modelle (vgl. 1.2.).

(b) Jedes Läuchli Modell enthält ein Läuchli Kontinuum, das nicht lokalzusammenhängend ist (Konstruktion analog zur sin $(1/x)$ Kurve).

3.3. Korollar. *$P(A, G, I)$ ist genau dann ein Läuchli Modell, wenn — A, G wie in 3.1 — jedes $e \in I$ in jedem beschränkten Intervall relativ kompakt in der Wirklichkeit ist.*

Beweis. Sei jedes $e \in I$ beschränkt-relativ-kompakt: Seien $a < b$ in A, $\emptyset \neq M \subseteq [a, b]$, $e \in I$, $M \in \nabla(e)$, $f := \{a, b\} \cup (e \cap [a, b])$: $M \in \nabla(f)$, denn sonst gibt es $p \in \operatorname{fix} f$ und $m \in M$ mit $pm \notin M$ und daher ist q — definiert durch $q(x) = p(x)$ für $x \in [a, b]$, $q(x) = x$ sonst — in $\operatorname{fix} e \setminus \operatorname{sym} M$; daher o.B.d.A.: $e \subseteq [a, b]$, $a \in e$, $b \in e$.

$E := \{x \in e^-: \forall m \in M: x \geqslant m\}$: $b \in E \subseteq e^-$, E ist kompakt in der Wirklichkeit und daher gibt es $w = \min E$; $M \leqslant w$.

$w = \sup M$, denn ansonsten gibt es t, $M \leqslant t < w$; $t \notin e^-$. $F := \{x \in e^-: x \leqslant t\}$, $a \in F$, $p = \max F$, $p < t$, $(p, w) \cap e^- = \emptyset$. Da es $m \in M$, $n \in A$ mit $p < m \leqslant t < n < w$ gibt, gibt es $q \in \operatorname{fix}(\leftarrow, p] \cup [w, \rightarrow) \supseteq \operatorname{fix} e$ mit $qm = n$ und daher ist $(t, w) \cap M \neq \emptyset$, ein Widerspruch.

Analog folgt die Existenz von $\inf M$. Daher ist $<$ D-vollständig in P und mit 2.1 folgt: $P(A, G, I)$ ist ein Läuchli Modell.

Ist umgekehrt $P(A, G, I)$ ein Läuchli Modell, so ist die Ordnung $<$ von A D-vollständig in P und daher hat jede Menge $e \in I$ — die immer im Modell ist — in jedem beschränkten Intervall (das ein Element von e enthält) Infimum und Supremum bzgl. $<$ — auch in der Wirklichkeit — und daher ist $<$ auch in der Wirklichkeit relativ kompakt in jedem beschränkten Intervall (e^- ist abgeschlossen in der Vervollständigung von $(A, <)$).

3.4. Beispiel. (a) Sind A und G wie in 3.1 und ist I das Ideal aller in der Wirklichkeit relativ kompakten Teilmengen von A, so erfüllt das Läuchli Modell $P(A, G, I)$ AC^ω.

(b) Ist $(A, <)$ eine zu $(\boldsymbol{R}, <)$ isomorphe Menge von Urelementen, G die Gruppe aller monoton steigenden Permutationen und I das Ideal, das von allen abzählbaren, kompakten Mengen von A in der Ordnungstopologie erzeugt wird, so ist jedes abgeschlossene Intervall von Urelementen ein AA1 Läuchli LOC in $P(A, G, I)$, $P(A, G, I)$, wo AC^{ω} gilt (²).

Beweis. (a) Sei $(F_n)_n$ eine Folge nicht-leerer Mengen in $\nabla(e)$, $e \in I$ kompakt in veritate. In der Wirklichkeit V gibt es eine Folge $(x_n)_n$ mit $x_n \in F_n$; $(e_n)_n$ sei eine dazugehörige V-Folge von V-kompakten Trägern, d_n ihre entsprechenden Durchmesser in $A \cong \boldsymbol{Q}$. In V definieren wir eine Folge $(p_n)_n$ in fix e mit $f = e \cup \bigcup_n p_n(e_n)$ verikompakt. $(y_n)_n = (p_n x_n)_n$ ist dann eine Auswahlfolge von $(F_n)_n$ in $\nabla(f)$.

In $x \in e$ wird gesetzt $p_n(x) = x$. e^c zerfällt in abzählbar viele, offene, paarweise disjunkte Teilintervalle, den $\boldsymbol{Q}$-Spuren der $\boldsymbol{R}$-Komponenten von e^c. Ist $I = (a, b)$ ein beschränktes Teilintervall, so werden $c<d$ in I gewählt mit $(c, d) \cap e_n = \emptyset$, was möglich ist, weil e_n als kompakte Teilmenge von $\boldsymbol{Q}$ nirgends dicht ist. p_n wird in I definiert durch $p_n(x) = \dfrac{x-a}{b-a} \cdot \dfrac{1}{n+1} + a$ für $x \leqslant c$, $p_n(x) = \dfrac{x-b}{b-d} \cdot \dfrac{1}{n+1} + b$ für $x \geqslant d$ und linear in $c \leqslant x \leqslant d$. Ist $I = (a, \to)$ nach oben unbeschränkt, so wird gesetzt: $p_n(x) = \dfrac{x-a}{[d_n]+1} \cdot \dfrac{1}{n+1} + a$, wobei $[d] = \mathrm{Integer}\,(d)$, und analog in $(\leftarrow, b)$.

Aus der Definition folgt, daß p_n monoton steigt, bijektiv und in fix e ist. Außerdem ist $f = e \cup \bigcup_n p_n(e_n)$ beschränkt — der Durchmesser $d(f)$ ist höchstens $d(e)+2$. Da p_n stetig ist, ist $p_n(e_n)$ kompakt und daher abgeschlossen.

Als Teilmenge von $\boldsymbol{R}$ ist f außerdem abgeschlossen und daher nach Heine-Borel in $\boldsymbol{Q}$ (und daher in A) kompakt: Sei nämlich $(a_n)_n$ eine konvergente Folge in f, a ihr Grenzwert. Hat $(a_n)_n$ eine Teilfolge in e oder in einem $p_m(e_m)$, so ist a in $e \subseteq f$ oder $a \in p_m(e_m)^- \subseteq f$. Ansonsten gibt es eine Teilfolge $(a_{n(k)})$ mit $a_{n(k)} \in p_{n(k)}(e_{n(k)})$. Da der Abstand

$$\operatorname{dist}(e, a_{n(k)}) \leqslant \max\{\operatorname{dist}(e, x\colon\ x \in p_{n(k)}(e_{n(k)})\} \leqslant \frac{1}{n(k)+1}$$

ist, ist auch in diesem Fall $a \in e^- \subseteq f$.

Mit Transfertheoremen von Pincus [9] folgt, daß das Urysohnsche Lemma für AA1 LOCs nicht in $ZF + AC^{\omega}$ beweisbar ist. Andere $ZF^0 + AC^{w}$ Permutationsmodelle wo DC nicht gilt, stammen von R. B. Jensen.

(b) Der Beweis verläuft analog zu 3.3 und 3.4.a.

3.5. Bemerkung. (a) *Im Mostowski Modell sind Lindelöf'sche C_w-Räume wohlordenbar. Es gibt somit keine nicht trivialen AA1 Läuchli Kontinuen.*

(b) *Im Mostowski Modell ist jeder D-abzählbare C_w-Raum ohne isolierte Punkte von erster Kategorie.*

(²) Von D. Pincus stammt folgendes Läuchli Modell mit AC^{ω}: A, G wie in 3. 4. b und I wird erzeugt von den Mengen, die durch — wohlgeordnet werden.

Beweis. (a) Wie in 2.2 ist X eine Vereinigung einer wohlordenbaren Familie von Mengen mit D-finiter Potenzmenge.

Ist $Y \subseteq X$ mit $P(Y)$ D-finit, so ist Y abgeschlossen und diskret: Ist nämlich $x \in Y^-$, so gibt es eine wohlordenbare Familie P offener Mengen mit $\{x\} = \bigcap P$. Da $\{O \cap Y\colon\ O \in P\}$ endlich ist, gibt es eine offene Menge O mit $\bigcap P \cap Y = O \cap Y$ und $x \in O$. Somit ist $\bigcap P \cap Y \neq \emptyset$ — d.h. $x \in Y$ — und $\{x\} = O \cap Y$. Außerdem ist Y abzählbar kompakt und somit als abgeschlossener, diskreter Teilraum eines Lindelöf Raumes endlich. Da AC_{wo} gilt (vgl. 2.4.), ist X wohlordenbar.

(b) Aus 2.2 und der obigen Überlegung folgt, daß X eine Vereinigung von diskreten, abgeschlossenen Mengen $(X_n)_n$ ist. X_n ist nirgends dicht, da sonst jeder Punkt in X_n^0 isoliert in X wäre.

Literatur

[1] A. Blass, *Injectivity, projectivity and* AC, Trans. Amer. Math. Soc. 255 (1979), pp. 31–59.
[2] W. Comfort, *A theorem of Stone-Čech type*, Fund. Math. 63 (1968), pp. 97–110.
[3] J. D. Halpern, *Independence of* AC *from* BPI, Fund. Math. 55 (1964), pp. 57–66.
[4] P. E. Howard, *Limitations on* FM, J. Symb. Logic 38 (1973), pp. 416–422.
[5] H. Läuchli, AC *in der Algebra*, Comm. Math. Helv. 37 (1963), pp. 1–18.
[6] N. Lusin, *Sur un problème de M. Baire*, C. R. Paris 158 (1914), pp. 1258–1261.
[7] A. Mostowski, AC *for finite sets*, Fund. Math. 33 (1945), pp. 137–168.
[8] — *Unabhängigkeit des Wohlordnungssatzes von* 0, Fund. Math. 32 (1939), pp. 201–252.
[9] D. Pincus, *Dissertation*, Harvard 1969.
[10] F. Rothberger, *Verscharfung der Eigenschaft C*, Fund. Math. 30 (1938), pp. 50–56.
[11] T. Soundararajan, *Weakly T_2 spaces*, in General Topology (Kanpur 1968) ed. J. Novák (Academia-Praha 1971), pp. 301–306.
[12] E. P. Specker, *Mengenlehre*, Z. M. Logik G.d.M. 3 (1957), 173–210.

Accepté par la Rédaction le 20. 10. 1980