ACTA ARITHMETICA
XLIV (1984)

Über die punktweise Konvergenz von Ramanujan-Entwicklungen zahlentheoretischer Funktionen

von

ADOLF HILDEBRAND (Urbana, Ill.)

1. Einleitung und Formulierung der Ergebnisse. Die für natürliche Zahlen q und n durch

$$c_q(n) = \sum_{\substack{1 \leqslant a \leqslant q \\ (a,q)=1}} e^{2\pi i(a/q)n}$$

definierten Ramanujan-Summen tauchen in verschiedenen Problemen der Zahlentheorie auf und haben eine Reihe interessanter Eigenschaften([1]). So ist für jedes feste n die Funktion $q \mapsto c_q(n)$ multiplikativ und es gilt die Formel

$$c_q(n) = \prod_{p^m \| q} c_{p^m}(n), \qquad c_{p^m}(n) = \begin{cases} 0 & \text{falls } p^{m-1} \nmid n, \\ -p^{m-1} & \text{falls } p^{m-1} \| n, \\ p^m - p^{m-1} & \text{falls } p^m \mid n. \end{cases} \tag{1}$$

Ferner besitzt $c_q(n)$ die alternative Darstellung

$$c_q(n) = \sum_{d \mid (n,q)} d\mu\left(\frac{q}{d}\right). \tag{2}$$

Betrachtet man für jedes $q \in \mathbf{N}$ $c_q(n)$ als zahlentheoretische Funktion von n, so erfüllt die Folge $(c_q)_{q \geqslant 1}$ die Orthogonalitätsrelation

$$M(c_q c_{q'}) = \begin{cases} \varphi(q) & \text{falls } q = q', \\ 0 & \text{falls } q \neq q', \end{cases} \tag{3}$$

wobei $M(f)$ den durch

$$M(f) := \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n \leqslant N} f(n)$$

([1]) Vgl. Hardy/Wright [10], Theorem 67 und Theorem 271, sowie Schwarz/Spilker [20], Beispiel 2.3 (c).

(im Falle der Existenz des Grenzwertes) definierten Mittelwert einer zahlentheoretischen Funktion $f\colon N \to C$ bezeichnet.

Diese Eigenschaft legt es nahe, in Analogie zur Fourier-Entwicklung reeller Funktionen Entwicklungen zahlentheoretischer Funktionen f in (zunächst formale) Ramanujan-Reihen

$$f \sim \sum_{q \geqslant 1} a_q(f) c_q$$

mit den Koeffizienten

$$a_q(f) := \frac{1}{\varphi(q)} M(f c_q) \tag{4}$$

(im Falle der Existenz dieser Mittelwerte) zu betrachten und auf Konvergenzeigenschaften hin zu untersuchen. Einige allgemeine Aussagen über solche Ramanujan-Entwicklungen findet man z.B. bei Carmichael [2], Wintner [25], Delsarte [4] und Schwarz/Spilker [20]. Wir wollen uns in dieser Arbeit mit dem Problem der punktweisen Konvergenz von Ramanujan-Entwicklungen und einigen damit verwandten Fragestellungen befassen.

Darstellungen der Form

$$f(n) = \sum_{q \geqslant 1} a_q c_q(n) \quad (n \in N) \tag{5}$$

durch eine punktweise konvergente Ramanujan-Reihe wurden bereits von Hardy [9] und Ramanujan [15] für eine Reihe bekannter zahlentheoretischer Funktionen f angegeben, wobei allerdings im allgemeinen die Koeffizienten a_q nicht mit den durch (4) definierten „natürlichen" Koeffizienten $a_q(f)$ übereinstimmen. Nach Spilker [21] besitzt jede beschränkte Funktion f (mindestens) eine solche Darstellung. Es scheint jedoch bisher nicht bemerkt worden zu sein, daß das Problem der punktweisen Darstellbarkeit einer Funktion f durch eine Ramanujan-Reihe (welche nicht mit der Ramanujan-Entwicklung von f übereinzustimmen braucht) die folgende triviale Lösung besitzt:

Satz 1. *Jede zahlentheoretische Funktion f läßt sich in der Form* (5) *darstellen.*

Als wesentlich interessanter und schwieriger erweist sich die Frage nach der punktweisen Darstellbarkeit einer Funktion f durch ihre Ramanujan-Entwicklung $\sum_{q \geqslant 1} a_q(f) c_q$, d.h. der Gültigkeit von (5) mit den „natürlichen" Koeffizienten $a_q(f)$ (im Falle ihrer Existenz). Dieses Problem wurde im Fall multiplikativer Funktionen f von einer Reihe von Autoren (Schwarz [16], [17], [18], [19], Delange [3], Tuttas [23] und Warlimont [24]) untersucht. Als Beispiel sei hier der folgende Satz von Tuttas ([23], Satz 1) zitiert:

Ist $f\colon N \to C$ eine multiplikative Funktion, deren Mittelwert $M(f)$ $(= a_1(f))$ existiert und $\neq 0$ ist, und welche

$$\|f\|_2 := \left(\limsup_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n \leqslant N} |f(n)|^2 \right)^{1/2} < \infty$$

erfüllt, dann existieren die Ramanujan-Koeffizienten $a_q(f)$ $(q \in N)$ und die Ramanujan-Entwicklung $\sum_{q \geqslant 1} a_q(f) c_q$ konvergiert punktweise gegen f.

Ein ähnlicher Satz gilt für additive Funktionen (Hildebrand/Spilker [11], Satz 1):

Ist $f\colon N \to C$ eine additive Funktion, deren Mittelwert $M(f)$ existiert und welche

$$\|f\|_1 := \limsup_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n \leqslant N} |f(n)| < \infty$$

erfüllt, dann existieren die Ramanujan-Koeffizienten $a_q(f)$ $(q \in N)$ und die Ramanujan-Entwicklung $\sum_{q \geqslant 1} a_q(f) c_q$ konvergiert punktweise gegen f.

Während in diesen beiden Fällen die erzielten Ergebnisse recht befriedigend sind, ist das Konvergenzverhalten der Reihen $\sum_{q \geqslant 1} a_q(f) c_q(n)$ $(n \in N)$ für allgemeinere Funktionen f bisher noch nicht untersucht worden. Das Hauptziel dieser Arbeit ist es, einige Sätze hierzu zu beweisen.

Aufgrund der Orthogonalitätsrelation (3) gilt für jede Funktion der Gestalt

$$f = \sum_{q \leqslant Q} a_q c_q \quad (Q \in N;\ a_q \in C\ (q \leqslant Q))$$

(sogenannte „gerade Funktionen"[2]) $a_q(f) = a_q$; eine solche Funktion wird daher trivialerweise durch ihre Ramanujan-Entwicklung punktweise dargestellt. Nun läßt sich die Menge der geraden Funktionen, also der von den Funktionen c_q, $q \in N$, aufgespannte komplexe Vektorraum, bezüglich der Norm

$$\|f\|_\infty := \sup_{n \in N} |f(n)|$$

oder bezüglich einer der Halbnormen

$$\|f\|_\lambda := \left(\limsup_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n \leqslant N} |f(n)|^\lambda \right)^{1/\lambda} \quad (\lambda \geqslant 1)$$

[2] Eine gerade Funktion läßt sich auch dadurch charakterisieren, daß mit einer geeigneten natürlichen Zahl k $f(n) = f((n, k))$ für jedes $n \in N$ gilt (siehe Schwarz/Spilker [20], Theorem 1.1 (a)).

vervollständigen; die so erhaltenen Funktionenklassen, die sogenannten „gleichmäßig fastgeraden" bzw. „$\mathfrak{B}^\lambda$-fastgeraden" Funktionen, wurden von verschiedenen Autoren untersucht (siehe z.B. Schwarz/Spilker [20]). Für solche Funktionen existieren die Ramanujan-Koeffizienten([3]), und es liegt daher nahe, zu fragen, ob sich die punktweise Konvergenz der Ramanujan-Entwicklung gerader Funktionen auf die genannten Funktionenklassen überträgt. Der folgende Satz beantwortet diese Frage positiv im Falle der kleinsten Klasse, nämlich der gleichmäßig fastgeraden Funktionen.

SATZ 2. *Jede gleichmäßig fastgerade Funktion wird punktweise durch ihre Ramanujan-Entwicklung dargestellt, d.h. für jede natürliche Zahl k konvergiert die Reihe $\sum_{q\geqslant 1} a_q(f)c_q(k)$ gegen $f(k)$.*

Die Ramanujan-Entwicklung $\mathfrak{B}^\lambda$-fastgerader Funktionen ($\lambda \geqslant 1$) ist im allgemeinen nicht mehr punktweise konvergent. In Abschnitt 5 wird eine Funktion konstruiert, die für jedes $\lambda \geqslant 1$ $\mathfrak{B}^\lambda$-fastgerade ist, deren Ramanujan-Entwicklung aber an keiner Stelle konvergiert.

Wir formulieren nun drei weitere Sätze, die, wie in Abschnitt 3 gezeigt wird, alle zu Satz 2 äquivalent sind. Der erste besagt grobgesprochen, daß die Partialsummen der Ramanujan-Entwicklung einer beschränkten Funktion (punktweise) beschränkt bleiben.

SATZ 3. *Für jede beschränkte zahlentheoretische Funktion f, deren Ramanujan-Koeffizienten $a_q(f)$ ($q\in N$) existieren und jede natürliche Zahl k gilt*

$$\sup_{Q\geqslant 1}\Big|\sum_{q\leqslant Q} a_q(f)c_q(k)\Big| \leqslant c(k)\|f\|_\alpha,$$

wobei $c(k)$ eine nur von k abhängige Konstante bezeichnet.

Im nächsten Satz wird diese Aussage in Form einer „endlichen" Ungleichung formuliert.

SATZ 4. *Für jede endliche Folge $(a_q)_{q\leqslant Q_0}$ ($Q_0\in N$) komplexer Zahlen und jede natürliche Zahl k gilt*([4])

$$\max_{Q\leqslant Q_0}\Big|\sum_{q\leqslant Q} a_q c_q(k)\Big| \leqslant c(k)\max_{n\in N}\Big|\sum_{q\leqslant Q_0} a_q c_q(n)\Big|.$$

Es scheint schwierig zu sein, brauchbare Anwendungen dieser Ungleichung zu finden, zumal in mehreren naheliegenden und leicht zu berechnenden Spezialfällen man die linke Seite durch $\sum_{q\leqslant Q_0}|a_q|$ ersetzen kann und sich die Ungleichung dann als wirkungslos herausstellt. Im allgemeinen ist dies jedoch nicht möglich, wie in Abschnitt 5 mit einem Gegenbeispiel gezeigt wird.

([3]) siehe Schwarz/Spilker [20], S. 332.

([4]) Das Maximum auf der rechten Seite der Ungleichung existiert, da die Funktionen c_q und damit auch $\sum_{q\leqslant Q_0} a_q c_q$ nur endlich viele verschiedene Werte annehmen.

Im folgenden Satz wird, in Analogie zur Fourier-Theorie, die Norm von Partialsummenoperatoren abgeschätzt. Wir führen dazu die Kernfunktionen

$$S_{Q,k}(n) := \sum_{q\leqslant Q}\frac{c_q(k)c_q(n)}{\varphi(q)} \qquad (Q,\ k,\ n\in N)$$

ein, mit denen sich, wie leicht zu sehen ist, die Partialsummen der Ramanujan-Entwicklung einer Funktion f (mit existierenden Ramanujan-Koeffizienten $a_q(f)$ ($q\in N$)) an einer Stelle k in der Form

$$\sum_{q\leqslant Q} a_q(f)c_q(k) = M(fS_{Q,k}) \qquad (Q\in N)$$

schreiben lassen.

SATZ 5. *Es gilt* $\|S_{Q,k}\|_1 \leqslant c(k)$ $\quad (Q,\ k\in N)$.

Diesen Satz werden wir in Abschnitt 4 direkt beweisen. Der ralativ schwierige Beweis beruht auf Abschätzungen der Funktionen

$$M(n,z) = \sum_{d|n,\,d\leqslant z}\mu(d) \quad \text{und} \quad M_1(n,z) = \int_1^z (1/u)M(n,u)\,du.$$

Im letzten Abschnitt dieser Arbeit geben wir einige Gegenbeispiele, die zeigen, daß sich die obigen Sätze nicht wesentlich verbessern lassen. So ist z.B. die Konvergenz der Reihen $\sum_{q\geqslant 1} a_q(f)c_q(k)$ in Satz 2 im allgemeinen weder absolut noch gleichmäßig in k.

Wir beschließen diesen einleitenden Abschnitt mit der Bemerkung, daß analoge Sätze für die Fourier-Entwicklung zahlentheoretischer Funktionen nicht gelten. Darunter verstehen wir Entwicklungen der Gestalt

$$f \sim \sum_{\substack{(q,a)\in N\times N\\ 1\leqslant a\leqslant q,\,(a,q)=1}} M(f\overline{e_{a/q}})\,e_{a/q}$$

nach den für $\alpha\in\,]0,1]\cap Q$ durch

$$e_\alpha(n) := e^{2\pi i\alpha n} \qquad (n\in N)$$

definierten Funktionen, welche die Orthogonalitätsrelation

$$M(e_\alpha\overline{e_{\alpha'}}) = \begin{cases}1 & \text{falls } \alpha=\alpha',\\ 0 & \text{falls } \alpha\neq\alpha',\end{cases} \qquad (\alpha,\alpha'\in\,]0,1]),$$

erfüllen. Ordnet man die Summationsindizes (q,a) lexikographisch, was hier sehr naheliegt, so lassen sich die Partialsummen einer solchen Fourier-Entwicklung an einer Stelle $k\in N$ in der Form

$$\sum_{q<Q}\sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant q\\ (a,q)=1}} M(f\overline{e_{a/q}})e_{a/q}(k) + \sum_{\substack{a\leqslant A\\ (a,Q)=1}} M(f\overline{e_{a/Q}})e_{a/Q}(k) = M(f\tilde{S}_{(Q,A),k})$$

$$(Q,\ A\in N;\ A\leqslant Q)$$

mit

$$\tilde{S}_{(Q,A),k}(n) := \sum_{q<Q} \sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant q\\(a,q)=1}} \overline{e_{a/q}(n)}\, e_{a/q}(k) + \sum_{\substack{a\leqslant A\\(a,Q)=1}} \overline{e_{a/Q}(n)}\, e_{a/Q}(k)$$

schreiben. Nun ist im Fall $A = Q$ für jedes $n \in N$

$$\tilde{S}_{Q,k}(n) := \tilde{S}_{(Q,Q),k}(n) = \sum_{q\leqslant Q} \sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant q\\(a,q)=1}} \overline{e_{a/q}(n)}\, e_{a/q}(k)$$

$$= \sum_{q\leqslant Q} \sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant q\\(a,q)=1}} \overline{e_{a/q}(n-k)} = \sum_{q\leqslant Q} \overline{c_q(n-k)}$$

und daher für $Q \geqslant 2$ $\|\tilde{S}_{Q,k} - \tilde{S}_{Q-1,k}\|_1 = \|c_Q\|_1$. Da $\|c_Q\|_1 = \prod_{p|Q} (2-2/p)$ gilt,(5) ist die Folge $(\|c_Q\|_1)_{Q\geqslant 1}$ und somit auch $(\|\tilde{S}_{Q,k}\|_1)_{Q\geqslant 1}$ nicht beschränkt, d.h. die zu Satz 5 analoge Aussage für Fourier-Entwicklungen und damit auch die Analoga der (zu Satz 5 äquivalenten) Sätze 2, 3 und 4 gelten nicht.

2. Beweis von Satz 1. Der sehr einfache Beweis beruht auf dem auch von Spilker [21] benutzten Ansatz

$$f(n) = \sum_{q\geqslant 1} a_{q'} c_{q'}(n) \qquad (n \in N),$$

mit

$$q' := \begin{cases} 1 & \text{falls } q = 1,\\ q \prod_{p|q} p & \text{falls } q > 1, \end{cases}$$

d.h. es wird von vorneherein $a_q = 0$ gesetzt, falls q einen Primteiler p mit $p \| q$ besitzt. Wie aus der Formel (1) ersichtlich, ist $c_{q'}(n) \neq 0$ nur dann, wenn $q|n$, sodaß für jedes feste n nur endlich viele Glieder der Reihe $\sum_{q\geqslant 1} a_{q'} c_{q'}(n)$ von Null verschieden sind und daher keine Konvergenzprobleme auftreten.

Es genügt somit zu zeigen, daß sich für jede Folge $(f(n))_{n\geqslant 1}$ komplexer Zahlen das unendliche Gleichungssystem

$$f(n) = \sum_{q|n} a_{q'} c_{q'}(n) \qquad (n \in N) \tag{6}$$

nach den Größen $a_{q'}$ $(q' \geqslant 1)$ auflösen läßt. Dies ist jedoch klar: Mit den durch die Rekursionsformel

$$a_{1'} := f(1),$$

$$a_{n'} := \frac{1}{c_{n'}(n)} \Big(f(n) - \sum_{\substack{q|n\\q<n}} a_{q'} c_{q'}(n)\Big) \qquad (n > 1)$$

festgelegten Koeffizienten $a_{q'}$ ist (6) erfüllt.

(5) siehe Schwarz/Spilker [20], Beispiel 2.3(b).

Bemerkung. Die so konstruierten Koeffizienten stimmen im allgemeinen nicht mit den Entwicklungskoeffizienten $a_q(f) = \frac{1}{\varphi(q)} M(fc_q)$ (im Falle ihrer Existenz) überein.

3. Beweis der Äquivalenz der Sätze 2 bis 5. Wir zeigen die Implikationsketten

$$\text{Satz } 5 \Rightarrow \text{Satz } 3 \Rightarrow \text{Satz } 4 \Rightarrow \text{Satz } 5$$

und

$$\text{Satz } 3 \Rightarrow \text{Satz } 2 \Rightarrow \text{Satz } 4,$$

womit die Äquivalenz aller vier Sätze bewiesen ist.

Wegen der Ungleichung

$$\Big|\sum_{q\leqslant Q} a_q(f)\, c_q(k)\Big| = |M(f S_{Q,k})| \leqslant \|S_{Q,k}\|_1 \|f\|_\infty$$

folgt Satz 3 unmittelbar aus Satz 5.

Satz 4 ergibt sich als Spezialfall von Satz 3, wenn man beachtet, daß für Funktionen f der Gestalt $f = \sum_{q\leqslant Q_0} a_q c_q$ $a_q(f) = a_q$ gilt.

Zur Herleitung von Satz 5 führen wir die „Vorzeichenfunktionen" $f_{Q,k}(n) := \operatorname{sign} S_{Q,k}(n)$ $(n \in N)$ (sign $0 := 0$) ein. Da $f_{Q,k}(n) = f_{Q,k}((n, Q!))$ $(n \in N)$ gilt, ist $f_{Q,k}$ eine gerade Funktion und läßt sich somit als endliche Linearkombination der Funktionen c_q, $q \in N$, schreiben(6). Satz 4, auf die Koeffizienten dieser Linearkombination angewandt, ergibt dann

$$\|S_{Q,k}\|_1 = M(|S_{Q,k}|) = M(f_{Q,k} S_{Q,k}) = \sum_{q\leqslant Q} a_q(f_{Q,k})\, c_q(k)$$

$$\leqslant c(k) \max_{n\in N} |f_{Q,k}(n)| \leqslant c(k),$$

also die Behauptung von Satz 5.

Um Satz 2 aus Satz 3 zu folgern, sei f eine vorgegebene gleichmäßig fastgerade Funktion und

$$f_n = \sum_{q\leqslant Q_n} a_q^{(n)} c_q \qquad (n \in N)$$

eine Folge gerader Funktionen mit $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_\infty = 0$. Satz 3 ergibt für beliebige natürliche Zahlen k und n

$$\sup_{Q\geqslant 1} \Big|\sum_{q\leqslant Q} a_q(f - f_n)\, c_q(k)\Big| \leqslant c(k) \|f - f_n\|_\infty .$$

(6) Vgl. die Fußnote in Abschnitt 1 zum Stichwort „gerade Funktion".

Beachtet man nun, daß für $Q \geqslant Q_n$

$$\sum_{q \leqslant Q} a_q(f) c_q(k) = \sum_{q \leqslant Q} a_q(f-f_n) c_q(k) + \sum_{q \leqslant Q} a_q(f_n) c_q(k)$$
$$= \sum_{q \leqslant Q} a_q(f-f_n) c_q(k) + f_n(k)$$

gilt, so folgt

$$\Big|f(k) - \sum_{q \leqslant Q} a_q(f) c_q(k)\Big| \leqslant |f(k)-f_n(k)| + \Big|\sum_{q \leqslant Q} a_q(f-f_n) c_q(k)\Big|$$
$$\leqslant (1+c(k)) \|f-f_n\|_\infty$$

für jedes $Q \geqslant Q_n$ und damit nach Grenzübergang $n \to \infty$ die Konvergenz der Reihe $\sum_{q \geqslant 1} a_q(f) c_q(k)$ gegen $f(k)$.

Den Beweis der noch verbleibenden Implikation Satz 2 $\Rightarrow$ Satz 4 führen wir durch Widerspruch. Wir nehmen an, die in Satz 4 behauptete Ungleichung sei für eine (feste) natürliche Zahl k falsch. Dann existieren positive, gegen ∞ konvergierende Konstanten M_n $(n \in N)$, gerade Funktionen

$$f_n = \sum_{q \leqslant Q_n} a_q(f_n) c_q$$

mit $\|f_n\|_\infty = 1$ $(n \in N)$, sowie natürliche Zahlen Q_n' $(n \in N)$ derart, daß

$$\Big|\sum_{q \leqslant Q_n'} a_q(f_n) c_q(k)\Big| \geqslant M_n \quad (n \in N)$$

gilt. Die Konstanten M_n können dabei so gewählt werden, daß

$$\sum_{n > n_0} 1/\sqrt{M_n} \leqslant Q_{n_0}^{-2} \quad (n_0 \in N) \tag{7}$$

erfüllt ist. Ferner kann

$$Q_n \nearrow \infty \ (n \to \infty), \quad Q_n \leqslant Q_{n+1}' \leqslant Q_{n+1} \ (n \in N) \tag{8}$$

vorausgesetzt werden.

Wir definieren nun durch

$$F_N := \sum_{n \leqslant N} (1/\sqrt{M_n}) f_n \quad (N \in N)$$

eine Folge gerader Funktionen. Da für jedes $n \in N$ $\|f_n\|_\infty = 1$ gilt und die Reihe $\sum_{n \geqslant 1} 1/\sqrt{M_n}$ wegen (7) konvergiert, ist die Folge $(F_N)_{N \geqslant 1}$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_\infty$ eine Cauchy-Folge und konvergiert daher in dieser Norm gegen eine Grenzfunktion F, welche gleichmäßig fastgerade ist. Wir zeigen nun, daß die Ramanujan-Entwicklung von F an der Stelle k divergiert, was den gewünschten Widerspruch zu Satz 2 ergibt.

Für jedes $N \in N$ gilt

$$\Big|\sum_{q \leqslant Q_N'} a_q(F) c_q(k)\Big| \geqslant (1/\sqrt{M_N}) \Big|\sum_{q \leqslant Q_N'} a_q(f_N) c_q(k)\Big| -$$
$$- \sum_{n<N} (1/\sqrt{M_n}) \Big|\sum_{q \leqslant Q_N'} a_q(f_n) c_q(k)\Big| - \Big|\sum_{q \leqslant Q_N'} a_q(F-F_N) c_q(k)\Big|.$$

Beachtet man nun, daß wegen (8) für jedes $n < N$ $Q_n \leqslant Q_N'$ und damit

$$\Big|\sum_{q \leqslant Q_N'} a_q(f_n) c_q(k)\Big| = |f_n(k)| \leqslant \|f_n\|_\infty = 1$$

gilt, ferner (7) unter Verwendung der aus (1) folgenden Ungleichung $|c_q| \leqslant \varphi(q) \leqslant q$

$$\Big|\sum_{q \leqslant Q_N'} a_q(F-F_N) c_q(k)\Big| = \Big|\sum_{q \leqslant Q_N'} \frac{1}{\varphi(q)} M\big((F-F_N) c_q\big) c_q(k)\Big|$$
$$\leqslant \|F-F_N\|_\infty \sum_{q \leqslant Q_N'} \varphi(q) \leqslant \sum_{n > N} \frac{1}{\sqrt{M_n}} Q_N'^2 \leqslant 1$$

ergibt, so folgt

$$\Big|\sum_{q \leqslant Q_N'} a_q(F) c_q(k)\Big| \geqslant \sqrt{M_N} - \sum_{n<N} 1/\sqrt{M_n} - 1.$$

Da die Reihe $\sum_{n \geqslant 1} 1/\sqrt{M_n}$ konvergiert, strebt die rechte Seite gegen ∞ für $N \to \infty$, und die Reihe $\sum_{q \geqslant 1} a_q(F) c_q(k)$ ist somit, wie zu beweisen war, divergent.

4. Beweis von Satz 5

4.1. Beginn des Beweises. Wir zeigen hier, wie sich der Satz auf Abschätzungen für die Funktionen

$$M(n, z) = \sum_{d \mid n, d \leqslant z} \mu(d) \quad \text{und} \quad M_1(n, z) = \int_1^z (1/u) M(n, u)\, du$$

zurückführen läßt, welche dann in den folgenden Paragraphen bewiesen werden.

Wir zitieren zunächst einen recht allgemeinen Hilfssatz, der sich in der Folge als sehr nützlich erweisen wird. Für den Beweis verweisen wir auf Levin/Fainlaib ([12], Theorem 1) oder auch Halberstam/Richert [8], wo etwas schärfere Resultate bewiesen werden.

HILFSSATZ 1. *Es sei $f: N \to R$ eine multiplikative Funktion, welche $0 \leqslant f(p^m) \leqslant \lambda_1 \lambda_2^m$ für jede Primzahlpotenz p^m erfüllt, wobei λ_1 und $\lambda_2 < 2$*

positive Konstanten sind. Dann gilt gleichmäßig für $x \geqslant 2$

$$\sum_{n\leqslant x} f(n) \ll_{\lambda_1,\lambda_2} \frac{x}{\log x} \exp \sum_{p\leqslant x} \frac{f(p)}{p}.$$

Es seien nun k und Q natürliche Zahlen. Unter Verwendung der Formeln (1) und (2) für die Ramanujan-Summen erhält man für jede natürliche Zahl n

$$S_{Q,k}(n) = \sum_{q\leqslant Q} \frac{c_q(k)\,c_q(n)}{\varphi(q)} = \sum_{k'|k} k' \sum_{\substack{q\leqslant Q\\ k'|q}} \frac{\mu(q/k')\,c_q(n)}{\varphi(q)}$$

$$= \sum_{k'|k} k' \sum_{q\leqslant Q/k'} \frac{\mu(q)\,c_{qk'}(n)}{\varphi(qk')}$$

$$= \sum_{k'|k} k' \sum_{\substack{q'\leqslant Q/k'\\ q'|k'}} \frac{\mu(q')\,c_{q'k'}(n)}{\varphi(q'k')} \sum_{\substack{q''\leqslant Q/k'q'\\ (q'',k')=1}} \frac{\mu(q'')\,c_{q''}(n)}{\varphi(q'')}.$$

Wegen $|c_{q'k'}(n)| \leqslant \varphi(q'k')$ folgt hieraus

$$|S_{Q,k}(n)| \leqslant \sum_{k'|k} k' \sum_{q'|k'} |T_{Q/k'q',k'}(n)|$$

mit

$$T_{z,k'}(n) := \sum_{\substack{q\leqslant z\\ (q,k')=1}} \frac{\mu(q)\,c_q(n)}{\varphi(q)} \qquad (z>0).$$

Somit ist

$$\|S_{Q,k}\|_1 \leqslant \sum_{k'|k} k' \sum_{q'|k'} \|T_{Q/k'q',k'}\|_1,$$

und es genügt zum Beweis von Satz 5,

$$\sup_{z\geqslant 1} \|T_{z,k}\|_1 < \infty \qquad (k\in N) \tag{9}$$

nachzuweisen.

Eine erneute Anwendung der Formel (2) ergibt für $z \geqslant 1$ und $k,\ n\in N$

$$T_{z,k}(n) = \sum_{d|n} d \sum_{\substack{q\leqslant z\\ d|q,(q,k)=1}} \frac{\mu(q)\,\mu(q/d)}{\varphi(q)} = \sum_{\substack{d|n\\ d\leqslant z,(d,k)=1}} \frac{d\mu(d)}{\varphi(d)} \sum_{\substack{q\leqslant z/d\\ (q,dk)=1}} \frac{\mu^2(q)}{\varphi(q)}.$$

Zur Abschätzung der inneren Summe benutzen wir den folgenden Hilfssatz, der im nächsten Abschnitt bewiesen wird(7):

(7) Die im Hilfssatz abgeschätzte Summe wurde bereits im Zusammenhang mit dem Selbergsieb untersucht (siehe etwa Van Lint–Richert [13]). Es gilt die Ungleichung

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ (n,k)=1}} \frac{\mu^2(n)}{\varphi(n)} \geqslant \frac{\varphi(k)}{k} \log x \qquad \text{(Van Lint–Richert [14])}.$$

Für unsere Zwecke sind jedoch die aus der Literatur bekannten Abschätzungen unzureichend.

HILFSSATZ 2. *Gleichmäßig für* $x \geqslant 1$ *und jede natürliche Zahl* k *gilt*

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ (n,k)=1}} \frac{\mu^2(n)}{\varphi(n)} = \frac{\varphi(k)}{k}\left(\log x + C + h(k)\right) + O\left(\frac{\psi(k)}{\sqrt{x}}\right),$$

wobei

$$C := \gamma + \sum_p \frac{\log p}{p(p-1)} \qquad (\gamma = \textit{Eulersche Konstante}),$$

$$h(k) := \sum_{p|k} \frac{\log p}{p}, \qquad \psi(k) := \sum_{d|k} \frac{\mu^2(d)}{\sqrt{d}} = \prod_{p|k}\left(1+\frac{1}{\sqrt{p}}\right).$$

Mit dem Hilfssatz erhält man

$$T_{z,k}(n) = \sum_{\substack{d|n\\ d\leqslant z,(d,k)=1}} \frac{d\mu(d)}{\varphi(d)} \left\{\frac{\varphi(kd)}{kd}\left(\log\frac{z}{d} + C + h(kd)\right) + O\left(\frac{\psi(kd)}{\sqrt{z/d}}\right)\right\}$$

$$= \frac{\varphi(k)}{k} \sum_{\substack{d|n\\ d\leqslant z,(d,k)=1}} \mu(d)\log\frac{z}{d} + \frac{\varphi(k)}{k}\left(C+h(k)\right) \sum_{\substack{d|n\\ d\leqslant z,(d,k)=1}} \mu(d) +$$

$$+ \frac{\varphi(k)}{k} \sum_{\substack{d|n\\ d\leqslant z,(d,k)=1}} \mu(d)\,h(d) + O\left(\frac{\psi(k)}{\sqrt{z}} \sum_{\substack{d|n\\ d\leqslant z,(d,k)=1}} \frac{d^{3/2}\psi(d)}{\varphi(d)}\right)$$

$$=: \frac{\varphi(k)}{k} F^{(1)}_{z,k}(n) + \frac{\varphi(k)}{k}\left(C+h(k)\right)F^{(2)}_{z,k}(n) + \frac{\varphi(k)}{k} F^{(3)}_{z,k}(n) +$$

$$+ O\left(\psi(k)\,F^{(4)}_{z,k}(n)\right).$$

(9) folgt dann aus den Abschätzungen

$$\sup_{z\geqslant 1} \|F^{(i)}_{z,k}\|_1 < \infty \qquad (i=1,\ldots,4;\ k\in N),$$

welche in der Folge bewiesen werden sollen.

Im Falle von $F^{(4)}_{z,k}$ bereitet dies keinerlei Schwierigkeiten: Für jede natürliche Zahl N ist

$$\frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N} |F^{(4)}_{z,k}(n)| = \frac{1}{N\sqrt{z}} \sum_{\substack{d\leqslant z\\ (d,k)=1}} \frac{d^{3/2}\psi(d)}{\varphi(d)} \sum_{\substack{n\leqslant N\\ d|n}} 1 \leqslant \frac{1}{\sqrt{z}} \sum_{d\leqslant z} \frac{\psi(d)\sqrt{d}}{\varphi(d)},$$

wobei sich der letzte Ausdruck nach einer partiellen Summation mit der Bezeichnung

$$S(u) := \sum_{n\leqslant u} \frac{n\psi(n)}{\varphi(n)} \qquad (u\geqslant 1)$$

schreiben läßt als

$$\frac{S(z)}{z} + \frac{1}{2\sqrt{z}} \int_1^z S(u)\,u^{-3/2}\,du$$

und somit unter Verwendung der aus Hilfssatz 1 folgenden Abschätzung $S(u) \ll u$ sich durch $\ll 1$ abschätzen läßt. Folglich gilt (gleichmäßig in $z \geqslant 1$ und $k \in N$) $\|F_{z,k}^{(4)}\|_1 \ll 1$.

Die Abschätzungen für die anderen Funktionen $F_{z,k}^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$, erweisen sich als wesentlich schwieriger. Wir zeigen hier zunächst, daß man sich auf den Fall $k = 1$ beschränken kann. Dazu setzen wir für natürliche Zahlen k und n

$$\mu_k(n) := \begin{cases} \mu(n) & \text{falls } (n, k) = 1, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

und definieren Funktionen h_k $(k \in N)$ durch

$$\mu_k(n) = \sum_{d|n} \mu(d)\, h_k\left(\frac{n}{d}\right) \quad (n \in N).$$

μ_k und somit auch h_k sind multiplikative Funktionen, und es gilt für jede Primzahlpotenz p^m

$$h_k(p^m) = \begin{cases} 0 & \text{falls } p \nmid k, \\ 1 & \text{falls } p \mid k. \end{cases}$$

Damit wird

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{h_k(n)}{n} = \prod_{p|k} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} = \frac{k}{\varphi(k)}.$$

Aus der Identität

$$F_{z,k}^{(2)}(n) = \sum_{\substack{d|n \\ d \leqslant z}} \mu_k(d) = \sum_{\substack{d|n \\ d \leqslant z}} \sum_{d'd'' = d} \mu(d')\, h_k(d'')$$

$$= \sum_{\substack{d''|n \\ d'' \leqslant z}} h_k(d'') \sum_{\substack{d'|n/d'' \\ d' \leqslant z/d''}} \mu(d') = \sum_{\substack{d''|n \\ d'' \leqslant z}} h_k(d'')\, F_{z/d'',1}^{(2)}\left(\frac{n}{d''}\right) \quad (n \in N)$$

folgt nun für jede natürliche Zahl N

$$\frac{1}{N} \sum_{n \leqslant N} |F_{z,k}^{(2)}(n)| \leqslant \sum_{d \leqslant z} h_k(d)\, \frac{1}{N} \sum_{\substack{n \leqslant N \\ d|n}} \left|F_{z/d,1}^{(2)}\left(\frac{n}{d}\right)\right|$$

$$= \sum_{d \leqslant z} \frac{h_k(d)}{d}\, \frac{d}{N} \sum_{n \leqslant N/d} |F_{z/d,1}^{(2)}(n)|$$

und somit

$$\|F_{z,k}^{(2)}\|_1 \leqslant \sum_{d \leqslant z} \frac{h_k(d)}{d}\, \|F_{z/d,1}^{(2)}\|_1 \leqslant \frac{k}{\varphi(k)} \sup_{z' \geqslant 1} \|F_{z',1}^{(2)}\|_1. \tag{10}$$

Auf dieselbe Weise ergibt sich

$$\|F_{z,k}^{(1)}\|_1 \leqslant \frac{k}{\varphi(k)} \sup_{z' \geqslant 1} \|F_{z',1}^{(1)}\|_1.$$

Die Abschätzung für $\|F_{z,k}^{(3)}\|_1$ läßt sich mit Hilfe von (10) ebenfalls auf eine Abschätzung für $\|F_{z,1}^{(2)}\|_1$ zurückführen. Es gilt nämlich für $n \in N$

$$F_{z,k}^{(3)}(n) = \sum_{\substack{d|n \\ d \leqslant z, (d,k)=1}} \mu(d) \sum_{p|d} \frac{\log p}{p} = \sum_{\substack{p|n \\ p \leqslant z, p \nmid k}} \frac{\log p}{p} \sum_{\substack{d|n, d \leqslant z \\ (d,k)=1, p|d}} \mu(d)$$

$$= -\sum_{\substack{p|n \\ p \leqslant z, p \nmid k}} \frac{\log p}{p} \sum_{\substack{d|n/p \\ d \leqslant z/p, (d, kp)=1}} \mu(d) = -\sum_{\substack{p|n \\ p \leqslant z, p \nmid k}} \frac{\log p}{p}\, F_{z/p,kp}^{(2)}\left(\frac{n}{p}\right)$$

und somit für jede natürliche Zahl N

$$\frac{1}{N} \sum_{n \leqslant N} |F_{z,k}^{(3)}(n)| \leqslant \sum_{p \leqslant z} \frac{\log p}{p}\, \frac{1}{N} \sum_{\substack{n \leqslant N \\ p|n}} \left|F_{z/p,kp}^{(2)}\left(\frac{n}{p}\right)\right|$$

$$= \sum_{p \leqslant z} \frac{\log p}{p^2}\, \frac{p}{N} \sum_{n \leqslant N/p} |F_{z/p,kp}^{(2)}(n)|,$$

woraus unter Verwendung von (10)

$$\|F_{z,k}^{(3)}\|_1 \leqslant \sum_{p \leqslant z} \frac{\log p}{p^2}\, \|F_{z/p,kp}^{(2)}\|_1 \leqslant \frac{k}{\varphi(k)} \sum_p \frac{\log p}{p(p-1)} \sup_{z' \geqslant 1} \|F_{z',1}^{(2)}\|_1$$

folgt.

Damit haben wir Satz 5 auf das für sich interessante Problem zurückgeführt, für $z \geqslant 1$ die Funktionen

$$M(n, z) := \sum_{\substack{d|n \\ d \leqslant z}} \mu(d) \quad (= F_{z,1}^{(2)}(n)) \quad (n \in N)$$

und[8]

$$M_1(n, z) := \sum_{\substack{d|n \\ d \leqslant z}} \mu(d) \log \frac{z}{d} = \int_1^z \frac{1}{u} M(n, u)\, du \quad (= F_{z,1}^{(1)}(n)) \quad (n \in N)$$

im Mittel abzuschätzen. Für den Beweis von Satz 5 genügen die Abschätzungen $\|M_1(\cdot, z)\|_1 \ll 1$ und $\|M(\cdot, z)\|_1 \ll 1$ gleichmäßig in $z \geqslant 1$. Dies und im Falle von $M(\cdot, z)$ ein schärferes Ergebnis wird in den Abschnitten 4.3 bis 4.5 bewiesen.

[8] Die Integraldarstellung für $M_1(n, z)$ erhält man durch eine partielle Summation.

4.2. Beweis von Hilfssatz 2. Die abzuschätzende Summe

$$S(k,x) := \sum_{\substack{n\leqslant x\\(n,k)=1}} \frac{\mu^2(n)}{\varphi(n)}$$

läßt sich in der Form

(11) $$S(k,x) = \sum_{n\leqslant x} \frac{f_k(n)}{n} = \sum_{n\leqslant x} \frac{g_k(n)}{n} \sum_{m\leqslant x/n} \frac{1}{m} = \sum_{n\leqslant x} \frac{g_k(n)}{n}\left(\log\frac{x}{n}+\gamma+O\left(\frac{n}{x}\right)\right)$$

schreiben, wobei

$$f_k(n) := \begin{cases} \mu^2(n)\,n/\varphi(n) & \text{falls } (n,k)=1,\\ 0 & \text{sonst,}\end{cases} \qquad (n\in N)$$

und g_k die durch die Gleichungen

$$f_k(n) = \sum_{d\mid n} g_k(d) \qquad (n\in N)$$

definierte Möbiustransformierte von f_k ist. f_k und g_k sind multiplikative Funktionen, und es gilt für jede Primzahlpotenz p^m

$$f_k(p^m) = \begin{cases} p/(p-1) & \text{falls } m=1 \text{ und } p\nmid k,\\ 0 & \text{sonst,}\end{cases}$$

sowie

$$g_k(p^m) = f_k(p^m) - f_k(p^{m-1}) = \begin{cases} 1/(p-1) & \text{falls } m=1 \text{ und } p\nmid k,\\ -p/(p-1) & \text{falls } m=2 \text{ und } p\nmid k,\\ -1 & \text{falls } m=1 \text{ und } p\mid k,\\ 0 & \text{falls } m=2 \text{ und } p\mid k \text{ oder } m>2.\end{cases}$$

Wegen $\sum_{p,m\geqslant 1} |g_k(p^m)|/p^m < \infty$ konvergiert die Reihe $\sum_{n\geqslant 1} g_k(n)/n$ absolut, und es gilt

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{g_k(n)}{n} = \prod_p \left(1+\sum_{m\geqslant 1} \frac{g_k(p^m)}{p^m}\right) = \frac{\varphi(k)}{k}.$$

Ferner ist $g_k(n)$ nur dann $\neq 0$, wenn n von der Form

$$n = n_1 n_2 n_3^2, \quad \mu^2(n_i)=1 \quad (i=1,2,3), \quad n_1\mid k, \quad (n_2 n_3, k)=1$$

ist, und in diesem Fall gilt

$$g_k(n) = g_k(n_1 n_2 n_3^2) = \frac{\mu(n_1)\mu(n_3)\,n_3}{\varphi(n_2)\varphi(n_3)}.$$

Mit Hilfe dieser Darstellung erhält man für jedes $t\geqslant 1$ die Abschätzung

$$\sum_{n\leqslant t} |g_k(n)| \leqslant \sum_{n_1\mid k} \mu^2(n_1) \sum_{n_2\leqslant t/n_1} \frac{1}{\varphi(n_2)} \sum_{n_3\leqslant\sqrt{t/n_1 n_2}} \frac{n_3}{\varphi(n_3)}$$
$$\ll \sqrt{t} \sum_{n_1\mid k} \frac{\mu^2(n_1)}{\sqrt{n_1}} \sum_{n_2\leqslant t/n_1} \frac{1}{\varphi(n_2)\sqrt{n_2}} \ll \sqrt{t}\,\psi(k),$$

wobei in der zweiten Ungleichung die aus Hilfssatz 1 folgende Abschätzung

$$\sum_{n\leqslant u} \frac{n}{\varphi(n)} \ll u \qquad (u\geqslant 1)$$

verwendet wurde.

Hieraus folgt zunächst, daß der von dem O-Term in (11) herrührende Beitrag zu $S(k,x)$ ein $O\left(\psi(k)/\sqrt{x}\right)$ ist. Weiter ist für $u\geqslant 1$

$$\left|\sum_{n>u} \frac{g_k(n)}{n}\right| = \left|\int_u^\infty \frac{1}{t^2} \sum_{u<n\leqslant t} g_k(n)\,dt\right| = O\left(\psi(k)\int_u^\infty t^{-3/2}\,dt\right) = O\left(\frac{\psi(k)}{\sqrt{u}}\right),$$

und damit

$$\sum_{n\leqslant x} \frac{g_k(n)}{n} = \sum_{n\geqslant 1} \frac{g_k(n)}{n} + O\left(\frac{\psi(k)}{\sqrt{x}}\right) = \frac{\varphi(k)}{k} + O\left(\frac{\psi(k)}{\sqrt{x}}\right).$$

Hiermit erhält man schließlich

$$\sum_{n\leqslant x} \frac{g_k(n)}{n} \log\frac{x}{n} = \int_1^x \frac{1}{u} \sum_{n\leqslant u} \frac{g_k(n)}{n}\,du$$
$$= \sum_{n\geqslant 1} \frac{g_k(n)}{n} \int_1^x \frac{du}{u} - \int_1^x \frac{1}{u} \sum_{n>u} \frac{g_k(n)}{n}\,du + \int_x^\infty \frac{1}{u} \sum_{n>u} \frac{g_k(n)}{n}\,du$$
$$= \frac{\varphi(k)}{k}\log x - \int_1^x \frac{1}{u} \sum_{n>u} \frac{g_k(n)}{n}\,du + O\left(\frac{\psi(k)}{\sqrt{x}}\right).$$

Das Integral im letzten Ausdruck ist absolut konvergent und läßt sich leicht unter Verwendung der Formeln für $g_k(p^m)$ berechnen:

$$\int_1^\infty \frac{1}{u} \sum_{n>u} \frac{g_k(n)}{n}\,du = \sum_{n\geqslant 1} \frac{g_k(n)\log n}{n}$$
$$= \sum_{n\geqslant 1} \frac{g_k(n)}{n} \sum_{p^m\| n} \log p^m = \sum_{p,m\geqslant 1} \log p^m \sum_{\substack{n\geqslant 1\\ p^m\| n}} \frac{g_k(n)}{n}$$
$$= \sum_{p,m\geqslant 1} \frac{g_k(p^m)\log p^m}{p^m} \sum_{\substack{n\geqslant 1\\ p\nmid n}} \frac{g_k(n)}{n}$$

$$= \sum_{n\geqslant 1} \frac{g_k(n)}{n} \sum_{p,m\geqslant 1} \frac{g_k(p^m)\log p^m}{p^m}\left(1+\sum_{l\geqslant 1}\frac{g_k(p^l)}{p^l}\right)^{-1}$$

$$= \frac{\varphi(k)}{k}\left\{\sum_{p\nmid k}\frac{-\log p}{p(p-1)} + \sum_{p\mid k}\frac{-\log p}{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}\right\}$$

$$= -\frac{\varphi(k)}{k}\left(\sum_{p}\frac{\log p}{p(p-1)} + \sum_{p\mid k}\frac{\log p}{p}\right).$$

Die Behauptung des Hilfssatzes folgt nun nach Einsetzen der obigen Abschätzungen in (11).

4.3. Die Abschätzungen für $M(n, z)$ und $M_1(n, z)$. Wir zeigen nun die beiden folgenden Hilfssätze, welche nach Abschnitt 4.1 Satz 5 implizieren, aber auch für sich von Interesse sind:

HILFSSATZ 3. *Gleichmäßig für $z \geqslant 1$ gilt $\|M_1(\cdot, z)\|_1 \ll 1$.*

HILFSSATZ 4. *Gleichmäßig für $z \geqslant x \geqslant 1$ gilt*[9]

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{\substack{n\leqslant N\\ p(n)>x}}|M(n,z)| \ll \frac{1}{\log 2x}\left(\frac{\log 2x}{\log 2z}\right)^{\delta/2},$$

wobei $p(n)$ den kleinsten Primteiler von n bezeichnet ($p(1) := \infty$) und $\delta := 1 - \frac{\log(e\log 2)}{\log 2} = 0{,}086\ldots$ ist.

Wir zeigen zunächst, wie sich Hilfssatz 3 aus Hilfssatz 4 herleiten läßt. Der Beweis beruht auf der folgenden Identität: Ist n eine natürliche Zahl, p ein Primteiler von n mit $p^m \| n$, so gilt für jedes $u \geqslant 1$

$$M(n,u) = \sum_{\substack{d\mid n/p^m\\ d\leqslant u}}\mu(d) + \sum_{\substack{d\mid n/p^m\\ dp\leqslant u}}\mu(dp) = M\left(\frac{n}{p^m}, u\right) - M\left(\frac{n}{p^m}, \frac{u}{p}\right) \tag{12}$$

und folglich für jedes $z \geqslant 1$

$$M_1(n,z) = \int_1^z \frac{1}{u}\left(M\left(\frac{n}{p^m}, u\right) - M\left(\frac{n}{p^m}, \frac{u}{p}\right)\right)du = \int_{z/p}^z \frac{1}{u} M\left(\frac{n}{p^m}, u\right)du.$$

Wir wenden die letzte Formel im Fall $p(n) \leqslant z$ mit $p = p(n)$ an und setzen $n' := n/p(n)^m$, wobei m durch $p(n)^m \| n$ bestimmt ist. Man erhält damit für jede

(9) Der Grenzwert auf der linken Seite existiert, da die Funktion $n \mapsto M(n, z)$ und die Bedingung $p(n) > x$ nur von $(n, \prod_{p\leqslant z} p)$ abhängen.

natürliche Zahl N

$$\frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N}|M_1(n,z)|$$

$$\leqslant \frac{1}{N}\sum_{\substack{n\leqslant N\\ p(n)>z}}|M_1(n,z)| + \sum_{p\leqslant z}\int_{z/p}^z \frac{1}{u}\frac{1}{N}\sum_{\substack{n\leqslant N\\ p(n)=p}}|M(n',u)|\,du$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{\substack{n\leqslant N\\ p(n)>z}}|M_1(n,z)| + \sum_{p\leqslant z}\sum_{m\geqslant 1}\frac{1}{p^m}\int_{z/p}^z \frac{1}{u}\frac{p^m}{N}\sum_{\substack{n\leqslant N/p^m\\ p(n)>p}}|M(n,u)|\,du,$$

woraus wegen

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{\substack{n\leqslant N\\ p(n)>z}}M_1(n,z) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{\substack{n\leqslant N\\ p(n)>z}}\log z = \prod_{p\leqslant z}\left(1-\frac{1}{p}\right)\log z \ll 1$$

und mit der Abschätzung von Hilfssatz 4 (welche im Fall $x > z$ trivialerweise gilt, da dann $p(n) > x$ $M(n, z) = 1$ impliziert)

$$\|M_1(\cdot,z)\|_1 \ll 1 + \sum_{p\leqslant z}\frac{1}{p(\log p)^{1-\delta/2}}\int_{z/p}^z \frac{1}{u(\log 2u)^{\delta/2}}\,du$$

$$\ll 1 + \sum_{p\leqslant\sqrt{z}}\frac{1}{p(\log p)^{1-\delta/2}}\frac{\log p}{(\log 2z)^{\delta/2}} + \sum_{\sqrt{z}<p\leqslant z}\frac{1}{p(\log p)^{1-\delta/2}}(\log z)^{1-\delta/2} \ll 1,$$

also die Behauptung von Hilfssatz 3 folgt. Es bleibt somit noch Hilfssatz 4 zu beweisen.

Über die Funktion $M(n, z)$ sind einige Ergebnisse aus der Literatur bekannt. Bekanntlich ist $M(n, z) = 0$ für $n > 1$ und $z \geqslant n$, aber auch im Fall $z < n$ sind die „unvollständigen Summen" $\sum_{d\mid n, d\leqslant z}\mu(d)$ in der Regel Null. Genauer besagt ein Satz von Erdös und Hall [7], daß für jedes $z \geqslant 1$ die Dichte der natürlichen Zahlen n, für welche $M(n, z) \neq 0$ ist, $\ll (\log 2z)^{-\delta_1}$ ist mit $\delta_1 := \delta/(1+\delta) = 0{,}079\ldots$ Dress, Iwaniec und Tenenbaum [5] zeigten, daß der Grenzwert

$$\lim_{z\to\infty}\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N}M(n,z)^2$$

existiert, endlich und $\neq 0$ ist und gaben verschiedene Formeln für diesen Limes an.

Aus diesen beiden Ergebnissen folgt sofort mit der Cauchy–Schwarz-Ungleichung

$$\|M(\cdot, z)\|_1 \leqslant \left(\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N} M(n,z)^2\right)^{1/2}\left(\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{\substack{n\leqslant N\\ M(n,z)\neq 0}} 1\right)^{1/2}$$
$$\ll (\log 2z)^{-\delta_1/2},$$

also bereits eine abgeschwächte Form von Hilfssatz 4, die jedoch für den Beweis von Hilfssatz 3 nicht ausreicht. Hilfssatz 4 in seiner vollen Stärke ergibt sich aus den folgenden Varianten der zitierten Resultate, welche in den Abschnitten 4.4 und 4.5 bewiesen werden:

HILFSSATZ 5. *Es gilt gleichmäßig für* $z \geqslant x \geqslant 1$

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{\substack{n\leqslant N\\ p(n)>x}} M(n,z)^2 \ll \frac{1}{\log 2x}.$$

HILFSSATZ 6. *Es gilt gleichmäßig für* $z \geqslant x \geqslant 1$

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{\substack{n\leqslant N\\ p(n)>x\\ M(n,z)\neq 0}} 1 \ll \frac{1}{\log 2x}\left(\frac{\log 2x}{\log 2z}\right)^{\delta}.$$

Wegen $\delta > \delta_1$ stellt der letzte Hilfssatz (mit $x = 1$) eine Verbesserung des Ergebnisses von Erdös und Hall dar. Auf die Möglichkeit, den Exponenten von $1/\log 2z$ bei dieser Abschätzung zu δ zu verbessern, hat bereits Tenenbaum in [22] hingewiesen. Möglicherweise ist δ der „optimale" Exponent, doch es scheint sehr schwierig zu sein, diese Vermutung zu beweisen.

Es sei noch erwähnt, daß unvollständige Teilersummen der Gestalt $\sum_{d\mid P(x),\, d\leqslant z} f(d)$, wobei $P(x) := \prod_{p\leqslant x} p$ und f eine multiplikative Funktion ist, bereits von verschiedenen Autoren untersucht wurden (siehe z.B. de Brujn–Van Lint [1]). Unter gewissen Voraussetzungen an f kann man deren asymptotisches Verhalten für $x, z \to \infty$ bestimmen. Bei den obigen Hilfssätzen geht es jedoch um ein Problem anderer Natur, nämlich um Abschätzungen von $M(n, z)$ *im Mittel über* n, und die Kenntnis von $M(n, z)$ für die Zahlen n der Gestalt $n = P(x)$ würde hier natürlich nichts nützen.

4.4. Beweis von Hilfssatz 5. Zur Vereinfachung der Schreibweise bezeichnen wir (bei festem x) mit $\sum_m'$ eine Summation über m mit der Nebenbedingung $p(m) > x$.

Der abzuschätzende Ausdruck wird nach einer Umsummation

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N}' M(n,z)^2 = \sum_{d_1,d_2\leqslant z}\mu(d_1)\mu(d_2)\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{\substack{n\leqslant N\\ [d_1,d_2]\mid n}}' 1$$
$$= V(x)\sum_{d_1,d_2\leqslant z}'\frac{\mu(d_1)\mu(d_2)}{[d_1,d_2]},$$

wobei

$$V(x) := \prod_{p\leqslant x}\left(1-\frac{1}{p}\right) \ll \frac{1}{\log 2x}$$

ist. Es bleibt somit die Abschätzung

$$\sum_{d_1,d_2\leqslant z}'\frac{\mu(d_1)\mu(d_2)}{[d_1,d_2]} \ll 1 \tag{13}$$

(gleichmäßig für $z \geqslant x \geqslant 1$) zu zeigen.

Unter Verwendung der Identität

$$\frac{1}{[d_1,d_2]} = \frac{(d_1,d_2)}{d_1 d_2} = \frac{1}{d_1 d_2}\sum_{\substack{d\mid d_1\\ d\mid d_2}}\varphi(d) \qquad (d_1, d_2 \in N)$$

erhält man

$$\sum_{d_1,d_2\leqslant z}'\frac{\mu(d_1)\mu(d_2)}{[d_1,d_2]} = \sum_{d\leqslant z}\varphi(d)\left(\sum_{\substack{n\leqslant z\\ d\mid n}}'\frac{\mu(n)}{n}\right)^2 = \sum_{d\leqslant z}'\frac{\varphi(d)\mu^2(d)}{d}\left(\sum_{\substack{n\leqslant z/d\\ (n,d)=1}}'\frac{\mu(n)}{n}\right)^2.$$

Zur Abschätzung der inneren Summe werden wir

$$\sum_{\substack{n\leqslant t\\ (n,d)=1}}'\frac{\mu(n)}{n} \ll \psi(d)\min\left(1, \frac{\log x}{\log 2t}\right) \tag{14}$$

(gleichmäßig für $x \geqslant 1$, $t \geqslant 1$ und $d \in N$) zeigen, wobei $\psi(d)$ wie in Hilfssatz 2 definiert ist.

Mit (14) folgt

$$\sum_{d_1,d_2\leqslant z}'\frac{\mu(d_1)\mu(d_2)}{[d_1,d_2]} \ll \sum_{d\leqslant z}'\frac{\varphi(d)\psi^2(d)}{d^2}\min\left(1, \frac{\log^2 x}{\log^2(2z/d)}\right)$$
$$\ll \log^2 x\sum_{d\leqslant z/x}'\frac{\varphi(d)\psi^2(d)}{d^2\log^2(2z/d)} + \sum_{z/x<d\leqslant z}'\frac{\varphi(d)\psi^2(d)}{d^2}$$
$$=: (\log^2 x)\Sigma_1 + \Sigma_2.$$

Eine partielle Summation unter Verwendung der aus Hilfssatz 1 folgenden Abschätzung ([10])

$$S(u) := \sum_{n\leqslant u}{}' \frac{\varphi(n)\psi^2(n)}{n} \ll 1+\frac{u}{\log 2x} \qquad (u \geqslant 1)$$

ergibt für die Summen Σ_1 und Σ_2

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &= \frac{1}{\log^2 2x}\frac{x}{z}S\left(\frac{z}{x}\right)+\int_1^{z/x} S(u)\frac{\log^2(2z/u)-2\log(2z/u)}{u^2\log^4(2z/u)}\,du\\ &\ll \frac{1}{\log^2 2x}+\int_1^{z/x}\left(1+\frac{u}{\log 2x}\right)\frac{1}{u^2\log^2(2z/u)}\,du\\ &= \frac{1}{\log^2 2x}+\int_0^{\log(z/x)}\left(e^{-v}+\frac{1}{\log 2x}\right)\frac{dv}{(\log 2z-v)^2} \ll \frac{1}{\log^2 2x}\end{aligned}$$

sowie

$$\Sigma_2 = \frac{1}{z}S(z)-\frac{x}{z}S\left(\frac{z}{x}\right)+\int_{z/x}^{z}\frac{S(u)}{u^2}\,du \ll 1,$$

womit man (13) und damit die Behauptung des Hilfssatzes erhält.

Es verbleibt somit noch der Nachweis von (14). Mit der Bezeichnung $P(x) := \prod_{p\leqslant x} p$ wird

$$\left|\sum_{\substack{n\leqslant t\\(n,d)=1}}{}' \frac{\mu(n)}{n}\right| = \sum_{\substack{n\leqslant t\\(n,d)=1}} \frac{\mu(n)}{n}\sum_{m\mid(n,P(x))}\mu(m) \leqslant \sum_{\substack{m\mid P(x)\\ m\leqslant t}}\frac{\mu^2(m)}{m}\left|\sum_{\substack{n\leqslant t/m\\(n,dm)=1}}\frac{\mu(n)}{n}\right|.$$

Für die innere Summe benutzen wir die Abschätzung ([11])

$$\sum_{\substack{n\leqslant u\\(n,k)=1}}\frac{\mu(n)}{n} \ll \psi(k)\log^{-2}2u \qquad (u\geqslant 1,\ k\in\mathbb{N}), \tag{15}$$

welche nach Dress, Iwaniec und Tenenbaum [5] mittels einer komplexen Integration bewiesen werden kann oder aber auf folgende elementare Weise

([10]) Für $u \leqslant x$ gilt trivialerweise $S(u) = 1$.

([11]) Der Faktor $\log^{-2}2u$ auf der rechten Seite ist für unsere Zwecke ausreichend, kann jedoch ohne Schwierigkeiten zu dem aus dem Primzahlsatz bekannten Term $\exp(-c\sqrt{\log u})$ verbessert werden.

auf die bekannte Abschätzung

$$\left|\sum_{n\leqslant u}\frac{\mu(n)}{n}\right| \ll \frac{1}{\log^2 2u} \qquad (u\geqslant 1)$$

zurückgeführt werden kann: Unter Verwendung der Identität

$$\sum_{d\mid k^\infty, d\mid n}\mu\left(\frac{n}{d}\right) = \begin{cases}\mu(n) & \text{falls } (n,k)=1,\\ 0 & \text{sonst}\end{cases} \qquad (n\in\mathbb{N})$$

($d\mid k^\infty :\Leftrightarrow \prod_{p\mid d} p\mid k$) wird nämlich

$$\begin{aligned}\left|\sum_{\substack{n\leqslant u\\(n,k)=1}}\frac{\mu(n)}{n}\right| &= \left|\sum_{\substack{d\leqslant u\\ d\mid k^\infty}}\frac{1}{d}\sum_{n\leqslant u/d}\frac{\mu(n)}{n}\right|\\ &\ll \sum_{\substack{d\mid k^\infty\\ d\leqslant u}}\frac{1}{d\log^2(2u/d)} \ll \sum_{\substack{d\mid k^\infty\\ d\leqslant\sqrt{u}}}\frac{1}{d\log^2 2u}+\sum_{\substack{d\mid k^\infty\\ d>\sqrt{u}}}\frac{1}{d}\\ &\ll \frac{1}{\log^2 2u}\sum_{d\mid k^\infty}\frac{1}{d}+\sum_{d\mid k^\infty}\frac{1}{d}\left(\frac{d}{\sqrt{u}}\right)^{1/3} \ll \frac{\psi(k)}{\log^2 2u}.\end{aligned}$$

Mit (15) folgt

$$\left|\sum_{\substack{n\leqslant t\\(n,d)=1}}{}'\frac{\mu(n)}{n}\right| \ll \sum_{\substack{m\mid P(x)\\ m\leqslant t}}\frac{\mu^2(m)}{m}\frac{\psi(dm)}{\log^2(2t/m)} \ll \psi(d)\sum_{\substack{m\mid P(x)\\ m\leqslant t}}\frac{\psi(m)}{m\log^2(2t/m)},$$

wobei sich im letzten Ausdruck die Summe mit einer partiellen Summation berechnen und abschätzen läßt: Nach Hilfssatz 1 gilt für $u\geqslant 1$

$$S(u) := \sum_{\substack{m\leqslant u\\ m\mid P(x)}}\psi(m) \ll u\min\left(1,\frac{\log x}{\log 2u}\right),$$

und damit erhält man

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{m\mid P(x)\\ m\leqslant t}}\frac{\psi(m)}{m\log^2(2t/m)} &= \frac{S(t)}{t\log^2 2}+\int_1^t S(u)\frac{\log^2(2t/u)-2\log(2t/u)}{u^2\log^4(2t/u)}\,du\\ &\ll \min\left(1,\frac{\log x}{\log 2t}\right)+\int_1^t\min\left(1,\frac{\log x}{\log 2u}\right)\frac{1}{u\log^2(2t/u)}\,du\\ &= \min\left(1,\frac{\log x}{\log 2t}\right)+\int_0^{\log t}\min\left(1,\frac{\log x}{v+\log 2}\right)\frac{dv}{(\log 2t-v)^2}\\ &\ll \min\left(1,\frac{\log x}{\log 2t}\right),\end{aligned}$$

also die für den Beweis von (14) erforderliche Abschätzung.

4.5. Beweis von Hilfssatz 6. Der Beweis stellt eine Variante des Beweises von Erdös und Hall für ihr oben zitiertes Ergebnis dar. Die von uns vorgenommenen Modifikationen sind einerseits nötig, um der Summationsbedingung $p(n) > x$ Rechnung zu tragen, andererseits führen sie zu der bereits erwähnten Verbesserung des Exponenten von $\log 2z$ aus der Abschätzung von Erdös und Hall.

Der Beweis stützt sich auf die für $1/2 < y < 2$ und gleichmäßig für $z \geqslant x \geqslant 1$ gültige Abschätzung

$$(16) \qquad \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{\substack{n\leqslant N\\ x<p(n)\leqslant z}} |M(n,z)|\, y^{\Omega(n;x,z)} \ll_y \frac{1}{\log 2x}\left(\frac{\log 2z}{\log 2x}\right)^{2(y-1)},$$

wobei $\Omega(\cdot; x, z)$ die durch

$$\Omega(n; x, z) := \sum_{\substack{p^m\mid n\\ x<p\leqslant z}} 1 \qquad (n\in N)$$

definierte vollständig additive Funktion bezeichnet.

Aus (16) läßt sich wie in [7] die Behauptung von Hilfssatz 6 herleiten. Dazu seien $\varkappa > 1$, $1 < y_1 < 2$ und $1/2 < y_2 < 1$ reelle Zahlen. Die abzuschätzende Dichte wird dann

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{\substack{n\leqslant N\\ p(n)>x\\ M(n,z)\neq 0}} 1 \leqslant \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{\substack{n\leqslant N\\ p(n)>z}} 1 + \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{\substack{n\leqslant N\\ x<p(n)\leqslant z\\ \Omega(n;x,z)>\varkappa\log(\log 2z/\log 2x)}} 1 +$$

$$+ \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{\substack{n\leqslant N\\ M(n,z)\neq 0, x<p(n)\leqslant z\\ \Omega(n;x,z)\leqslant\varkappa\log(\log 2z/\log 2x)}} 1$$

$$\leqslant \prod_{p\leqslant z}\left(1-\frac{1}{p}\right) + \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{\substack{n\leqslant N\\ x<p(n)\leqslant z}} y_1^{\Omega(n;x,z)-\varkappa\log(\log 2z/\log 2x)} +$$

$$+ \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{\substack{n\leqslant N\\ x<p(n)\leqslant z}} |M(n,z)|\, y_2^{\Omega(n;x,z)-\varkappa\log(\log 2z/\log 2x)}.$$

Im letzten Ausdruck ist das erste Glied

$$\ll \frac{1}{\log 2z} \leqslant \frac{1}{\log 2x}\left(\frac{\log 2x}{\log 2z}\right)^{\delta}$$

und hat damit die geforderte Größenordnung; das zweite läßt sich mit Hilfssatz 1 durch

$$\ll_{y_1} \frac{1}{\log 2z}\exp\sum_{x<p\leqslant z}\frac{y_1}{p}\left(\frac{\log 2z}{\log 2x}\right)^{-\varkappa\log y_1}$$

$$\ll \frac{1}{\log 2x}\left(\frac{\log 2z}{\log 2x}\right)^{y_1-1-\varkappa\log y_1}$$

abschatzen, während das dritte nach (16)

$$\ll_{y_2} \frac{1}{\log 2x}\left(\frac{\log 2z}{\log 2x}\right)^{2(y_2-1)-\varkappa\log y_2}$$

ist. Nun wählt man zunächst y_1 und y_2 so, daß die beiden Exponenten von $\dfrac{\log 2z}{\log 2x}$ jeweils minimal werden, und bestimmt anschließend $\varkappa$ so, daß die beiden Minima die gleichen Werte haben. Man erhält auf diese Weise $y_1 = \varkappa$ und $y_2 = \varkappa/2$, was über die Gleichung

$$\varkappa - 1 - \varkappa\log\varkappa = 2(\varkappa/2-1) - \varkappa\log(\varkappa/2)$$

zu $\varkappa = 1/\log 2$ führt. Diese Wahl der Parameter ist mit den oben auferlegten Beschränkungen an y_1, y_2 und $\varkappa$ verträglich und ergibt als Exponenten von $\dfrac{\log 2z}{\log 2x}$

$$\varkappa - 1 - \varkappa\log\varkappa = \frac{1}{\log 2} - 1 - \frac{1}{\log 2}\log\frac{1}{\log 2} = -\delta.$$

Man erhält also die im Hilfssatz geforderte Abschätzung.

Wenden wir uns nun dem Beweis von (16) zu. Er beruht auf der aus (12) folgenden Ungleichung

$$|M(n,z)| \leqslant \sum_{\substack{d\mid n'\\ z/p(n)<d\leqslant z}} 1 \qquad (n\in N),$$

wobei n' wie in Abschnitt 4.3 definiert ist. Die linke Seite von (16) wird damit

$$\leqslant \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{\substack{n\leqslant N\\ x<p(n)\leqslant z}}\Big(\sum_{\substack{d\mid n'\\ z/p(n)<d\leqslant z}} 1\Big) y^{\Omega(n;x,z)}$$

$$= \sum_{x<p\leqslant z}\sum_{z/p<d\leqslant z}\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{\substack{n\leqslant N\\ p(n)=p, d\mid n'}} y^{\Omega(n;x,z)}.$$

Hierbei ist der innenstehende Grenzwert nur dann $\neq 0$, wenn $p(d) > p$ ist, und in diesem Fall gilt, unter Benutzung von Hilfssatz 1,

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{\substack{n\leqslant N\\ p(n)=p,d\mid n'}} y^{\Omega(n;x,z)} = \sum_{m\geqslant 1}\frac{y^{\Omega(p^m d;x,z)}}{p^m d}\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{\substack{n\leqslant N\\ p(n)>p}} y^{\Omega(n;x,z)}$$

$$\ll_y \frac{y^{\Omega(d)}}{pd(\log p)^y}(\log 2z)^{y-1}.$$

Die obige Abschätzung läßt sich daher fortsetzen durch

$$\ll_y (\log 2z)^{y-1}\sum_{x<p\leqslant z}\frac{1}{p(\log p)^y}\sum_{\substack{z/p<d\leqslant z\\ p(d)>p}}\frac{y^{\Omega(d)}}{d},$$

wobei sich die innere Summe über eine partielle Summation auswerten läßt: Es gilt

$$\sum_{\substack{z/p<d\leqslant z\\ p(d)>p}}\frac{y^{\Omega(d)}}{d} = \frac{1}{z}S_p(z) - \frac{p}{z}S_p\left(\frac{z}{p}\right) + \int_{z/p}^{z}\frac{1}{u^2}S_p(u)\,du$$

mit

$$S_p(u) := \sum_{\substack{d\leqslant u\\ p(d)>p}} y^{\Omega(d)} \ll_y \frac{u}{\log 2u}\left(1+\left(\frac{\log u}{\log p}\right)^y\right) \qquad (u\geqslant 1)$$

gemäß Hilfssatz 1. Somit folgt im Fall $p\leqslant\sqrt{z}$

$$\sum_{\substack{z/p<d\leqslant z\\ p(d)>p}}\frac{y^{\Omega(d)}}{d} \ll_y \frac{1}{\log 2z}\left(\frac{\log z}{\log p}\right)^y + \int_{z/p}^{z}\frac{1}{u\log 2u}\left(1+\left(\frac{\log u}{\log p}\right)^y\right)du$$

$$\ll (\log 2z)^{y-1}(\log p)^{1-y}.$$

Diese Abschätzung gilt aber auch für $\sqrt{z} < p \leqslant z$, denn dann ist

$$\sum_{\substack{z/p<d\leqslant z\\ p(d)>p}}\frac{y^{\Omega(d)}}{d} = \sum_{p<p'<z}\frac{y}{p'} \ll 1 \ll (\log 2z)^{y-1}(\log p)^{1-y}.$$

Damit ergibt sich für die linke Seite von (16) die Abschätzung

$$\ll_y (\log 2z)^{2(y-1)}\sum_{x<p\leqslant z}\frac{1}{p(\log p)^{2y-1}},$$

und für den Beweis von (16) verbleibt nur noch

$$\sum_{p>x}\frac{1}{p(\log p)^{2y-1}} \ll_y \frac{1}{(\log 2x)^{2y-1}}$$

zu zeigen. Dies folgt jedoch sofort nach einer partiellen Summation mit Hilfe der Tschebycheff-Abschätzung $\pi(u) \ll u/\log 2u$ $(u\geqslant 1)$ unter Beachtung der Bedingung $y > 1/2$: Es ist nämlich im Fall $x\geqslant 3/2$, wie wir o.B.d.A. annehmen können,

$$\sum_{p>x}\frac{1}{p(\log p)^{2y-1}} = -\frac{\pi(x)}{x(\log x)^{2y-1}} + \int_x^\infty \pi(u)\frac{d}{du}\left(\frac{1}{u(\log u)^{2y-1}}\right)du$$

$$\ll \frac{1}{(\log x)^{2y}} + \int_x^\infty \frac{du}{u(\log u)^{2y}} \ll \frac{1}{(\log 2x)^{2y-1}}.$$

Hilfssatz 6 ist damit vollständing bewiesen.

5. Einige negative Resultate

5.1. *Die Abschätzungen der Sätze* 3, 4 *und* 5 *sowie die Konvergenz der Reihen* $\sum_{q\geqslant 1} a_q(f)c_q(k)$ *in Satz* 2 *gelten nicht gleichmäßig in* k.

Aufgrund der Äquivalenz der Sätze 2 bis 5, welche auch für die ein festes k betreffenden Teilaussagen dieser Sätze gilt, genügt es, die Behauptung für Satz 4 zu beweisen. Dazu setzen wir für jedes natürliche N

$$a_q^{(N)} := \begin{cases}\mu(q)/\varphi(q) & \text{falls } q\mid P(N),\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

mit

$$P(N) := \prod_{N<p\leqslant 2N} p.$$

Da für jedes $n\in N$

$$\sum_{q\geqslant 1} a_q^{(N)}c_q(n) = \begin{cases}\prod_{N<p\leqslant 2N}\left(1+1/(p-1)\right) \ll 1 & \text{falls } (n, P(N)) = 1,\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

gilt, bleibt das Maximum auf der rechten Seite der Ungleichung von Satz 4 (mit den Koeffizienten $a_q^{(N)}$, $q\mid P(N)$) gleichmäßig in N beschränkt. Andererseits ist aber die linke Seite für $k = k(N) = P(N)$

$$\max_{Q\leqslant P(N)}\left|\sum_{\substack{q\mid P(N)\\ q\leqslant Q}}\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}c_q(k)\right| \geqslant \left|\sum_{\substack{q\mid P(N)\\ q\leqslant 2N}}\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}c_q(k)\right|$$

$$= \left|\sum_{N<p\leqslant 2N}\frac{\mu(p)}{\varphi(p)}c_p(k)\right| = \sum_{N<p\leqslant 2N} 1,$$

konvergiert also gegen ∞ für $N\to\infty$. Folglich kann die Abschätzung von Satz 4 nicht gleichmäßig in k gelten.

5.2. *Die linke Seite der Ungleichung aus Satz 4 kann nicht durch* $\sum_{q\leqslant Q_0}|a_q|\mu^2(q)$ *oder gar* $\sum_{q\leqslant Q_0}|a_q|$ *ersetzt werden (letzteres würde wegen* $|c_q(k)|\leqslant\sum_{k'|k}k'$ *eine schärfere Ungleichung ergeben).*

Zum Beweis setzen wir für $N\geqslant 3$

$$a_q^{(N)}:=\begin{cases}(\mu(q)/\varphi(q))\,(\Omega(q)-A(N)) & \text{falls } q|N!,\\ 0 & \text{sonst,}\end{cases}$$

wobei $\Omega(q)$ die Gesamtzahl der Primteiler von q (mit ihrer Vielfachheit gezählt) bezeichnet und

$$A(N):=\sum_{p\leqslant N}1/p$$

ist. Dann gilt für jedes $n\in N$

$$\sum_{q\geqslant 1}a_q^{(N)}c_q(n)=\sum_{q|N!}\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\,\Omega(q)\,c_q(n)-A(N)\sum_{q|N!}\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\,c_q(n)$$

$$=\sum_{p\leqslant N}\sum_{\substack{q|N!\\ p|q}}\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\,c_q(n)-A(N)\prod_{p\leqslant N}\left(1-\frac{c_p(n)}{\varphi(p)}\right).$$

Im letzten Ausdruck ist der zweite Summand nur dann $\neq 0$, wenn $(n, N!)=1$ gilt und hat in diesem Fall den Wert

$$A(N)\prod_{p\leqslant N}(1+1/(p-1)),$$

während sich die innere Summe im ersten Summanden zu

$$\sum_{\substack{q|N!\\ p|q}}\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\,c_q(n)=\frac{\mu(p)}{\varphi(p)}\,c_p(n)\sum_{\substack{q|N!\\ p\nmid q}}\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\,c_q(n)=-\frac{c_p(n)}{p-1}\prod_{\substack{p'\leqslant N\\ p'\neq p}}\left(1-\frac{c_{p'}(n)}{p'-1}\right)$$

$$=\begin{cases}-\prod_{\substack{p'\leqslant N\\ p'\neq p}}(1+1/(p'-1)) & \text{falls } (n, N!)=p\ (\leqslant N),\\ (1/p)\prod_{p'\leqslant N}(1+1/(p'-1)) & \text{falls } (n, N!)=1,\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

berechnet. Somit wird

$$\sum_{q\geqslant 1}a_q^{(N)}c_q(n)=\begin{cases}-\prod_{\substack{p'\leqslant N\\ p'\neq p}}(1+1/(p'-1)) & \text{falls } (n, N!)=p\leqslant N,\\ 0 & \text{sonst,}\end{cases}$$

also

$$\max_{n\in N}\Big|\sum_{q\geqslant 1}a_q^{(N)}c_q(n)\Big|\leqslant\prod_{p\leqslant N}\left(1+\frac{1}{p-1}\right)\ll\log N.$$

Andererseits ist

$$\sum_{q\geqslant 1}|a_q^{(N)}|=\sum_{q|N!}\frac{|\Omega(q)-A(N)|\,\mu^2(q)}{\varphi(q)},$$

und dieser Ausdruck ist für jedes $k\in N$

$$\geqslant k\sum_{\substack{q|N!\\ |\Omega(q)-A(N)|\geqslant k}}\frac{\mu^2(q)}{q}=k\left(\sum_{q|N!}\frac{\mu^2(q)}{q}-\sum_{\substack{n\\ |n-A(N)|<k}}\sum_{\substack{q|N!\\ \Omega(q)=n}}\frac{\mu^2(q)}{q}\right).$$

Zum Beweis der Behauptung genügt es nun,

$$\max_{\substack{n\\ |n-A(N)|<k}}\sum_{\substack{q|N!\\ \Omega(q)=n}}\frac{\mu^2(q)}{q}=o(\log N)\qquad(N\to\infty)\tag{16}$$

für jedes (feste) $k\in N$ zu zeigen. Dann folgt nämlich wegen

$$\sum_{q|N'}\frac{\mu^2(q)}{q}=\prod_{p\leqslant N}\left(1+\frac{1}{p}\right)\sim\log N\qquad(N\to\infty),$$

$$\limsup_{N\to\infty}\frac{1}{\log N}\sum_{q|N!}|a_q^{(N)}|\geqslant k$$

für jede natürliche Zahl k, d.h. die Abschätzung

$$\Big(\sum_{q|N!}|a_q^{(N)}|\,\mu^2(q)=\Big)\quad\sum_{q|N!}|a_q^{(N)}|\ll\max_{n\in N}\Big|\sum_{q\geqslant 1}a_q^{(N)}c_q(n)\Big|$$

ist falsch.

(16) ist leicht einzusehen: Unter Verwendung der Stirlingschen Formel wird

$$\sum_{\substack{q|N!\\ \Omega(q)=n}}\frac{\mu^2(q)}{q}\leqslant\frac{1}{n!}\left(\sum_{p\leqslant N}\frac{1}{p}\right)^n=\frac{A(N)^n}{n!}\ll\left(\frac{A(N)}{n}\right)^n\frac{e^n}{\sqrt{n}},$$

und dies ist im Falle $n=A(N)+O_k(1)=\log\log N+O_k(1)$

$$\ll_k\frac{e^{A(N)}}{\sqrt{A(N)}}\ll\frac{\log N}{\sqrt{\log\log N}},$$

also ein $o(\log N)$.

5.3. *Es gibt eine gleichmäßig fastgerade Funktion, deren Ramanujan-Entwicklung an keiner Stelle absolut konvergiert.*

Die Konstruktion dieser Funktion verläuft ähnlich wie beim Beweis der Implikation Satz 2 ⇒ Satz 4, wobei hier das Ergebnis des vorstehenden Abschnittes benutzt wird.

Gemäß 5.2 existieren gerade Funktionen

$$f_n = \sum_{q \leqslant Q_n} a_q(f_n)\, c_q$$

mit $\|f_n\|_\infty = 1$ $(n \in N)$ und positive Konstanten M_n $(n \in N)$ mit $\lim_{n\to\infty} M_n = \infty$ derart, daß

$$\sum_{q \leqslant Q_n} |a_q(f_n)|\, \mu^2(q) \geqslant M_n \qquad (n \in N)$$

gilt, wobei wir o.B.d.A. $Q_n < Q_{n+1}$ $(n \in N)$ sowie

$$\sum_{n>N} \frac{1}{\sqrt{M_n}} \leqslant \frac{1}{Q_N} \qquad (N \in N) \tag{17}$$

voraussetzen können. Die Reihe $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{M_n}} f_n$ ist somit gleichmäßig konvergent und definiert eine gleichmäßig fastgerade Funktion F.

Nun gilt für jede natürliche Zahl N und jedes $q \in N$ mit $Q_{N-1} < q \leqslant Q_N$

$$\begin{aligned} |a_q(F)| &= \left| a_q\left(\sum_{n\geqslant N} \frac{1}{\sqrt{M_n}} f_n \right) \right| \\ &\geqslant \frac{1}{\sqrt{M_N}} |a_q(f_N)| - \sum_{n>N} \frac{1}{\sqrt{M_n}} \frac{1}{\varphi(q)} |M(f_n c_q)| \\ &\geqslant \frac{1}{\sqrt{M_N}} |a_q(f_N)| - \sum_{n>N} \frac{1}{\sqrt{M_n}} \end{aligned}$$

und damit, unter Verwendung von (17),

$$\begin{aligned} \sum_{Q_{N-1}<q\leqslant Q_N} |a_q(F)|\, \mu^2(q) &\geqslant \frac{1}{\sqrt{M_N}} \sum_{q\leqslant Q_N} |a_q(f_N)|\, \mu^2(q) - \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{M_N}} \sum_{q\leqslant Q_{N-1}} \frac{1}{\varphi(q)} |M(f_N c_q)| - Q_N \sum_{n>N} \frac{1}{\sqrt{M_n}} \\ &\geqslant \sqrt{M_N} - \frac{Q_{N-1}}{\sqrt{M_N}} - Q_N \sum_{n>N} \frac{1}{\sqrt{M_n}} \geqslant \sqrt{M_N} - 2. \end{aligned}$$

Folglich ist die Reihe $\sum_{q\geqslant 1} |a_q(F)|\, \mu^2(q)$ divergent, und damit auch wegen $|c_q(k)| \geqslant \mu^2(q)$ die Reihen $\sum_{q\geqslant 1} |a_q(F)\, c_q(k)|$ $(k \in N)$.

5.4. *Es gibt eine zahlentheoretische Funktion, welche $\mathfrak{B}^\lambda$-fastgerade ist für jedes $\lambda \geqslant 1$, deren Ramanujan-Entwicklung aber an keiner Stelle konvergiert.*

Es sei zunächst $f(n) = \sum_{p|n} f(p)$ $(n \in N)$ eine stark additive Funktion, welche folgenden Bedingungen genügt:

$$|f(p)| \leqslant 1 \quad \text{für jede Primzahl } p, \tag{18}$$

$$\sum_p \frac{|f(p)|^2}{p} < \infty, \tag{19}$$

$$\text{die Reihe } \sum_p \frac{f(p)}{p} \text{ divergiert.} \tag{20}$$

Eine mögliche Wahl ist z.B.

$$f(p) = \begin{cases} 0 & \text{falls } p \leqslant e^e, \\ (\log\log p)^{-1} & \text{falls } p > e^e. \end{cases}$$

Wir setzen nun für $n \in N$

$$F(n) := f(n) - A(n)$$

mit

$$A(n) := \sum_{p\leqslant n} \frac{f(p)}{p}$$

und zeigen, daß F die geforderten Eigenschaften hat.

Zunächst zeigen wir, daß F sich durch die geraden Funktionen

$$F_N(n) := \sum_{\substack{p|n \\ p\leqslant N}} f(p) - A(N) \qquad (n \in N)$$

in den Normen $\|\cdot\|_\lambda$, $\lambda \geqslant 1$, beliebig gut approximieren läßt und damit $\mathfrak{B}^\lambda$-fastgerade ist für jedes $\lambda \geqslant 1$. Wir verwenden dazu den folgenden Hilfssatz, der eine Verallgemeinerung der bekannten Turán–Kubilius-Ungleichung darstellt:

HILFSSATZ 7 (siehe Elliott [6], Satz 1). *Es sei $\lambda > 0$. Dann gilt gleichmäßig für jede additive Funktion f und jedes reelle $x \geqslant 1$*

$$\frac{1}{x} \sum_{n\leqslant x} \left| f(n) - \sum_{p^m \leqslant x} \frac{f(p^m)}{p^m} \right|^\lambda \begin{cases} \ll_\lambda \Big(\sum_{p^m\leqslant x} |f(p^m)|^2/p^m \Big)^{\lambda/2} + \sum_{p^m\leqslant x} |f(p^m)|^\lambda/p^m & (\lambda > 2), \\ \ll_\lambda \Big(\sum_{p^m\leqslant x} |f(p^m)|^2/p^m \Big)^{\lambda/2} & (\lambda \leqslant 2). \end{cases}$$

Es sei nun $\lambda \geqslant 1$ und $N \in N$ zunächst festgehalten. Dann gilt für jedes $x \geqslant N$

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \sum_{n\leqslant x} |F(n) - F_N(n)|^\lambda &= \frac{1}{x} \sum_{n\leqslant x} \Big| \sum_{\substack{p|n \\ p>N}} f(p) - A(n) + A(N) \Big|^\lambda \\ &\ll_\lambda \frac{1}{x} \sum_{n\leqslant x} \Big| \sum_{\substack{p|n \\ p>N}} f(p) - \sum_{\substack{p^m\leqslant x \\ p>N}} \frac{f(p)}{p^m} \Big|^\lambda + \frac{1}{x} \sum_{n\leqslant x} \Big| \sum_{\substack{p^m\leqslant x \\ p>N}} \frac{f(p)}{p^m} - A(n) + A(N) \Big|^\lambda. \end{aligned}$$

Das erste Glied im letzten Ausdruck läßt sich nach dem Hilfssatz, auf die (additive) Funktionen $n \mapsto \sum_{p^m \| n, p > N} f(p)$ angewandt, unter Verwendung der Bedingung (18) gleichmäßig in $x \geqslant N$ durch

$$\ll_\lambda \left(\sum_{p>N} \frac{|f(p)|^2}{p} \right)^{\lambda/2} + \sum_{p>N} \frac{|f(p)|^2}{p}$$

abschätzen. Da für jedes n mit $N < n \leqslant x$ wegen (18)

$$\left| \sum_{\substack{p^m \leqslant x \\ p>N}} \frac{f(p)}{p^m} - A(n) + A(N) \right| = \left| \sum_{\substack{p^m \leqslant x \\ p>N, m \geqslant 2}} \frac{f(p)}{p^m} + \sum_{n < p \leqslant x} \frac{f(p)}{p} \right|$$

$$\leqslant \sum_{\substack{p>N \\ m \geqslant 2}} \frac{1}{p^m} + \sum_{n < p \leqslant x} \frac{1}{p} \ll \sum_{p>N} \frac{1}{p^2} + \log \frac{\log x}{\log n}$$

gilt, wird das zweite Glied für genügend große x

$$\ll_\lambda \left(\sum_{p>N} \frac{1}{p^2} \right)^\lambda + \frac{1}{x} \sum_{n \leqslant x/\log x} (\log\log x)^\lambda + \frac{1}{x} \sum_{n \leqslant x} \left(\log \frac{\log x}{\log(x/\log x)} \right)^\lambda$$

$$= \left(\sum_{p>N} \frac{1}{p^2} \right)^\lambda + o(1) \quad (x \to \infty).$$

Folglich ist

$$\|F - F_N\|_\lambda^\lambda \ll_\lambda \left(\sum_{p>N} \frac{|f(p)|^2}{p} \right)^{\lambda/2} + \sum_{p>N} \frac{|f(p)|^2}{p} + \left(\sum_{p>N} \frac{1}{p^2} \right)^\lambda,$$

also wegen (19) $\lim_{N \to \infty} \|F - F_N\|_\lambda = 0$, d.h. F ist $\mathfrak{B}^\lambda$-fastgerade.

Aus der Darstellung

$$F_N(n) = \sum_{\substack{p \mid n \\ p \leqslant N}} f(p) - \sum_{p \leqslant N} \frac{f(p)}{p} = \sum_{p \leqslant N} \frac{f(p)}{p} c_p(n) \quad (n \in N)$$

entnimmt man

$$a_q(F_N) = \begin{cases} f(p)/p & \text{falls } q = p \leqslant N, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (N, q \in N),$$

Wegen der Ungleichung

$$|a_q(F) - a_q(F_N)| = \frac{1}{\varphi(q)} |M(c_q(F - F_N))| \leqslant \|F - F_N\|_1 \leqslant \|F - F_N\|_\lambda$$

$$(N, q \in N, \lambda \geqslant 1)$$

folgt hieraus

$$a_q(F) = \lim_{N \to \infty} a_q(F_N) = \begin{cases} f(p)/p & \text{falls } q = p, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (q \in N),$$

Somit gilt für k, $Q \in N$

$$\sum_{q \leqslant Q} a_q(F) c_q(k) = \sum_{p \leqslant Q} a_p(F) c_p(k) = - \sum_{p \leqslant Q} a_p(F) + \sum_{p \mid k} p a_p(F),$$

und da nach (20) die Reihe $\sum_p a_p(F) = \sum_p f(p)/p$ divergiert, sind auch die Reihen $\sum_{q \geqslant 1} a_q(F) c_q(k)$ $(k \in N)$ divergent.

Die Behauptung dieses Abschnittes ist damit bewiesen.

Literatur

[1] N. G. De Brujn, J. H. Van Lint, *Incomplete sums of multiplicative functions I, II*, Indagationes Math. 26 (1964), S. 339–358.

[2] R. D. Carmichael, *Expansions of arithmetical functions in infinite series*, Proc. London Math. Soc. (2) 34 (1932), S. 1–26.

[3] H. Delange, *Quelques résultats sur les fonctions multiplicatives*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A, 281 (1975), S. 997–1000.

[4] M. J. Delsarte, *Essai sur l'application de la théorie des fonctions presque périodiques à l'arithmétique*, Ann. Sci. de l'Ecole Norm. Sup. (3) 62 (1945), S. 185–204.

[5] F. Dress, H. Iwaniec, G. Tenenbaum, *Sur une somme liée à la fonction de Möbius*, J. Reine Angew. Math. 340 (1983), S. 53–58.

[6] P. D. T. A. Elliott, *High-power analogues of the Turán–Kubilius inequality and an application to number theory*, Can. J. Math. 32 (1980), S. 893–907.

[7] P. Erdös, R. R. Hall, *On the Möbius function*, J. Reine Angew. Math. 315 (1980), S. 121–126.

[8] H. Halberstam, H.-E. Richert, *On a result of R. R. Hall*, J. Number Theory (1) 11 (1979), 76–89.

[9] G. H. Hardy, *Note on Ramanujan's trigonometrical function $c_q(n)$ and certain series of arithmetical functions*, Proc. Cambridge Phil. Soc. 20 (1921), S. 263–271.

[10] G. H. Hardy, E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford 1960.

[11] A. Hildebrand, J. Spilker, *Charakterisierung der additiven, fastgeraden Funktionen*, Manuscripta Math. 32 (1980), S. 213–230.

[12] B. V. Levin, A. S. Fainlaib, *Multiplicative functions and probabilistic number theory*, Mathematics of the USSR – Izvestija 4 (1970), S. 1071–1118.

[13] J. H. Van Lint, H.-E. Richert, *Über die Summe* $\sum_{n \leqslant x, p(n) > y} \mu^2(n)/\varphi(n)$, Indagationes Math. 26 (1964), S. 582–587.

[14] –, – *On primes in arithmetic progressions*, Acta Arith. 11 (1965), S. 209–216.

[15] S. Ramanujan, *On certain trigonometrical sums and their applications in the theory of numbers*, Transactions Cambridge Phil. Soc. 22 (1918), S. 259–276.

[16] W. Schwarz, *Ramanujan-Entwicklungen stark multiplikativer Funktionen*, Acta Arith. 22 (1973), S. 329–338.

[17] – *Die Ramanujan-Entwicklung reellwertiger multiplikativer Funktionen vom Betrage kleiner oder gleich Eins*, J. Reine Angew. Math. 271 (1974), S. 171–176.

[18] W. Schwarz, *Ramanujan-Entwicklungen stark multiplikativer Funktionen*, ibid. 262/263 (1973), S. 66–73.
[19] – *Über die Ramanujan-Entwicklung multiplikativer Funktionen*, Acta Arith. 27 (1975), S. 269–279.
[20] W. Schwarz, J. Spilker, *Mean-Values and Ramanujan-Expansions of Almost Even Functions*, Coll. Math. Soc. János Bolyai, Debrecen 1974, S. 315–357 (1976).
[21] J. Spilker, *Ramanujan expansions of bounded arithmetic functions*, Arch. Math. 35 (1980), S. 451–453.
[22] G. Tenenbaum, *Sur la probabilité qu'un entier possède un diviseur dans un intervalle donné*, Preprint.
[23] F. Tuttas, *Über die Entwicklung multiplikativer Funktionen nach Ramanujan-Summen*, Acta Arith. 36 (1980), S. 257–270.
[24] R. Warlimont, *Ramanujan-Expansions of Multiplicative Functions*, ibid. 42 (1983), S. 111–120.
[25] A. Wintner, *Eratosthenian Averages*, Baltimore 1943.

UNIVERSITY OF ILLINOIS
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
Urbana, Illinois 61801, USA

Eingegangen am 26. 11. 1982
und in revidierter Form am 28. 4. 1983 (1330)

ACTA ARITHMETICA
XLIV (1984)

Algorithme de Jacobi–Perron dans les corps de nombres de degré 4

par

MOSTAPHA BOUHAMZA (Casablanca, Maroc)

Introduction. Perron [3] a introduit une généralisation de l'algorithme du développement en fraction continue, permettant de développer un système de n nombres réels. Bernstein [1], dans une série d'articles publiés depuis 1963, donne des systèmes de nombres dont le développement par l'Algorithme de Jacobi–Perron (A.J.P) est périodique. E. Dubois et R. Paysant-Le Roux [2] ont démontré que dans toute extension réelle cubique du corps des rationnels Q, il existe deux nombres dont l'A.J.P est périodique.

Dans cet article, nous nous proposons de démontrer que dans toute extension réelle K, de degré 4 sur Q, il existe trois nombres Q-linéairement indépendants avec 1, dont le développement suivant l'A.J.P est périodique.

LEMME. *Soit*

$$g(X) = X^4 - aX^3 + bX^2 - cX + 1$$

où a, b et c sont des entiers naturels vérifiant:

$$(*) \qquad c \geqslant 5, \quad b \geqslant 2(c-1) \quad \text{et} \quad a \geqslant \max(b-1,\ 2b-3c+5).$$

Soit α la plus grande racine positive de $g(X)$. Alors le développement par l'A.J.P de:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \left(\frac{(a-c)(\alpha-1)\alpha + (2c-b-2)(\alpha-1)}{(a-4)\alpha^2 - (b-6)\alpha + c - 4}, \right.$$
$$\left. \frac{(a+c-b-2)(\alpha-1)^2}{(a-4)\alpha^2 - (b-6)\alpha + c - 4}, \frac{(\alpha-1)^3}{(a-4)\alpha^2 - (b-6)\alpha + c - 4} \right)$$

est purement périodique de longueur 4. La période est:

$$(0, 0, 1)$$
$$(0, 0, 1)$$
$$(0, 0, 1)$$
$$(c-4,\ b-2(c-1),\ a+c-b-2)$$

et $g(X)$ est le polynôme caractéristique du développement.